ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.544

Н.А. БАРИЕВА, И.А. БИКЧАНТАЕВ

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В статье построена нётерова теория задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения для решений неоднородного уравнения Коши–Римана на произвольной римановой поверхности в классе функций с Λ_0-поведением в окрестности идеальной границы.

1. Пусть R — произвольная риманова поверхность рода h $(\leq \infty)$, $\mathcal{R} = \{R_n\}_1^\infty$ — каноническое исчерпание поверхности R, $\{D_\nu\}_1^{2h}$ — канонический базис гомологий поверхности R по модулю разбивающих циклов, ассоциированный с $\mathcal{R}$ ([1], с. 71–72), $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^h$ — семейство прямых в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, проходящих через начало координат, $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$ — пространство поведения, ассоциированное с $\mathcal{L}$ [2], [3]; ω_{pq}, σ_{pq} — абелевы дифференциалы третьего рода с Λ_0-поведением и единственными простыми полюсами в точках p и q с вычетами $1, i$ в p и $-1, -i$ в q, периоды которых вдоль D_ν принадлежат $L_{[(\nu+1)/2]}$, где $[\ \ ]$ означает целую часть числа; $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{2h}$ — базис пространства абелевых дифференциалов первого рода с Λ_0-поведением, нормированный условиями: $\displaystyle\int_{D_\nu} \varphi_\mu - \gamma_\mu (D_\mu \circ D_\nu) \in L_{[(\nu+1)/2]}$, $\mu, \nu = 1, \dots, 2h$, где $D_\mu \circ D_\nu$ — индекс пересечения циклов D_μ и D_ν, $\gamma_\mu \in \mathbb{C}$, $|\gamma_\mu| = 1$, $\mathrm{i}\gamma_{2\mu-1} = \mathrm{i}\gamma_{2\mu} =: l_\mu \in L_\mu$; через ω'_{pq}, σ'_{pq}, φ'_ν обозначим нормированные дифференциалы, которые получаются, если в определении ω_{pq}, σ_{pq}, φ_ν заменить γ_μ, L_j, Λ_0 соответственно на $\overline{\gamma}_\mu$, $\overline{L}_j := \{z : \overline{z} \in L_j\}$, $\overline{\Lambda}_0 := \{\lambda : \overline{\lambda} \in \Lambda_0\}$.

Положим $K_1(p,q) := \mathrm{d}_p \displaystyle\int_{q_0}^{q} \omega_{pp_0}$, $K_2(p,q) := \mathrm{d}_p \displaystyle\int_{q_0}^{q} \sigma_{pp_0}$, $K_3(p,q) := \omega'_{qq_0}(p)$, $K_4(p,q) := \sigma'_{qq_0}(p)$, $H_1 := \frac{1}{2}(K_1 - \mathrm{i}K_2) = \frac{1}{2}(K_3 - \mathrm{i}K_4)$, $H_2 := -\frac{1}{2}(K_1 + \mathrm{i}K_2) = -\frac{1}{2}\overline{(K_3 + \mathrm{i}K_4)}$. Через $k_j(p,q)$ и $h_k(p,q)$ обозначим однозначные на $R' := R \backslash \cup_{\nu \geq 1} D_\nu$ ветви многозначных по q функций $K_j(p,q)$ и $H_k(p,q)$, обращающиеся в нуль в точке q_0.

Пусть $L_2^{(1)}(R)$ — гильбертово пространство дифференциалов первого порядка, интегрируемых с квадратом и с внутренним произведением

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \mathrm{Re} \iint_R \lambda_1 \wedge *\overline{\lambda}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in L_2^{(1)}(R).$$

Норма дифференциала $\lambda \in L_2^{(1)}(R)$ определяется равенством $\|\lambda\| = \sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle}$. Пусть $L_2^{1,0}(R)$ и $L_2^{0,1}(R)$ — подпространства $L_2^{(1)}(R)$, состоящие из дифференциалов типа $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно. Очевидно, $L_2^{(1)}(R) = L_2^{1,0}(R) \oplus L_2^{0,1}(R)$. Положим

$$(\varphi, \psi) := \mathrm{Re} \iint_R \varphi \wedge \psi, \quad \varphi, \psi \in L_2^{(1)}(R).$$

Билинейная форма $(\cdot,\cdot)$ связана со скалярным произведением $\langle \cdot,\cdot \rangle$ в гильбертовом пространстве $L_2^{(1)}(R)$ соотношением $\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, *\overline{\psi})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-0888) и фонда научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок Республики Татарстан (грант № 09-12/99).

2. Обозначим через Γ гладкий замкнутый контур на R, состоящий из конечного числа компонент, гомеоморфных окружности; без ущерба для общности можно считать, что Γ пересекается с каноническими циклами D_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, 2h$, не более чем в конечном числе точек. Обозначим через $D = P/Q$ произвольный конечный дивизор на $R \setminus \Gamma$, где P и Q — непересекающиеся целые дивизоры, через R_0 — регулярную относительно компактную область на R, содержащую внутри себя контур Γ и носитель дивизора D, через m_0 — мероморфную функцию на $\overline{R}_0$, дивизор которой (m_0) равен Dq_0, где q_0 — фиксированная точка на $R \setminus \Gamma$; доопределим m_0 на R, полагая $m_0 = 1$ на $R \setminus \overline{R}_0$. Пусть F — линейный дифференциал типа $(0,1)$ такой, что произведение $m_0 F$ принадлежит $L_2^{0,1}(R)$ и локально интегрируемо со степенью $p > 2$, G_1, G_2, g — функции класса $H_{1-2/p}(\Gamma)$, причем $G_1(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Рассмотрим следующую задачу.

Найти функцию f такую, что $m_0 f \in H^{\mathrm{loc}}_{1-2/p}(\overline{R \setminus \Gamma})$ (замыкание берется в топологии, определяемой метрикой Мазуркевича), *удовлетворяющую в* $R \setminus (\Gamma \cup \operatorname{supp} P)$ *уравнению*

$$\overline{\partial} f = F, \tag{1}$$

имеющую Λ_0-поведение в окрестности идеальной границы [4] *и удовлетворяющую на Γ краевому условию*

$$(\mathrm{Z}f)(t) := f^+(t) - G_1(t) f^-(t) - G_2(t)\overline{f^-(t)} = g(t), \quad t \in \Gamma. \tag{2}$$

Наряду с этой задачей рассмотрим союзную с ней задачу.

Найти мероморфный в $R \setminus \Gamma$ дифференциал ψ, кратный дивизору D, с $\mathrm{i}\overline{\Lambda}_0$-поведением в окрестности идеальной границы, имеющий предельные значения слева и справа на Γ, принадлежащие $H_{1-2/p}(\Gamma)$ и удовлетворяющие линейному соотношению

$$(\mathrm{Z}'\psi)(t) := \psi^-(t) - G_1(t)\psi^+(t) - \overline{G_2 \psi^+(t)} = 0, \quad t \in \Gamma. \tag{3}$$

При $F = 0$ задача (1), (2) была исследована в [3]. В [4] понятие Λ_0-поведения, введенное в [2] для дифференциалов класса C^1 и функций класса C^2, было обобщено на случай произвольных линейных дифференциалов, квадратично интегрируемых по некоторой окрестности V идеальной границы поверхности R, а также для функций с конечным интегралом Дирихле по V. Это позволило провести полное исследование уравнения $\overline{\partial} f = F$, $F \in L_2^{0,1}(R)$, в классе функций с Λ_0-поведением (частный случай задачи (1), (2) при $D = 1$, $G_1 = 1$, $G_2 = 0$, $g = 0$).

3. Рассмотрим сначала задачу (1), (2) в случае, когда $D = 1/q_0$. В [4] было показано, что функция

$$\mathrm{T}F(q) = \frac{1}{2\pi i} \iint_R h_1(p,q) \wedge F(p) + h_2(p,q) \wedge \overline{F(p)}$$

является однозначной в $R' := R \setminus \cup_{\nu=1}^{2h} D_\nu$ ветвью многозначной функции

$$\widetilde{\mathrm{T}}F(q) = \frac{1}{2\pi i} \iint_R H_1(p,q) \wedge F(p) + H_2(p,q) \wedge \overline{F(p)},$$

удовлетворяющей на R уравнению $\overline{\partial} w = F$ и имеющей Λ_0-поведение в окрестности идеальной границы поверхности R (сама функция $\mathrm{T}F$ на канонических циклах D_ν имеет скачки и потому удовлетворяет уравнению $\overline{\partial} w = F$ лишь в области R'; поэтому задача (1), (2) не сводится к случаю $F = 0$ простой заменой $f_1 = f - \mathrm{T}F$, ибо f_1 будет иметь линии разрыва не только на Γ, но и на, вообще говоря, счетном множестве циклов D_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, 2h$, $h \leq \infty$). Поскольку дифференциал F локально интегрируем со степенью $p > 2$, то эта многозначная функция $\widetilde{\mathrm{T}}F(q)$ является локально гёльдеровской с показателем $1 - 2/p$ ([5], теорема 1.19). Характер многозначности функции $\widetilde{\mathrm{T}}F(q)$ определяется равенствами

$$\int_{D_\nu} \mathrm{d}\widetilde{\mathrm{T}}F(q) = \mathrm{i}\gamma_\nu \operatorname{Im} \iint_R F \wedge \varphi'_\nu. \tag{4}$$

Положим

$$f(q) = TF(q) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h_1(p,q)u(p) + h_2(p,q)\overline{u(p)}, \tag{5}$$

где $u \in H_{1-2/p}(\Gamma)$. Тогда задача (1), (2) сводится к системе интегральных уравнений

$$\mathrm{K}u = g - \mathrm{ZT}F, \tag{6}$$

$$\mathrm{Re} \int_\Gamma u \mathrm{i}\varphi'_\nu = (F, \mathrm{i}\varphi'_\nu), \quad \nu = 1, \dots, 2h, \tag{7}$$

где

$$(\mathrm{K}u)(t) := \frac{1+G_1(t)}{2}u(t) + \frac{G_2(t)}{2}\overline{u(t)} + \frac{1-G_1(t)}{2\pi i} \int_\Gamma \left(u(\tau)h_1(\tau,t) + \overline{u(\tau)}h_2(\tau,t)\right) + \\ + \frac{G_2(t)}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\overline{u(\tau)h_1(\tau,t)} + u(\tau)\overline{h_2(\tau,t)}\right).$$

Взаимно однозначное соответствие между решениями задачи (1), (2) и системы уравнений (6), (7) определяется равенствами $u(t) = f^+(t) - f^-(t)$, $t \in \Gamma$, и (5).

Положим

$$(\mathrm{K}'\theta)(t) := \frac{1+G_1(t)}{2}\theta(t) + \frac{1}{2}\overline{G_2(t)\theta(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(h_1(t,\tau)[1-G_1(\tau)]\theta(\tau) - \overline{h_2(t,\tau)[1-G_1(\tau)]\theta(\tau)}\right) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(h_1(t,\tau)\overline{G_2(\tau)\theta(\tau)} - \overline{h_2(t,\tau)}G_2(\tau)\theta(\tau)\right).$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости системы уравнений (5), (6) (а значит, и задачи (1), (2)) имеет вид ([3], лемма 1)

$$\mathrm{Re} \int_\Gamma (g - \mathrm{ZT}F)\theta = \sum_{\nu=1}^{2h} (F, \mathrm{i}\varphi'_\nu) g_\nu, \tag{8}$$

где θ — произвольное решение уравнения

$$\mathrm{K}'\theta = \mathrm{i} \sum_{\nu=1}^{2h} g_\nu \varphi'_\nu, \tag{9}$$

g_ν — произвольные действительные числа такие, что ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{2h} g_\nu \varphi'_\nu$ сходится в пространстве $L_2^{(1)}(R)$. Взаимно однозначное соответствие между решениями союзной задачи (3) и уравнения (8) устанавливается с помощью соотношений $\theta(t) = \psi^+(t)$ и

$$\psi(p) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_\Gamma \left[h_1(p,q)\left((1-G_1(q))\theta(q) - \overline{G_2(q)\theta(q)}\right) - \overline{h_2(p,q)}\left((1-\overline{G_1(q)})\overline{\theta(q)} - G_2(q)\theta(q)\right)\right] + \\ + \mathrm{i} \sum_{\nu=1}^{2h} g_\nu \varphi'_\nu(p).$$

Докажем теперь следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Условие разрешимости* (8) *эквивалентно условию*

$$(F, \psi) = \mathrm{Re} \int_\Gamma g\psi^+ = 0, \tag{10}$$

где ψ — произвольное решение союзной краевой задачи (3).

Доказательство. В силу равенства $\theta = \psi^+$ для доказательства (10) достаточно установить соотношение

$$\operatorname{Re}\int_\Gamma \psi^+ \mathrm{ZT}F + \sum_{\nu=1}^{2h}(F, \mathrm{i}\varphi'_\nu)g_\nu = (F,\psi) \tag{11}$$

для любого решения ψ союзной задачи сопряжения (3).

Положим

$$\psi_0(p) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_\Gamma \big[h_1(p,q)\big((1-G_1(q))\theta(q) - \overline{G_2(q)\theta(q)}\big) - \\ - \overline{h_2(p,q)}\big((1-\overline{G_1(q)})\overline{\theta(q)} - G_2(q)\theta(q)\big)\big] = \psi(p) - \mathrm{i}\sum_{\nu=1}^{2h} g_\nu\varphi'_\nu(p), \tag{12}$$

где $\theta = \psi^+$ — произвольное решение уравнения (9), ψ — соответствующее решение краевой задачи (3). Используя формулы для периодов нормированных абелевых дифференциалов третьего рода ω'_{gg_0} и σ'_{qq_0} [3]

$$\int_{D_\nu}\omega'_{qq_0} = -2\pi\mathrm{i}\overline{\gamma}_\nu \operatorname{Re}\int_{q_0}^q \varphi_\nu, \quad \int_{D_\nu}\sigma'_{qq_0} = 2\pi\mathrm{i}\overline{\gamma}_\nu \operatorname{Im}\int_{q_0}^q \varphi_\nu,$$

получим

$$\int_{D_\nu}\psi_0 = \overline{\gamma}_\nu \operatorname{Re}\int_\Gamma \psi^+(q)\int_{q_0}^q \varphi_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots,2h. \tag{13}$$

С учетом (12) соотношение (11) перепишем в виде

$$(F,\psi_0) = \operatorname{Re}\int_\Gamma \psi^+\mathrm{ZT}F.$$

Обозначим через R_ε область, получаемую из R удалением ε-окрестности точки $\operatorname{supp} D = \{q_0\}$, $R'_\varepsilon := R' \cap R_\varepsilon$. Тогда

$$(F,\psi_0) = \operatorname{Re}\iint_R F\wedge\psi_0 = \\ = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}\iint_{R_n\cap R'_\varepsilon\setminus\Gamma} F\wedge\psi_0 = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}\iint_{R_n\cap R'_\varepsilon\setminus\Gamma}\overline{\partial}(\psi_0\mathrm{T}F) = \\ = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}\iint_{R_n\cap R'_\varepsilon\setminus\Gamma}\mathrm{d}(\psi_0\mathrm{T}F) = \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}\int_{\partial(R_n\cap R'_\varepsilon\setminus\Gamma)}\psi_0\mathrm{T}F = \\ = \operatorname{Re}\int_{\partial(R\setminus\Gamma)}\psi_0\mathrm{T}F + \lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\int_{R_n\cap\partial R'}\psi_0\mathrm{T}F + \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Re}\int_{\partial R_\varepsilon}\psi_0\mathrm{T}F + \lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\int_{\partial R_n}\psi_0\mathrm{T}F.$$

В силу (4) и (13) второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю. Третье слагаемое равно нулю, поскольку функция $\mathrm{T}F$ исчезает в точке q_0 и удовлетворяет условию Гёльдера в ее окрестности. Четвертое слагаемое равно нулю в силу ([4], предложение 6 и теорема 1). Поэтому, используя формулы Сохоцкого, получим

$$(F,\psi_0) = \operatorname{Re}\int_{\partial(R\setminus\Gamma)}\psi_0\mathrm{T}F = \operatorname{Re}\int_\Gamma[(1-G_1)\psi^+ - \overline{G_2\psi^+}\,]\mathrm{T}F = \\ = \operatorname{Re}\int_\Gamma[(1-G_1)\psi^+\mathrm{T}F - G_2\psi^+\overline{\mathrm{T}F}\,] = \operatorname{Re}\int_\Gamma\psi^+\mathrm{ZT}F.$$

Отсюда вытекает равенство (11) и вместе с ним утверждение леммы. □

Согласно лемме 2 из [3] индекс задачи (1), (2) при $D = 1/q_0$ равен $2\,\mathrm{ind}\,G_1 - 2h$.

4. Пусть теперь D — произвольный дивизор. Введем новую неизвестную функцию $f_1 = m_0 f$. Тогда $\overline{\partial} f_1 = m_0 F \in L_2^{0,1}(R)$ на $R \setminus (\Gamma \cup \partial R_0)$, на Γ функция f_1 удовлетворяет краевому условию

$$f_1^+(t) = G_1(t) f_1^-(t) + \bigl(m_0(t)/\overline{m_0(t)}\bigr) G_2(t) \overline{f_1^-(t)} + m_0(t) g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{14}$$

на ∂R_0 — краевому условию

$$f_1^+(t) = m_0(t) f_1^-(t), \quad t \in \partial R_0. \tag{15}$$

Таким образом, функция f_1 является решением задачи сопряжения вида (1), (2) с $D = 1/q_0$ и с условиями сопряжения (14), (15) на контуре $\Gamma \cup \partial R_0$. Ясно, что между решениями f_1 этой задачи и решениями f исходной задачи (1), (2) существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому из полученных выше результатов вытекает

Теорема. *Для разрешимости задачи* (1), (2) *необходимо и достаточно, чтобы F и g удовлетворяли условию*

$$\mathrm{Re} \iint_R F \wedge \psi - \mathrm{Re} \int_\Gamma g \psi^+ = 0,$$

где ψ — произвольное решение союзной задачи сопряжения (3). *Индекс задачи* (1), (2) *равен* $2\,\mathrm{ind}\,G_1 + 2\,\mathrm{ord}\,D - 2h + 2$.

Литература

1. Ahlfors L.V., Sario L. *Riemann surfaces.* – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, London, Oxford Univ. Press, 1960. – 382 p.
2. Shiba M. *Some general properties of behavior spaces of harmonic semiexact differentials on an open Riemann surface* // Hiroshima Math. J. – 1978. – V. 8. – № 1. – P. 151–164.
3. Бикчантаев И.А. *Аналоги ядра Коши на римановой поверхности и некоторые их приложения* // Матем. сб. – 1980. – Т. 112. – № 2. – С. 256–282.
4. Бикчантаев И.А. *Интегральные операторы И.Н. Векуа на римановой поверхности* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69. – № 1. – С. 18–30.
5. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 509 с.

Казанский государственный университет

Поступила 28.02.2001