И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 519.642.7

Н.Я. ТИХОНЕНКО, Е.П. ЦЫМБАЛЮК

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

В данной работе производится обоснование проекционных методов приближенного решения исключительного случая уравнения типа свертки (УТС). В частности, рассматривается уравнение

$$\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty K_1(x-t)\varphi(t)dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 K_2(x-t)\varphi(t)dt=h(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

где $K_1(x)$, $K_2(x)$, $h(x)$ — известные функции, которые подчиним вполне определенным условиям.

Приближенному решению исключительного случая УТС посвящены работы [1]–[3], в которых устанавливаются оценки погрешности в пространстве L_2 метода приближенной факторизации решения УТС. Однако в этих работах не была установлена сходимость этого метода, также не были определены оценки скорости сходимости приближенных решений УТС к их точным решениям.

1°. *Пространства.* Пусть $x\in\mathbb{R}$ — вещественная ось; $D^+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ — верхняя полуплоскость, а $D^-=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z<0\}$ — нижняя полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Через $C^{(r)}$, где r — целое неотрицательное число, $C^{(0)}=C$, обозначим пространство r раз непрерывно дифференцируемых на сомкнутой вещественной оси $\mathbb{R}$ функций $f(x)$ с нормой $\|f(x)\|_{C^{(r)}}=\sum\limits_{k=0}^{r}\max|f^{(k)}(x)|$. Через $C_{01}^{(r)}$, $r\ge 0$, $C_{01}^{(0)}=C_{01}$, обозначим пространство функций $f(x)\in C^{(r)}$ и представимых в виде $f(x)=\frac{2i}{x+i}f_1(x)$. При этом $\|f(x)\|_{C_{01}^{(r)}}=\|f_1(x)\|_{C^{(r)}}$. Через $H_\alpha^{(r)}$, $r\ge 0$, $H_\alpha^{(0)}=H_\alpha$, обозначим пространство функций $f(x)\in C^{(r)}$, r-е производные которых удовлетворяют условию Гёльдера [4]

$$|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)|(1+|x+h|)^\alpha(1+|x|)^\alpha\le Ah^\alpha\quad\forall x\in\mathbb{R},\ \ \forall h>0,$$

где A, α — постоянные; $A>0$, $0<\alpha\le 1$. Пространства L, $L_2^{(r)}$, $r\ge 0$, $L_2^{(0)}=L_2$, имеют обычный смысл, и в пространстве L_2 введены общепринятые норма и скалярное произведение.

2°. *Аппроксимация на $\mathbb{R}$ рациональными функциями.* Пусть

$$\omega_k(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k,\quad k=0,\pm1,\dots,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Ясно, что при $k\ge 0$ функции $\omega_k(x)$ аналитичны в D^+, а при $k\le 0$ аналитичны в D^-. Согласно [5] система функций $\omega_k(x)$ ортогональна и полна в пространстве $L_{2\rho}$, $\rho(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Пусть далее

$$\psi_k(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k\frac{2i}{x+i},\quad k=0,\pm1,\dots,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Легко видеть, что при $k \geq 0$ функции $\psi_k(x)$ аналитичны в D^+, а при $k < 0$ аналитичны в D^-. На основании (2), (3) и работы [5] легко показать, что система функций $\psi_k(x)$ ортогональна и полна в пространстве L_2. При этом $\|\psi_k(x)\|_{L_2} = 2\sqrt{\pi}$.

Обозначим через Q_n оператор, который ставит в соответствие каждой функции $f(x) \in L_2$ отрезок ее ряда Фурье по системе функций (3), т. е.

$$(Q_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} f_k \psi_k(x), \tag{4}$$

где

$$f_k = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_k(x)}dx = \frac{1}{2\pi x} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^k \frac{dx}{x-i} \tag{5}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_2$ по системе функций (3). Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Справедливы оценки*

$$\|Q_n\|_{C_{01} \to L_2} = \|Q_n\|_{L_2 \to L_2} = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 2. *Если* $f(x) \in L_2^{(r)}$, $r \geq 1$, *или* $f(x) \in C_{01}^{(r)}$, *то*

$$\|f(x) - (Q_n f)(x)\|_{L_2} \leq d_1 n^{-r}.$$

Здесь и далее d_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n.

Пусть $f(x) \in C_{01}$. Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа функции $f(x)$ по системе функций (2) согласно [5] имеет вид

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k, \quad a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f(x_j) e^{-\frac{2\pi i}{2n+1}jk}, \tag{6}$$

где

$$x_j = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n+1} j, \quad j = \overline{-n, n}. \tag{7}$$

Легко показать, что $(L_n f)(x) \in C_{01}$ и

$$(L_n f)(x) = -\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \psi_k(x), \quad \gamma_k = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{k+1}.$$

Теорема 3. *Справедливы оценки*

$$\|L_n\|_{C_{01} \to C_{01}} \leq d_1 \ln n, \quad \|L_n\|_{C_{01} \to L_2} \leq 2\sqrt{2\pi}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Теорема 4. *Если* $f(x) \in C_{01}^{(r)}$, $r \geq 1$, *то*

$$\|f(x) - (L_n f)(x)\|_{C_{01}} \leq d_3 n^{-r} \ln n,$$
$$\|f(x) - (L_n f)(x)\|_{L_2} \leq d_4 n^{-r}.$$

3°. *Разрешимость уравнения* (1). Пусть $k_1(x), k_2(x) \in L$, а $h(x) \in L_2$. Тогда согласно [6] уравнение (1) эквивалентно следующей задаче Римана

$$(K\Phi)(x) \equiv [1 + K_1(x)]\Phi^+(x) - [1 + K_2(x)]\Phi^-(x) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $K_1(x)$, $K_2(x)$, $H(x)$ — преобразования Фурье [7] соответственно функций $k_1(x)$, $k_2(x)$, $h(x)$. При этом решение уравнения (1) и задачи Римана (8) связаны следующим образом

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)] e^{-ixt} dt. \tag{9}$$

Пусть $K_1(x), K_2(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $0 < \alpha \le 1$, $r \ge r_0$, где число r_0 определим ниже, и функции $1 + K_1(x)$, $1 + K_2(x)$ имеют нули соответственно в точках $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$; $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q$ на вещественной оси $\mathbb{R}$, $\alpha_0 = \infty$, $\beta_0 = \infty$, соответственно целых порядков $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p$; $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_q$. Тогда согласно [8] справедливы представления

$$1 + K_1(x) = A(x)\rho_-(x), \quad 1 + K_2(x) = B(x)\rho_+(x), \tag{10}$$

где

$$\rho_-(x) = (x-i)^{-\nu_0}\left(\frac{x-\alpha_1}{x-i}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{x-\alpha_p}{x-i}\right)^{\nu_p}, \tag{11}$$

$$\rho_+(x) = (x-i)^{-\mu_0}\left(\frac{x-\beta_1}{x-i}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\frac{x-\beta_q}{x-i}\right)^{\mu_q}, \tag{12}$$

а функции $A(x), B(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $0 < \alpha \le 1$, $r \ge r_0$; $A(x) \ne 0$, $B(x) \ne 0$, где

$$r_0 = \max\{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p;\ \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_q\}. \tag{13}$$

Тогда задачу Римана (8) можно переписать в виде

$$K\Phi \equiv (A\rho_- P + B\rho_+ Q)\Phi = H, \tag{14}$$

где $P = \frac{1}{2}(I+S)$, $Q = \frac{1}{2}(Q+S)$ — проекторы Рисса; I — единичный оператор, а S — сингулярный интеграл Коши.

Заметим, что случай $\nu_0 \ne 0$, $\mu_0 \ne 0$ соответствует случаю, когда уравнение (1) является уравнением первого рода.

Пусть $\varkappa = \operatorname{ind}[B(x)/A(x)]$. Тогда при данных предположениях относительно функций $K_1(x)$ и $K_2(x)$ при $\varkappa \ge 0$ задача Римана (8), а значит, и уравнение (1), безусловно разрешимы, если $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \ge 0$, и решение задачи принадлежит L_2. Справедлива

Лемма [9]. *Пусть функция $C(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $r \ge 0$, $\frac{3}{4} < \alpha \le 1$. Тогда коммутатор $T : L_2 \to C_{01}^{(r)}$, $r \ge 0$, компактен, где*

$$(T\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{C(t) - C(x)}{t-x}dt.$$

В дальнейшем приближенные решения уравнения (1) будем строить на основе приближенного решения задачи (8).

4°. *Метод редукции.* Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебра элементов $C(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $r \ge r_0$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, таких, что $C(x) \ne 0$ на $\mathbb{R}$, $\operatorname{ind} C(x) = 0$. Тогда согласно [6], [8] справедливы представления

$$C(x) = C_+(x)C_-(x), \quad C(x) = d_+(x)d_-(x),$$

где $C_\pm^{\pm 1}(x) \ne 0$, $d_\pm^{\pm 1}(x) \ne 0$ на $\mathbb{R}$; $C_\pm^{\pm 1}(x)$, $d_\pm^{\pm 1}(x)$ аналитичны соответственно в $D^\pm$, $C_\pm^{\pm 1}(x)$, $d_\pm^{\pm 1}(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $r \ge r_0$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, т. е. $C_\pm^{\pm 1}(x), d_\pm^{\pm 1}(x) \in \mathfrak{M}$.

Приближенное решение задачи (8) ищем в виде

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k \psi_k(x), \tag{15}$$

где функции $\psi_k(x)$ имеют вид (3). Ясно, что $\Phi_n(x) = \Phi_n^+(x) - \Phi_n^-(x)$, где

$$\Phi_n^+(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k \psi_k(x), \quad \Phi_n^-(x) = -\sum_{k=-n}^{-1} \varphi_k \psi_k(x). \tag{16}$$

Неизвестные постоянные φ_k определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} A_{jk}\varphi_k - \sum_{k=-n}^{-1} B_{jk}\varphi_k = H_j, \quad j = \overline{-n, n}, \tag{17}$$

где A_{jk}, B_{jk}, H_j — коэффициенты Фурье (5) соответственно функций $[1 + K_1(x)]\psi_k(x)$, $[1 + K_2(x)]\psi_k(x)$, $H(x)$ по системе функций (3).

Теорема 5. *Пусть* $k_1(x), k_2(x) \in L$; $K_1(x), K_2(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, $r \geq r_0$, *где число* r_0 *определено соотношением* (13); *справедливы представления* (10), *где* $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, $\operatorname{ind} A(x) = \operatorname{ind} B(x) = 0$; $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \geq r_0$. *Тогда система уравнений* (17) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *и приближенные решения* $\Phi_n(x)$ *задачи* (8) *сходятся в пространстве* L_2 *к ее точному решению* $\Phi(x)$ *со скоростью*

$$\|\Phi(x) - \Phi_n(x)\|_{L_2} \leq d_5 n^{-r}. \tag{18}$$

Доказательство. Заметим сначала, что в условиях теоремы задача (8) имеет единственное решение, принадлежащее пространству L_2. Далее будем следовать результатам главы XI работы [8]. Положим $X = Y = L_2$. Пусть P_n — оператор, который ставит в соответствие каждому элементу пространства X агрегат вида (15), (16), а оператор Q_n — оператор (4). Ясно, что эти операторы обладают свойствами $\operatorname{Im} P_n \subset X$, $\operatorname{Im} Q_n \subset Y$, $P_n^2 = P_n$, $Q_n^2 = Q_n$, $\dim \operatorname{Im} P_n = \dim \operatorname{Im} Q_n = 2n + 1$. Тогда систему (17) можно записать в виде

$$(Q_n K P_n \Phi)(x) = (Q_n H)(x). \tag{19}$$

Ясно, что в условиях теоремы оператор K непрерывно обратим. Покажем теперь, что система (19), а значит, и система (17) разрешимы при достаточно больших n, а приближенные решения задачи (8) сходятся к ее точным решениям по норме пространства X; для этого достаточно показать, что к оператору K применим [8] проекционный процесс по системе проекторов P_n и Q_n. Рассмотрим уравнение

$$B\Phi \equiv (P\rho_- + Q\rho_+)\Phi = 0,$$

где P, Q — проекторы Рисса, а $\rho_\pm(x)$ определяется по формулам (11), (12). Союзное ему уравнение является задачей Римана

$$\rho_-(x)R^+(x) = \rho_+(x)R^-(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

которая [7] имеет лишь тривиальное решение. Поэтому $\dim \ker B = 0$. Рассмотрим теперь пространства $Z = L_2$, $Z_0 = C_{01}^{(r)}$, $r \geq r_0$, и построим пространство $\overline{X} = \{\Phi(x) : \Phi(x) \in X,\ (B\Phi)(x) \in Z\}$, которое становится банаховым, если в нем ввести норму $\|\Phi(x)\|_X = \|(B\Phi)(x)\|_X$. Легко видеть, что оператор P ограничен [5] в пространстве Z, и оператор умножения элементов пространства Z_0 на элементы алгебры $\mathfrak{M}$ также является ограниченным, а потому следует включение $Z \subset \overline{X}$. Следовательно, сужение $\overline{B}$ оператора B на пространство $\overline{X}$ взаимнооднозначно и непрерывно отображает пространство $\overline{X}$ на пространство Z, т.е. $\overline{B} : \overline{X} \to Z$ непрерывно обратим [1)].

Так как $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$, $\operatorname{ind} A(x) = \operatorname{ind} B(x) = 0$, $A(x), B(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $r \geq r_0$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, то справедливы [6], [8] факторизации

$$A(x) = A_+(x)A_-(x), \quad B(x) = B_+(x)B_-(x), \tag{20}$$

[1)]Здесь и далее ниже черта над оператором означает его сужение над соответствующим пространством.

где $A_{\pm}^{\pm 1}(x) \neq 0$, $B_{\pm}^{\pm 1}(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$; $A_{\pm}^{\pm 1}(x)$, $B_{\pm}^{\pm 1}(x)$ аналитичны в $D^{\pm}$, $A_{\pm}^{\pm 1}(x), B_{\pm}^{\pm 1}(x) \in H_{\alpha}^{(r+1)}$, $r \geq r_0$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$. Пусть $E : \overline{X} \to X$ — оператор вложения. Ясно, что он ограничен. Тогда для сужения $\overline{K}$ оператора K справедливо [8] представление

$$\overline{K} = K_1 + T_1,$$

где

$$K_1 = (A_+P + B_-Q)(PA_- + QB_+)\overline{B}, \quad T_1 = (A_+QA_-\rho_-P + B_-PB_+\rho_+Q)E.$$

На основании [6] операторы $A_+P + B_-P$, $PA_- + QB_+$ обратимы, т. к. представляют собой сингулярные операторы с нулевыми индексами и отличными от нуля символами, а поэтому оператор $K_1 : \overline{X} \to Z$ обратим как произведение обратимых операторов. На основании (20) и леммы оператор $A_+QA_-\rho_-P + B_-PB_+\rho_+Q : X \to Z_0$ компактен. Поэтому оператор $T_1 : \overline{X} \to Z_0$ компактен как произведение компактного и ограниченного операторов. Пусть $X^{\pm}(x) \in \mathfrak{M}$. Тогда на основании работы [5] в силу (2) справедливы разложения

$$X^+(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^+ \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k, \quad X^-(x) = \sum_{k=-\infty}^{0} \eta_k^- \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k. \tag{21}$$

Тогда на основании представлений (21), (15) следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} P_n[PX^- + QX^+]P_n\Phi = P_n[PX^- + QX^+]\Phi_n = P_n[PX^-\Phi_n + QX^+\Phi_n] = \\ = P_n\Big[P\sum_{k=-\infty}^{0} \eta_k^- \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k\psi_k(x) + Q\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^+ \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k\psi_k(x)\Big] = \\ = P_n\Big[P\sum_{k=-\infty}^{n} A_k\psi_k(x) + Q\sum_{k=-n}^{\infty} B_k\psi_k(x)\Big] = P_n\Big[\sum_{k=0}^{n} A_k\psi_k(x) + \sum_{k=-n}^{-1} B_k\psi_k(x)\Big] = \\ = \sum_{k=0}^{n} A_k\psi_k(x) + \sum_{k=-n}^{-1} B_k\psi_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} C_k\psi_k(x). \end{aligned} \tag{22}$$

Из этой цепочки вытекает равенство $P_n[PX^- + QX^+]P_n = [PX^- + QX^+]P_n$, из которого в силу конечномерности операторов P_n следует включение $\operatorname{Im} P_n \subset B(\operatorname{Im} P_n)$. Легко видеть, что $\operatorname{Im} P_n = \operatorname{Im} Q_n \subset Z$. Тогда на основании теоремы о непрерывном графике сужение $\overline{P}_n$ оператора P_n на пространство $\overline{X}$ является непрерывным проектором в пространстве X. При этом в силу определения пространств Z и Z_0 на основании теоремы 1 оператор $Q_n : Z_0 \to Z$ является ограниченным. В качестве пространства Z_1 положим $L_2^{(r)}$, $r \geq r_0$. Тогда очевидно включение $Z_0 \subset Z_1 \subset B(Q_n)$. При этом на основании теоремы 2 $(Q_n\Phi)(x) \to \Phi(x)$ по норме пространства X для любого элемента $\Phi(x) \subset Z_1$. Рассмотрим теперь оператор $C = X^+P + X^-Q$, где $X^{\pm}(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$, $X^{\pm}(x)$ аналитичны в $D^{\pm}$, $X^{\pm}(x) \in H_{\alpha}^{(r+1)}$, $r \geq r_0$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$. По аналогии с цепочкой (22) легко проверяется равенство $Q_nCQ_n = CQ_n$. Кроме того, легко проверить, что $C(Z_1) \subset Z_1$, $C(Z_0) \subset Z_0$. Тогда на основании теоремы 1.4 главы XI работы [8] следует, что пространство Z_1 принадлежит многообразию сходимости оператора K_1 по системе проекторов $\overline{P}_n$ и Q_n. Это означает, что при достаточно больших n существуют операторы $(Q_nK_1\overline{P}_n)^{-1}$, и последовательность $x_n = (Q_nK_1\overline{P}_n)^{-1}Q_ny$ для любого $y \in Y$ сходится но норме пространства X к некоторому элементу из X, т. е. к оператору K_1 примени́м проекционный процесс по системе проекторов $\overline{P}_n$ и Q_n. Так как оператор T_1 компактен и оператор $\overline{K}$ обратим, то на основании теоремы 1.1 главы XI работы [8] следует, что к оператору $\overline{K} = K_1 + T_1$ также примени́м проекционный процесс по системе проекторов $\overline{P}_n$ и Q_n. Это означает, что система (17) разрешима при достаточно больших n. Легко видеть, что

$$y_0(x) = (A_+^{-1}P + B_-^{-1}Q)[H - T_1\Phi](x) \in L_2^{(r)}, \quad r \geq r_0.$$

Тогда на основании теоремы 2.3 главы XI работы [8] из теоремы 2 следует оценка (18). $\square$

Так как система (17) разрешима при достаточно больших n, то при таких n постоянные φ_k определяются однозначно. Тогда приближенные решения уравнения (1) строятся по формуле

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [\Phi_n^+(t) - \Phi_n^-(t)] e^{-ixt} dt, \tag{23}$$

где $\Phi_n^{\pm}(x)$ — приближенные решения задачи (8). Согласно [7], [6] приближенные решения уравнения (1) в явном виде замкнутся следующим образом

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2\pi} e^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k \sum\limits_{j=0}^{k} C_k^j \dfrac{2^j}{j\,!} (-1)^j x^j, & x > 0; \\ 2\sqrt{2\pi} e^{x} \sum\limits_{k=-n}^{-1} \varphi_k \sum\limits_{j=0}^{-1} C_{-k}^j \dfrac{2^j}{j\,!} x^j, & x < 0. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда на основании представлений (9), (23), равенства Парсеваля для интегралов Фурье [7] и теоремы 5 справедлива

Теорема 6. *Пусть функции* $k_1(x), k_2(x) \in L$; *функции* $K_1(x), K_2(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, $r \geq r_0$, *где число* r_0 *определено соотношением* (13); *справедливы представления* (10), *где* $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, $\operatorname{ind} A(x) = \operatorname{ind} B(x) = 0$, $H(x) \in L_2^{(r)}$, $r \geq r_0$. *Тогда система уравнений* (17) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения уравнения* (1) *строятся по формулам* (24), *где* φ_k — *решения системы* (17), *и сходятся в пространстве* L_2 *к его точному решению со скоростью*

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{L_2} \leq d_5 n^{-r}. \tag{25}$$

5°. *Метод коллокаций.* Приближенное решение задачи (8) ищем в виде (15), (16), а неизвестные постоянные φ_k определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} [1 + K_1(x_j)] \psi_k(x_j) \varphi_k + \sum_{k=-n}^{-1} [1 + K_2(x_j)] \psi_k(x_j) \varphi_k = H(x_j), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{26}$$

где x_j — узлы (7). Ясно, что систему (26) можно записать в виде

$$(L_n K P_n \Phi)(x) = (L_n H)(x),$$

где оператор P_n имеет прежний смысл, а оператор L_n — оператор (6). Здесь $X = L_2$, $Y = C_{01}$, $Z = L_2$, $Z_0 = C_{01}^{(r)}$, $Z_1 = L_2^{(r)}$, $r \geq r_0$. Тогда оператор L_n обладает свойством $L_n^r = L_n$. Справедлива

Теорема 7. *Пусть функции* $k_1(x), k_2(x) \in L$, *функции* $K_1(x), K_2(x) \in H_\alpha^{(r+1)}$, $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, $r \geq r_0$, *где число* r_0 *определено соотношением* (13); *справедливы представления* (10), *где* $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, $\operatorname{ind} A(x) = \operatorname{ind} B(x) = 0$; $H(x) \in C_{01}^{(r)}$, $r \geq r_0$. *Тогда система* (26) *разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения уравнения* (1) *строятся по формулам* (24), *где* φ_k — *решения системы* (26), *и сходятся в пространстве* L_2 *к его точному решению со скоростью* (25).

6°. *Уравнение Винера–Хопфа.* Если $k(x) \in L$, а $h(x) \in L_2$, $h(x) \equiv 0$ при $x < 0$, то согласно [6] уравнение Винера–Хопфа

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k(x-t) \varphi(t) dt = h(x), \quad x > 0 \tag{27}$$

эквивалентно задаче Римана

$$[1 + K(x)] \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

где $K(x)$, $H(x)$ — преобразования Фурье соответственно функций $k(x)$ и $h(x)$. При этом решение уравнения (27) выражается через решение задачи (28) следующим образом

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi^{+}(t) e^{-ixt} dt, \quad x > 0.$$

Пусть $K(x) \in H_{\alpha}^{(r+1)}$, $0 < \alpha < 1$, $r \geq r_0$, где число r_0 определим ниже, и функция $1 + K(x)$ имеет нули в точках $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ на вещественной оси $\mathbb{R}$, $\alpha_0 = \infty$, соответственно кратностей $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p$. Тогда справедливо представление $1 + K(x) = A(x)\rho_{-}(x)$, где $\rho_{-}(x)$ имеет вид (12), $A(x) \in H_{\alpha}^{(r+1)}$, $0 < \alpha < 1$, $r \geq r_0$; $A(x) \neq 0$, где $r_0 = \max\{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p\}$. Приближенные решения задачи Римана (28) ищем в виде (15), (16), а неизвестные постоянные φ_k в случае метода редукции определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} A_{jk}\varphi_k + \gamma_0 \varphi_j = H_j, \quad j = \overline{-n, n}, \tag{29}$$

где $\gamma_0 = 0$ при $j \geq 0$, $\gamma_0 = 1$ при $j \leq 0$, а A_{kj}, H_j — коэффициенты Фурье соответственно функций $[1 + K(x)]\psi_k(x)$, $H(x)$. В случае метода коллокаций неизвестные постоянные φ_k определяем из системы уравнений

$$[1 + K(x_j)] \sum_{k=0}^{n} \psi_k(x_j)\varphi_k + \sum_{k=-n}^{-1} \psi_k(x_j)\varphi_k = H(x_j), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{30}$$

где x_j — узлы (7). Приближенные решения $\varphi_n(x)$ уравнения (27) строятся по формуле

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2\pi} e^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k \sum\limits_{j=0}^{k} C_k^j \dfrac{2^j}{j\,!} (-1)^j x^j, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

По аналогии с теоремами 5–7 устанавливается разрешимость при достаточно больших n систем (29), (30) и определяются оценки скорости сходимости приближенные решений уравнения (27) к его точному решению.

Заметим также, что случай $\nu_0 \neq 0$ соответствует случаю уравнения Винера–Хопфа первого рода.

По изложенной выше схеме строятся приближенные решения исключительного случая парного уравнения

$$\begin{cases} \varphi(x) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} k_1(x - t)\varphi(t) dt = h(x), & x > 0; \\ \varphi(x) + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} k_2(x - t)\varphi(t) dt = h(x), & x < 0. \end{cases}$$

Литература

1. Черський Ю.Й. *Про наближене розв"язання рIвняння Вінера–Хопфа першого роду* // ДАН УРСР. – 1966. – № 8. – С. 992–995.
2. Черский Ю.И. *Приближенное решение уравнения Винера–Хопфа в одном исключительном случае* // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2. – № 8. – С. 1093–1100.
3. Тихоненко М.Я. *До наближеного розв"язку інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь з різницевими ядрами в узагальнених функціях* // ДАН УРСР. – 1972. – № 6. – С. 536–539.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск, 1987. – 687 с.
5. Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.

6. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.
7. Князев П.Н. *Интегральные преобразования.* Учеб. пособие. – Минск: Вышэйш. школа, 1969. – 197 с.
8. Пресдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* – М.: Мир, 1979. – 493 с.
9. Свяжина Н.Н., Тихоненко Н.Я. *Аппроксимация функций на вещественной оси и проекционные методы решения исключительного случая сингулярных интегральных уравнений.* – Одес. ун-т. – Одесса, 1995. – 69 с. – Деп. в ГНТБ Украины 16.02.95, № 383.-Ук. 95.

Одесский государственный университет (*Украина*)

Украинская государственная академия связи

Поступила
10.07.1995