И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 517.972.2:519.853

Л.Д. ПОПОВ

ОБ ОДНОЭТАПНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассматриваются конечномерные лексикографические вариационные неравенства и важные в прикладном отношении лексикографические задачи о седловой точке, возникающие в теории двойственности для несобственных задач линейного программирования. Для их решения развивается единый подход, в основе которого лежат идеи метода скаляризации векторного критерия в классической задаче лексикографической оптимизации.

1. Постановка задачи

Пусть X — непустое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, $T : X \to 2^{\mathbf{R}^n}$ — некоторое точечно-множественное отображение, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение векторов. Решением вариационного неравенства $VI(X,T)$ называется вектор $x^* \in X$ такой, что при некотором $t^* \in T(x^*)$ выполняются неравенства

$$(t^*, x^* - x) \le 0 \ \ \forall x \in X.$$

Будем предполагать множество X выпуклым и замкнутым, а отображение T — монотонным на X, т.е.

$$(t' - t'', x' - x'') \ge 0 \ \ \forall x', x'' \in X, \ \ t' \in T(x'), \ \ t'' \in T(x'').$$

Монотонные вариационные неравенства являются удобным инструментом для единообразной формулировки и разработки унифицированных методов разрешения целого ряда вопросов, связанных с задачами выпуклой оптимизации, в частности, с задачами линейного и выпуклого программирования, отыскания седловых точек выпукло-вогнутых функций, с задачами поиска равновесия и теории игр [1]–[3].

В данной работе рассматривается задача решения *лексикографического* (многоэтапного) вариационного неравенства в следующей постановке. Пусть имеется конечный набор точечно-множественных отображений $T_0, T_1, \dots, T_m$, заданных на множестве X. Требуется найти элемент из множества X_m, последнего в следующем рекурсивном ряду множеств

$$X_i = \operatorname{Arg} VI(X_{i-1}, T_i), \quad i = 0, 1, \dots, m; \tag{1}$$

здесь $\operatorname{Arg} VI(\cdot,\cdot)$ — множество решений соответствующего вариационного неравенства, $X_{-1} = X$.

Лексикографические вариационные неравенства возникают как естественное обобщение классических задач лексикографической (последовательной) оптимизации [4], [5], а также как обобщение аппарата, развитого разными авторами при анализе обычных оптимизационных задач с ограничениями в форме вариационных неравенств [6], в задачах поиска аппроксимационных корней монотонных отображений [7], в задачах оптимальной коррекции неразрешимых (несобственных) минимаксных задач [8] и ряде других. Как самостоятельный объект, двухэтапное вариационное неравенство рассматривалось в [9]. Первые обобщения на случай произвольного числа отображений содержатся, по-видимому, в [10], [11], причем в последней работе можно

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00116 и 96-15-96247).

найти и альтернативные подходы к общему определению решения векторного вариационного неравенства (например, в духе паретовской оптимизации).

2. Свертка отображений и теоремы о сходимости

Рассмотрим вопросы сведения задачи решения лексикографического вариационного неравенства к решению обычного вариационного неравенства с отображением, определяемым путем свертки отображений $T_0, T_1, \dots, T_m$. Пусть $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ — набор положительных весовых коэффициентов. Определим отображение $T^{\lambda} : X \to 2^{\mathbf{R}^n}$ по правилу

$$T^{\lambda}(x) = T_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T_i(x). \tag{2}$$

Введем условия

A1. Множество X не пусто, выпукло и замкнуто.

A2. Отображения $T_0, T_1, \dots, T_m$ монотонны и ограничены на любом компакте из X.

Предположим далее, что значения весовых коэффициентов в (2) зависят от некоторого натурального параметра k. Выпишем условия

A3. $\lambda_i^k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0$ $(i = 1, \dots, m)$.

A4. $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{i+1}^k / \lambda_i^k = 0$ $(i = 1, \dots, m-1)$.

Введем также условие регулярности для промежуточных подзадач

A5. $\rho(x, X_i) \le C_i(t, x - P_i(x))$ при всех $i < m$, $t \in T_i(x)$ и $x \in X_{i-1}$.

Здесь $P_i(x)$ — проекция точки x на множество X_i, $C_i > 0$ — некоторые константы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A1–A5 *и последовательность x^k, составленная из решений задач $VI(X, T^{\lambda^k})$, ограничена. Тогда ее элементы при всех достаточно больших k будут решением задачи* (1).

Доказательство. Вначале покажем, что $x^k \in X_0$ при всех достаточно больших k. Действительно, по способу определения точек x^k для некоторых $t_i^k \in T_i(x^k)$, $i = 0, \dots, m$, имеем

$$\left(t_0^k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k t_i^k, x^k - x \right) \le 0 \quad \forall k \ \forall x \in X. \tag{3}$$

Отсюда в силу условия A5 следует

$$\rho(x^k, X_0) \le C_0(t_0^k, x^k - P_0(x^k)) \le C_0 \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k (t_i^k, P_0(x^k) - x^k) \le C_0 \sum_{i=1}^{m} \max_i \{\lambda_i^k\} \|t_i^k\| \rho(x^k, X_0) \ \ \forall k.$$

Поэтому

$$(1 - \mu_k^{(1)}) \rho(x^k, X_0) \le 0, \quad \text{где} \quad \mu_k^{(1)} = C_0 \max_i \{\lambda_i^k\} \sum_{i=1}^{m} \|t_i^k\| \to 0 \quad \text{при} \ \ k \to \infty.$$

При достаточно больших k имеем $\mu_k^{(1)} < 1$, т. е. $\rho(x^k, X_0) = 0$.

Далее, по индукции, предполагая установленным включение $x^k \in X_i$ при всех достаточно больших k, для $i = 0, 1, \dots, n-1 < m$, покажем, что при больших k это включение верно также и для $i = n$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $n < m$. В силу формул (3) и условия А4 и ввиду монотонности рассматриваемых отображений имеем

$$\lambda_n^k \rho(x^k, X_n) \le \lambda_n^k C_n(t_n^k, x^k - P_n(x^k)) \le$$
$$\le C_n \Big[(t_0^k, P_n(x^k) - x^k) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^k \, (t_i^k, P_n(x^k) - x^k) + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i^k \, (t_i^k, P_n(x^k) - x^k) \Big] \le$$
$$\le C_n \Big[(\widehat{t}_0^k, P_n(x^k) - x^k) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^k \, (\widehat{t}_i^k, P_n(x^k) - x^k) + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i^k \, (t_i^k, P_n(x^k) - x^k) \Big] \le$$
$$\le C_n \sum_{i=n+1}^{m} \max_{i>n} \{\lambda_i^k\} \, \|t_i^k\| \, \rho(x^k, X_n),$$

где $\widehat{t}_i^k \in T_i(P_n(x^k))$ выбраны так, что $(\widehat{t}_i^k, P_n(x^k) - x^k) \le 0$ (этот выбор возможен в силу включений $P_n(x^k) \in \operatorname{Arg} VI(X_{i-1}, T_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n$). Из полученного неравенства следует

$$(1 - \mu_k^{(n)}) \rho(x^k, X_n) \le 0, \quad \text{где} \quad \mu_k^{(n)} = C_n \max_{i>n} \{\lambda_i^k / \lambda_n^k\} \sum_{i=n+1}^{m} \|t_i^k\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому при достаточно больших k имеем $\mu_k^{(n)} < 1$, т. е. $\rho(x^k, X_n) = 0$.

2) Пусть $n = m$. Как и выше, из формул (3) при достаточно больших k следует

$$\lambda_m^k (t_m^k, x^k - x) \le (t_0^k, x - x^k) + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^k (t_i^k, x - x^k) \le$$
$$\le (\widehat{t}_0, x - x^k) + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^k (\widehat{t}_i, x - x^k) \le 0 \quad \forall x \in X_{m-1};$$

здесь $\widehat{t}_i \in T_i(x)$ выбраны так, что $(\widehat{t}_i, x - x^k) \le 0$ (снова учтена монотонность всех отображений и последовательная вложенность множеств X_i друг в друга). $\square$

Приведем пример простых условий, при которых решения задач $VI(X, T^\lambda)$ существуют и ограничены при малых λ в совокупности,

А6. Отображения $T_0, T_1, \ldots, T_m$ однозначны и непрерывны на X.

А7. Существует точка $x^0 \in X$ и окружающий[1] ее компакт D такие, что при всех $x \in D \cap X$ выполняется неравенство $(T_0(x), x - x^0) > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* А1, А2 *и* А6, А7. *Тогда при всех достаточно малых (по норме) $\lambda > 0$ задачи $VI(X, T^\lambda)$ разрешимы и их решения ограничены в совокупности.*

Доказательство. Для обоснования разрешимости задачи $VI(X, T^\lambda)$ покажем, что для всех достаточно малых λ существует ограниченное множество $M(\lambda)$, обладающее свойством: для любой точки $x \in X \setminus M(\lambda)$ найдется точка $y \in M(\lambda)$ со свойством $(T^\lambda(x), x - y) > 0$ (см. [12], достаточные условия существования решения монотонного вариационного неравенства с непустым выпуклым замкнутым исходным множеством X и с непрерывным оператором, каковым при сделанных предположениях является T^λ).

В самом деле, мы можем взять $M(\lambda) = M = \operatorname{conv} D$ и $y = x^0$. Выполнимость неравенства $(T^\lambda(x), x - x^0) > 0$ для всех $x \in X \setminus M$ следует из монотонности T^λ и того, что это неравенство при достаточно малых $\lambda > 0$ выполняется для любой точки из D, в том числе точки, принадлежащей

[1]Множество D окружает точку x^0, если для любого l существует $\lambda = \lambda(l) > 0$ такое, что $x^0 + \lambda l \in D$ (простейшим примером окружающего множества является сфера $\{x : \|x - x^0\| = r\}$ с центром в точке x^0 и радиусом $r > 0$).

отрезку, соединяющему x^0 и x. Действительно, пусть z — такая точка. Тогда при некоторых $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ имеем $x - x^0 = \mu_1(x - z) = \mu_2(z - x^0)$, и потому

$$(T^\lambda(x), x - x^0) = \mu_1(T^\lambda(x), x - z) \geq \mu_1(T^\lambda(z), x - z) = \mu_2(T^\lambda(z), z - x^0) > 0.$$

Ограниченность множеств решений вытекает из того, что все они лежат в M, а M в нашем случае не зависит от λ. $\square$

Замечание. В [9] при анализе двухуровневых вариационных неравенств обоснование разрешимости и совокупной ограниченности решений $VI(X, T_0 + \lambda T_1)$ при малых λ опиралось на предположение о существовании точки $x^0 \in X$ такой, что $T_0 x^0 \in \operatorname{int}(O^+X)$. Это предположение влечет используемое нами условие A7. Действительно, как показано в [9], при его выполнении множество $G^0 = \{x \in X : (T_0(x^0),\ x - x^0) \leq 0\}$ ограничено и $(T_0(x), x - x^0) > 0$ при всех $x \in X \setminus G^0$. Следовательно, в условии A7 в качестве искомого компакта D, окружающего точку x^0, можно взять сферу $S = \{x : \|x - x^0\| = r\}$ достаточно большого радиуса с тем, чтобы G^0 оказалось лежащим в $\operatorname{conv} S$.

3. Вопросы двойственности для несобственных задач ЛП

3.1. Несобственные задачи ЛП и схемы Еремина

В качестве важного теоретического приложения развиваемого подхода остановимся на выяснении аппроксимационных свойств новых схем формирования двойственности для несобственных (неразрешимых в обычном смысле из-за противоречивости своих систем ограничений) задач линейного программирования (ЛП), предложенных И.И. Ереминым в работах [13], [14] и других. А именно, выпишем классическую пару двойственных задач ЛП

$$\max\{\,(c,\,x) : Ax \leq b,\ x \geq 0\,\}, \tag{4}$$

$$\min\{\,(b,\,y) : A^\top y \geq c,\ y \geq 0\,\}. \tag{5}$$

Согласно новым схемам формирования двойственности этим задачам ставятся в соответствие следующие задачи выпуклого программирования (ВП):

$$\max\left\{(c,\,x) - \sum_{j=1}^{m} R_j \|(A_j x - b_j)^+\|_j : \|x_i\|^*_{m+i} \leq r_i\ (i = 1, \ldots, n),\ A_0 x \leq b_0,\ x \geq 0\right\}, \tag{6}$$

$$\min\left\{(b,\,y) + \sum_{i=1}^{n} r_i \|(c_i - B_i^\top y)^+\|_{m+i} : \|y_j\|^*_j \leq R_j\ (j = 1, \ldots, m),\ B_0^\top y \geq c_0,\ y \geq 0\right\}. \tag{7}$$

Здесь $A = [B_0 B_1 \ldots B_n] = [A_0^\top A_1^\top \ldots A_m^\top]^\top$ — произвольное разбиение матрицы A соответственно на вертикальные и горизонтальные полосы (некоторые из них могут быть пустыми), $c^\top = [c_0^\top c_1^\top \ldots c_n^\top]$, $b^\top = [b_0^\top b_1^\top \ldots b_m^\top]$, $x^\top = [x_0^\top x_1^\top \ldots x_n^\top]$, $y^\top = [y_0^\top y_1^\top \ldots y_m^\top]$ — индуцированное предыдущим разбиением[1] разбиение векторов c, b, x и y на подвекторы меньшей размерности, $R_j > 0$ и $r_i > 0$ — числовые параметры ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), $\|\cdot\|_k$, $\|\cdot\|^*_k$ — произвольные взаимосопряженные монотонные векторные нормы в пространствах соответствующей размерности ($k = 1, \ldots, m + n$), $(\,\cdot\,)^+$ — оператор проектирования на неотрицательный ортант.

При весьма слабых предположениях ([14], с. 51, теорема 6.2) эти задачи (вне зависимости от разрешимости или неразрешимости исходных задач) находятся в отношении совершенной

[1] Поскольку размерности полос и подвекторов нигде ниже не играют самостоятельной роли, мы не вводим для них специальных обозначений, оговаривая лишь их согласованность для выполнимости всех векторно-матричных операций в конструкциях (6), (7).

двойственности, а именно, они одновременно разрешимы и их оптимальные значения совпадают. Их оптимальные векторы $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ являются решениями задач ([14], с. 71, теорема 9.1)

$$\max \left\{ (c_0, x_0) + \sum_{i=1}^{n}(c_i - p_i, x_i) : A_j x \le b_j + q_j \ (j = 1, \ldots, m),\ A_0 x \le b_0,\ x \ge 0 \right\}, \tag{8}$$

$$\min \left\{ (b_0, y_0) + \sum_{j=1}^{m}(b_j + q_j, y_j) : B_i^\top y \ge c_i - p_i \ (i = 1, \ldots, n),\ B_0^\top y \ge c_0,\ y \ge 0 \right\}, \tag{9}$$

получаемых из исходных путем симметричной коррекции их ограничений и целевых функций, если положить

$$p_i = \widetilde{p}_i = (c_i - B_i^\top \widetilde{y})^+, \quad q_j = \widetilde{q}_j = (A_j \widetilde{x} - b_j)^+. \tag{10}$$

Последние играют роль аппроксимирующих постановок для исходной пары задач (4), (5).

Большое значение имеет обоснование *минимальности* в том или ином смысле найденных значений параметров коррекции $\widetilde{p} = [\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n]$ и $\widetilde{q} = [\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_m]$. В частности, представляют интерес условия, при которых эти векторы дают точное или асимптотическое решение следующих лексикографических оптимизационных задач:

1) найти элемент $\widetilde{p}$ множества P_n, где $P_i = \operatorname{Arg} \min\limits_{p \in P_{i-1}} \|p_i\|_{m+i}$, $i = 1, \ldots, n$,
2) найти элемент $\widetilde{q}$ множества Q_m, где $Q_j = \operatorname{Arg} \min\limits_{q \in Q_{j-1}} \|q_j\|_j$, $j = 1, \ldots, m$;

здесь

$$P_0 = \{p = [p_1, \ldots, p_n] \ge 0 : \text{ ограничения в (9) совместны}\},$$
$$Q_0 = \{q = [q_1, \ldots, q_m] \ge 0 : \text{ ограничения в (8) совместны}\}.$$

С содержательной стороны задачи 1), 2) описывают следующий способ развязки “узких” мест в системах ограничений (4), (5). Неравенства обеих систем разбиваются на директивные (обязательные для выполнения) и факультативные (правые части которых разрешается корректировать). В нашем разбиении матрицы A на вертикальные и горизонтальные полосы директивным ограничениям соответствуют подматрицы A_0, B_0, а факультативным — все остальные. Последние делятся на группы по степени важности (важность падает с ростом номера соответствующей подматрицы). В процессе развязки “узких” мест мы стремимся в первую очередь минимизировать изменения, вносимые в наиболее важные из факультативных ограничений, и лишь затем переходить к корректировке менее важных ограничений.

В работах [13], [14] упомянутые выше условия (при которых $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ дают точное решение задач 1), 2)) получены для несобственных задач ЛП 1-го рода.[1] В уже упоминавшейся работе [8] при $m = n = 1$ исследован случай несобственности 3-го рода. Ниже для произвольного рода несобственности и произвольных $m, n \ge 1$ будет показано для кусочно-линейных норм, что векторы $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ при достаточно больших и специальным образом выбранных весах $R_j > 0$, $r_i > 0$ являются точными решениями задач 1), 2). Более того, приведенному факту будет дано существенное уточнение.

[1]Задача ЛП называется несобственной 1-го рода, если несовместна ее система ограничений, несобственной 2-го рода, если несовместна система ограничений двойственной задачи, и несобственной 3-го рода, если несовместны обе эти системы одновременно.

3.2. Предварительные результаты

Остановимся вначале на связи задач 1) и 2) со следующими двумя одноэтапными задачами минимизации взвешенного критерия

$$\min\Big\{\sum_{i=1}^{n} r_i' \, \|p_i\|_{m+i} : p = [p_1, \ldots, p_n] \in P_0\Big\} \ (= E_1), \tag{11}$$

$$\min\Big\{\sum_{j=1}^{m} R_j' \, \|q_j\|_j : q = [q_1, \ldots, q_m] \in Q_0\Big\} \ (= E_2). \tag{12}$$

Введем условия

B1. Множества P_0, Q_0 не пусты.

B2. Все нормы $\|\cdot\|_i$ монотонны и кусочно-линейны, т. е. $\|a\|_i = \max\limits_{j\in J_i}(e_{ji},\, a)$, где $\{e_{ji}\}_{i=1,\ldots,m+n}^{j\in J_i}$ — некоторый конечный набор векторов, определяющих линейные функции в пространствах соответствующей размерности.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* B1, B2. *Тогда существуют такие значения параметров* $r_i' > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и* $R_j' > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, *при которых задачи* (11), (12) *эквивалентны соответственно задачам* 1), 2).

Технологии выбора подходящих $r_i' > 0$, $R_j' > 0$, обеспечивающих эквивалентность задач (11), (12) задачам 1), 2), хорошо известны (напр., [4], [5]). Опишем одну из них применительно к паре задач 1) и (11). Следуя [4], введем функции

$$f_{i+1}(p; \alpha_1, \ldots, \alpha_i) = \|p_{i+1}\|_{m+i+1} + \alpha_i f_i(p; \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

полагая $f_1(p) = \|p_1\|_{m+1}$. Запишем последовательность задач

$$(\widetilde{f}_i =) \min\{\, f_i(p; \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) : p = [p_1, \ldots, p_n] \in P_0 \,\}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Числа r_i' и α_i свяжем соотношениями $r_i' = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда задача (11) эквивалентна задаче (13) при $i = n$.

Выполним индуктивно шаги

1) Если $\alpha_1 > \gamma_1' \geq 0$, где γ_1' — двойственная оценка неравенства $f_1(p) \leq \widetilde{f}_1$ в задаче

$$\min\{\, \|p_2\|_{m+2} : p \in P_0,\ f_1(p) \leq \widetilde{f}_1 \,\},$$

то $\operatorname{Arg}\min\limits_{p\in P_0} f_2(p) = P_2$.

2) Если выбор $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, t-2)$ уже обеспечил равенство

$$\operatorname{Arg}\min_{p\in P_0} f_s(p; \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}) = P_s$$

при всех $s = 1, \ldots, t-1 < n$, то при $\alpha_{t-1} > \gamma_t' \geq 0$, где γ_t' — двойственная оценка неравенства $f_{t-1}(p; \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-2}) \leq \widetilde{f}_{t-1}$ в задаче

$$\min\{\, \|p_t\|_{m+t} : p \in P_0,\ f_{t-1}(p; \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-2}) \leq \widetilde{f}_{t-1} \,\},$$

имеем $\operatorname{Arg}\min\limits_{p\in P_0} f_t(p; \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1}) = P_t$.

Существование необходимых двойственных оценок вытекает из разрешимости рассматриваемых задач, выпуклости и кусочной линейности всех входящих в них функций.

Вернемся к задачам (6), (7). Введем условие

B3. Совместны системы неравенств

$$A_0 x \leq b_0,\ \|x_i\|_{m+i}^* \leq r_i \ (i = 1, \ldots, n),\ x \geq 0,$$
$$B_0^\top y \geq c_0,\ \|y_j\|_j^* \leq R_j \ (j = 1, \ldots, m),\ y \geq 0.$$

Следующие два утверждения помогут связать эти задачи с задачами (11), (12), а тем самым и с задачами 1), 2).

Лемма. *Пусть выполнены условия* B2, B3. *Тогда задачи* (6), (7) *разрешимы, причем их решения* $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ *и соответствующая им пара* $(\widetilde{p}, \widetilde{q})$ *из соотношений* (10) *формируют седловую точку функции*

$$F(x,\, q; y,\, p) = (c,\, x) - (y,\, Ax - b) - \sum_{i=1}^{n}((p_i,\, x_i) - r_i\|p_i\|_{m+i}) + \sum_{j=1}^{m}((q_j,\, y_j) - R_j\|q_j\|_j)$$

относительно прямого произведения неотрицательных ортантов пространств своих переменных, т. е.

$$F(x,\, q; \widetilde{y},\, \widetilde{p}) \le F(\widetilde{x},\, \widetilde{q}; \widetilde{y},\, \widetilde{p}) \le F(\widetilde{x},\, \widetilde{q}; y,\, p) \quad \forall [x, y, p, q] \ge 0.$$

Доказательство. При сделанных нами предположениях задачи (6), (7) разрешимы (см. [13], [14]). В силу монотонности норм они могут быть переписаны в виде

$$\max \Bigg\{ (c,\, x) - \sum_{j=1}^{m} R_j\|q_j\|_j : A_0x \le b_0,\ A_jx \le b_j + q_j\ (j = 1, \ldots, m),$$

$$\|x_i\|^*_{m+i} \le r_i\ (i = 1, \ldots, n),\ [x, q] \ge 0 \Bigg\}, \tag{14}$$

$$\min \Bigg\{ (b,\, y) + \sum_{i=1}^{n} r_i\|p_i\|_{m+i} : B_0^\top y \ge c_0,\ B_i^\top y \ge c_i - p_i\ (i = 1, \ldots, n),$$

$$\|y_j\|^*_j \le R_j\ (j = 1, \ldots, m),\ [y, p] \ge 0 \Bigg\}. \tag{15}$$

В свою очередь первую из этих задач можно представить как задачу максимизации по $[x, q] \ge 0$ функции

$$\min_{[y,p]\ge 0} F(x,\, q; y,\, p) = \begin{cases} (c,\, x) - \sum\limits_{j=1}^{m} R_j\|q_j\|_j, & \text{если } A_0x \le b_0, \\ & A_jx \le b_j + q_j\ (j = 1, \ldots, m), \\ & \|x_i\|^*_{m+i} \le r_i\ (i = 1, \ldots, n); \\ -\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и вторую — как задачу минимизации по $[y, p] \ge 0$ функции

$$\max_{[x,q]\ge 0} F(x,\, q; y,\, p) = \begin{cases} (b,\, y) - \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\|p_i\|_{m+i}, & \text{если } B_0^\top y \ge c_0, \\ & B_i^\top y \ge c_i - p_i\ (i = 1, \ldots, n), \\ & \|y_j\|^*_j \le R_j\ (j = 1, \ldots, m); \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Стандартная техника подобных переходов хорошо известна. Возьмем, например, первое из выписанных соотношений. Если x и q удовлетворяют всем ограничениям задачи (14) и $y \ge 0, p \ge 0$, то $-(y,\, Ax - b) + \sum\limits_{j=1}^{m}(q_j,\, y_j) \ge 0$ и

$$r_i\|p_i\|_{m+i} - (p_i,\, x_i) \ge r_i\|p_i\|_{m+i} - \|p_i\|_{m+i}\|x_i\|^*_{m+i} \ge \|p_i\|_{m+i}(r_i - \|x_i\|^*_{m+i}) \ge 0,$$

так что

$$F(x,\, q; y,\, p) \ge (c,\, x) - \sum_{j=1}^{m} R_j\|q_j\|_j,$$

причем при $[y,p] = 0$ в последнем соотношении имеет место равенство. В противном случае можно построить последовательность $[y^t,p^t] \geq 0$, вдоль которой $F(x,\, q; y^t,\, p^t) \to -\infty$ $(t \to \infty)$. В самом деле, пусть не выполняется часть неравенств $A_0 x \leq b_0$ или $A_j x \leq b_j + q_j$ $(j = 1,\dots,m)$. Требуемая последовательность может состоять из векторов $[y^t,p^t] \geq 0$ с компонентами

$$y_0^t = t\,(A_0 x - b_0)^+, \quad y_j^t = t\,(A_j x - b_j - q_j)^+ \quad (j = 1,\dots,m), \quad p^t = 0.$$

Если нарушено одно из ограничений на нормы $\|x_{i_0}\|^*_{m+i_0} = \max\limits_{\|e\|_{m+i_0}=1} (e,\, x_{i_0}) > r_{i_0}$, то для последовательности $[y^t,p^t] \geq 0$ с компонентами $y^t = 0$, $p_i^t = 0$ $(i \neq i_0)$, $p_{i_0}^t = te$, где $e \geq 0$, $\|e\|_{m+i_0} = 1$, $(e, x_{i_0}) = \|x_{i_0}\|^*_{m+i_0}$, имеем также

$$F(x,\, q; y^t,\, p^t) = (c,\, x) - \sum_{j=1}^{m} R_j \|q_j\|_j - t(\|x_{i_0}\|^*_{m+i_0} - r_{i_0}) \to -\infty \ (t \to \infty).$$

Аналогично анализируется второе соотношение, связанное с ограничениями задачи (15). $\square$

Введем в рассмотрение $\chi(p,\, q)$ — функцию оптимального значения задач (8), (9). Она определена на множестве $P_0 \times Q_0$, кусочно-линейна и выпукла по $p \in P_0$ при любом фиксированном $q \in Q_0$, и кусочно-линейна и вогнута по $q \in Q_0$ при любом фиксированном $p \in P_0$.

Следствие. Пусть выполнены условия B2, B3. Тогда задачи (6), (7) разрешимы, причем соответствующая их решению пара $[\widetilde{p},\, \widetilde{q}]$ из соотношений (10) является седловой точкой функции

$$F^{Rr}(p,\, q) = \chi(p,\, q) + \sum_{i=1}^{n} r_i \|p_i\|_{m+i} - \sum_{j=1}^{m} R_j \|q_j\|_j$$

относительно области $P_0 \times Q_0$, т. е.

$$F^{Rr}(\widetilde{p},\, q) \leq F^{Rr}(\widetilde{p},\, \widetilde{q}) \leq F^{Rr}(p,\, \widetilde{q}) \quad \forall p \in P_0 \quad \forall q \in Q_0.$$

Доказательство. Выше было установлено, что задачи (14), (15), а значит и задачи (6), (7), реализуют седловое значение функции $F(x,\, q; y,\, p)$ относительно неотрицательных ортантов пространств своих переменных, т. е. оптимальные значения этих задач $\mathrm{opt}(14) = \mathrm{opt}(6)$ и $\mathrm{opt}(15) = \mathrm{opt}(7)$ удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned}\mathrm{opt}(6) = \mathrm{opt}(14) &= \max_{[x,q]\geq 0} \min_{[y,p]\geq 0} F(x,\, q; y,\, p) = \\ &= \min_{[y,p]\geq 0} \max_{[x,q]\geq 0} F(x,\, q; y,\, p) = \mathrm{opt}(15) = \mathrm{opt}(7).\end{aligned}$$

Но поскольку

$$F^{Rr}(p,q) = \max_{x\geq 0} \min_{y\geq 0} F(x,q;y,p) = \min_{y\geq 0} \max_{x\geq 0} F(x,p;y,q) \ \forall p \in P_0 \ \forall q \in Q_0,$$

то также

$$\begin{aligned}\mathrm{opt}(6) = \mathrm{opt}(14) &= \max_{q\in Q_0} \min_{p\in P_0} F^{Rr}(p,\, q) = \\ &= \min_{p\in P_0} \max_{q\in Q_0} F^{Rr}(p,\, q) = \mathrm{opt}(15) = \mathrm{opt}(7).\end{aligned}$$

Действительно, пусть $[\,\widetilde{x}, \widetilde{q}, \widetilde{y}, \widetilde{p}\,]$ — седловая точка функции F относительно указанных ортантов. По определению

$$F^{Rr}(\widetilde{p},\, \widetilde{q}) = F(\widetilde{x},\, \widetilde{q}; \widetilde{y},\, \widetilde{p}) \leq F(\widetilde{x},\, \widetilde{q}; y,\, p) \quad \forall y \geq 0 \quad \forall p \geq 0.$$

Отсюда

$$F^{Rr}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \leq F(\widetilde{x}, \widetilde{q}; y(\widetilde{x}, \widetilde{q}, p), p) = \min_{y\geq 0} F(\widetilde{x}, \widetilde{q}; y, p) \leq \max_{x\geq 0} \min_{y\geq 0} F(x, \widetilde{q}; y, p) = F^{Rr}(p, \widetilde{q}) \quad \forall p \in P_0.$$

Аналогично устанавливается неравенство $F^{Rr}(\widetilde{p},\, \widetilde{q}) \geq F^{Rr}(\widetilde{p},\, q)$ $\forall q \in Q_0$. $\square$

3.3. Лексикографическая коррекция

Опираясь на доказанное выше следствие, сформулируем итоговый результат, касающийся связи задач (6), (7) с задачами 1), 2).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* B1, B2. *Тогда существуют значения параметров* $r_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ *и* $R_j > 0$ $(j = 1, \dots, m)$, *при которых векторы* $\widetilde{p} = [\widetilde{p}_1, \dots, \widetilde{p}_n]$ *и* $\widetilde{q} = [\widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_m]$, *сформированные в соответствии с правилами* (10) *на основе оптимальных векторов* $\widetilde{x}$ *и* $\widetilde{y}$ *задач* (6) *и* (7), *будут решениями задач* 1), 2), *и кроме того, образуют седловую точку* $[\widetilde{q}, \widetilde{p}]$ *функции* $\chi(p,\, q)$ *относительно ограниченной области* $P_n \times Q_m$.

Доказательство. Нужные значения параметров будем искать в виде

$$r_i = \theta r'_i \ (i = 1, \dots, n), \quad R_j = \theta R'_j \ (j = 1, \dots, m), \tag{16}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный пока масштабный множитель, $r'_i > 0$ и $R'_j > 0$ — значения, обеспечивающие эквивалентность (в силу теоремы 3) задач 1), 2) и задач (11), (12), т. е. равенства

$$P_n = \left\{ p \in P_0 : \sum_{i=1}^{n} r'_i \|p_i\|_{m+i} \le E_1 \right\}, \quad Q_m = \left\{ q \in Q_0 : \sum_{j=1}^{m} R'_j \|q_j\|_j \le E_2 \right\}.$$

Для определения θ воспользуемся тем, что произвольная седловая точка $[\widetilde{p}, \widetilde{q}]$ функции оптимума $\chi(p,\, q)$ относительно области $P_n \times Q_m$[1] принадлежит в силу этих последних равенств оптимальным множествам следующих задач выпуклого кусочно-линейного программирования

$$\widetilde{p} \in \operatorname{Arg\,min} \left\{ \chi(p,\, \widetilde{q}) : p \in P_0, \ \ \sum_{i=1}^{n} r'_i \|p_i\|_{m+i} \le E_1 \right\} \ (= \widetilde{P}_n),$$

$$\widetilde{q} \in \operatorname{Arg\,max} \left\{ \chi(\widetilde{p},\, q) : q \in Q_0, \ \ \sum_{j=1}^{m} R'_j \|q_j\|_j \le E_2 \right\} \ (= \widetilde{Q}_m).$$

Выписанные задачи фактически реализуют двухэтапную оптимизацию, т. е. оптимизацию своих целевых функций на оптимальных множествах других задач, а именно, задач (11), (12). Следуя методике, изложенной в замечании к теореме 3, можно определить такое $\theta_1 > 0$, что

$$\widetilde{P}_n = \operatorname{Arg\,min} \left\{ \chi(p,\, \widetilde{q}) + \theta \sum_{i=1}^{n} r'_i \|p_i\|_{m+i} : p \in P_0 \right\} \tag{17}$$

при всех $\theta > \theta_1$, и такое $\theta_2 > 0$, что

$$\widetilde{Q}_m = \operatorname{Arg\,min} \left\{ \chi(\widetilde{p},\, q) + \theta \sum_{j=1}^{m} R'_j \|q_j\|_j : q \in Q_0 \right\} \tag{18}$$

при всех $\theta > \theta_2$. В итоге рассматриваемая седловая точка $[\widetilde{p}, \widetilde{q}]$ функции $\chi(p,\, q)$ относительно области $P_n \times Q_m$ оказалась также седловой точкой функции $F^{Rr}(p,q) = \chi(p,q) + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \|p_i\|_{m+i} - \sum\limits_{j=1}^{m} R_j \|q_j\|_j$ относительно области $P_0 \times Q_0$, если только параметры r_i, R_j определены согласно (16) и $\theta > \max\{\theta_1, \theta_2\}$.

Для окончательного определения θ обратимся к условию B1. Пусть $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ — некоторые допустимые относительно фигурирующих в этом условии систем неравенств точки. Очевидно, $\theta > \max\{\theta_1, \theta_2\}$ можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $\|\widehat{x}_i\|^*_{m+i} \le r_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $\|\widehat{y}_j\|^*_j \le R_j$ $(j = 1, \dots, m)$. Это обеспечит ниже выполнимость условия B3.

[1]Такая точка существует в силу ограниченности множеств P_n, Q_m, свойств выпуклости-вогнутости функции $\chi(p,q)$ и ее непрерывности.

Покажем, что найденные таким образом параметры (16) удовлетворяют условию доказываемой теоремы, т. е. что векторы $p^* = [p_1^*, \dots, p_n^*]$ и $q^* = [q_1^*, \dots, q_m^*]$, сформированные по правилу

$$p_i^* = (c_i - B_i^\top y^*)^+ \ \ (i = 1, \dots, n), \quad q_j^* = (A_j x^* - b_j)^+ \ \ (j = 1, \dots, m)$$

на основе произвольных решений x^* и y^* задач (6), (7), образуют седловую точку функции $\chi(p, q)$ относительно области $P_n \times Q_m$.

Действительно, в соответствии со следствием векторы p^*, q^* образуют седловую точку функции $F^{Rr}(p, q)$ относительно области $P_0 \times Q_0$, т. е.

$$F^{Rr}(p^*,\, q) \le F^{Rr}(p^*,\, q^*) \le F^{Rr}(p,\, q^*) \ \ \forall p \in P_0 \ \forall q \in Q_0. \tag{19}$$

Но поскольку вместе с точками $[\widetilde{p}, \widetilde{q}]$ и $[p^*, q^*]$ точки $[\widetilde{p}, q^*]$ и $[p^*, \widetilde{q}]$ также являются седловыми для функции $F^{Rr}(p, q)$, то

$$p^* \in \operatorname{Arg\,min} \left\{ \chi(p, \widetilde{q}) + \theta \sum_{i=1}^{n} r_i' \|p_i\|_{m+i} : p \in P_0 \right\},$$

$$q^* \in \operatorname{Arg\,min} \left\{ -\chi(\widetilde{p}, q) + \theta \sum_{j=1}^{m} R_j' \|q_j\|_j : q \in Q_0 \right\},$$

т. е. (см. соотношения (17), (18)) $p^* \in P_n$, $q^* \in Q_m$.

Для завершения доказательства остается заметить, что в силу неравенств (19) также

$$F^{Rr}(p^*,\, q) \le F^{Rr}(p^*,\, q^*) \le F^{Rr}(p,\, q^*) \ \ \forall p \in P_n \ \ \forall q \in Q_m,$$

причем суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i' \, \|p_i\|_{m+i}$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} R_j' \, \|q_j\|_j$, которые входят в определение функции $F^{Rr}(p, q)$, постоянны на множествах P_n и Q_m соответственно. Удаляя их из всех частей последнего неравенства, получаем искомое

$$\chi(p^*,\, q) \le \chi(p^*,\, q^*) \le \chi(p,\, q^*) \ \ \forall p \in P_n \ \ \forall q \in Q_m. \quad \Box$$

Доказанная теорема полностью раскрывает аппроксимационные свойства схем (6), (7) формирования двойственности для несобственных задач ЛП.

Литература

1. Aubin J.P. *Mathematical methods of game and economic theory.* – Amsterdam: North-Holland, 1979. – 619 p.
2. Cottle R.W., F.Giannessi F., Lions J.L. *Variational inequalities and complemetarity problems: theory and applications.* – New York: Wiley, 1980.
3. Harker P.T., Pang J.-S. *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications* // Mathemat. Program., – 1990. – Vol. 48. – № 2. – P. 161–220.
4. Еремин И.И. *О задачах последовательного программирования* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т. XIV. – № 1. – С. 124 – 129.
5. Федоров В.В. *Численные методы максимина.* – М.: Наука, 1979. – 280 с.
6. Harker P.T., Choi S.-C. *A penalty function approach for mathematical programs with variational inequality constraints* // Inform. Decision Technolog. – 1991. – V. 17. – № 1. – P. 41–50.
7. Попов Л.Д. *Аппроксимационные корни неразрешимых уравнений с монотонными отображениями в левой части* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С. 70–80.
8. Попов Л.Д. *Линейная коррекция несобственных минимаксных выпукло-вогнутых задач по максиминному критерию* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 9. – С. 1100–1110.
9. Калашников В.В., Калашникова Н.И. *Решение двухуровневого вариационного неравенства* // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 6. – С. 178–180.

10. Попов Л.Д. *Об одноэтапном методе решения лексикографических вариационных неравенств* // Информац. бюлл. Ассоциации матем. программир. – 1997.– № 7. – С. 184–185.
11. Коннов И.В. *О системах вариационных неравенств* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 12. – С. 79–88.
12. Eaves B.C. *On the basic theorem of complementarity* // Math. Programming. – 1971. – V. 1. – № 1. – P. 68–75.
13. Еремин И.И. *Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 256. – № 2. – С. 272–276.
14. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1983. – 336 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения Российской
Академии наук (г. Екатеринбург)

Поступила
12.05.1998