ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 9 (520)

УДК 517.977

Б.Я. СОЛОН

ТОТАЛЬНЫЕ И КО-ТОТАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ ПЕРЕЧИСЛИМОСТИ

Пусть ω — множество натуральных чисел, $A, B, C, \dots, X, Y, Z \subseteq \omega$ (с индексами или без), $\overline{A} = \omega \setminus A$, $c_A(x)$ — характеристическая функция множества A: $c_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $c_A(x) = 0$, если $x \in \overline{A}$. Будем обозначать через $\langle x, y\rangle$ канторовский номер упорядоченной пары (x, y), если $z = \langle x, y\rangle$, то $\langle z\rangle_1 = x$ и $\langle z\rangle_2 = y$, а также $\langle A\rangle_1 = \{x : \exists y[\langle x, y\rangle \in A]\}$ и $\langle A\rangle_2 = \{y : \exists x[\langle x, y\rangle \in A]\}$. Как обычно, пусть D_u — конечное множество с каноническим индексом u, символ D будем использовать как переменную для конечных множеств. Для конечного множества A через $|A|$ обозначим число элементов A; $|A| < \infty$, если A — конечное множество. Тотальные функции из ω в ω обозначим f, g, h (с индексами или без). Если α — частичная функция, то через $\delta\alpha$ обозначим область определения, $\rho\alpha$ — множество значений, $\tau\alpha = \{\langle x, y\rangle : x \in \delta\alpha \,\&\, y = \alpha(x)\}$ — график функции α. Будем писать $\alpha \subseteq \beta$, если $\tau\alpha \subseteq \tau\beta$. Множество A называется *однозначным*, если $A = \tau\alpha$ для некоторой функции α. Используя терминологию из ([1], с. 39) через W_t обозначим t-е вычислимо перечислимое (в. п.) множество, $K = \{t : t \in W_t\}$ и $K_0 = \{\langle x, t\rangle : x \in W_t\}$.

Множество A *сводится по перечислимости* (или *e-сводится*) к множеству B (символически $A \leq_e B$), если существует равномерный алгоритм для получения некоторого перечисления A из любого перечисления B. Формально [2],

$$A \leq_e B \iff \exists t\, \forall x[x \in A \iff \exists u[\langle x, u\rangle \in W_t \,\&\, D_u \subseteq B]].$$

Условимся вместо $\tau\alpha \leq_e A$ писать $\alpha \leq_e A$. Обозначим через $\Phi_t : 2^\omega \to 2^\omega$ t-*й e-оператор*, такой, что для любого X

$$\Phi_t(X) = \{x : \exists u[\langle x, u\rangle \in W_t \,\&\, D_u \subseteq X]\}.$$

Таким образом, $A \leq_e B \iff \exists t[A = \Phi_t(B)]$. Хорошо известно [2], что e-операторы монотонны и непрерывны, т. е. для любого t и любых X, Y

$$X \subseteq Y \to \Phi_t(X) \subseteq \Phi_t(Y)$$

и

$$\forall x[x \in \Phi_t(X) \to (\exists D)[D \subseteq X \,\&\, x \in \Phi_t(D)]].$$

Пусть, как обычно, $A \equiv_e B \iff A \leq_e B \,\&\, B \leq_e A$, $d_e(A) = \{X : X \equiv_e A\}$ — *степень перечислимости* или *e-степень* множества A и $d_e(A) \leq d_e(B) \iff A \leq_e B$. Для обозначения e-степеней будем использовать также малые полужирные латинские буквы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ (с индексами или без). Если e-степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ несравнимы относительно $\leq$, то обозначим это через $\mathbf{a}|\mathbf{b}$, а также $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, если $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}$.

Пусть $\mathbf{D}_e$ — множество e-степеней, упорядоченное отношением $\leq$. Известно (см., напр., [3]), что $\mathbf{D}_e$ — верхняя полурешетка с наименьшим элементом $\mathbf{0}_e = d_e(\emptyset) = d_e(K)$ — не решетка, в которой наименьшая верхняя грань $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ любых двух e-степеней $\mathbf{a} = d_e(A)$ и $\mathbf{b} = d_e(B)$ равна $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = d_e(A \oplus B)$, где $A \oplus B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x + 1 : x \in B\}$. Пусть $\mathbf{D}_e(\leq \mathbf{a}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}$.

Данная работа выполнена при поддержке гранта № Е00-1.0-208, финансируемого Министерством образования и науки Российской Федерации.

Одно из определений e-скачка $\mathbf{J}(A)$ множества A приводится в [4]:

$$\mathbf{J}(A) = \tau c_{A^e} \equiv A^e \oplus \overline{A^e},$$

где $A^e = \{x : x \in \Phi_x(A)\}$. Пусть $\mathbf{0}'_e = d_e(\overline{K}) = d_e(\mathbf{J}(\emptyset))$ и $\mathbf{a}' = d_e(\mathbf{J}(A))$ для произвольной e-степени $\mathbf{a} = d_e(A)$.

e-степень называется *тотальной*, если она содержит график некоторой тотальной функции. Ясно, что e-степень $\mathbf{a}$ тотальна тогда и только тогда, когда существует множество $A \in \mathbf{a}$ такое, что $A \equiv_e A \oplus \overline{A}$. Обозначим через $\mathbf{T}$ частично упорядоченное множество тотальных e-степеней. Так как для любых A и B

$$A \leq_T B \iff A \oplus \overline{A} \leq_e B \oplus \overline{B},$$

то существует изоморфизм верхних полурешеток $\mathbf{D}_T$ и $\mathbf{T}$.

Ю.Т. Медведев в [5] доказал, что существуют нетотальные e-степени, т. е. $\mathbf{D}_e \setminus \mathbf{T} \neq \emptyset$. Он построил такую частичную функцию $\psi : \omega \to \omega$, которая не является частично вычислимой и для любой тотальной функции f, если $f \leq_e \psi$, то f — вычислимая функция. Кейс в [3] назвал e-степени, содержащие графики функций, обладающих указанным выше свойством, *квазиминимальными*. Из определения следует, что если $\mathbf{a}$ — квазиминимальная e-степень, то она нетотальная и $\mathbf{D}_e(\leq \mathbf{a}) \cap \mathbf{T} = \{\mathbf{0}_e\}$. Обозначим через $\mathbf{Q}$ множество квазиминимальных e-степеней.

В [3] показано, что e-степень $d_e(A)$ тотальна тогда и только тогда, когда по любому перечислению A можно эффективно получить некоторое фиксированное перечисление элементов этого множества A. Отождествим произвольное перечисление множества A с некоторой тотальной функцией $f : \omega \to A$, область значений которой $\rho f = A$. Пусть $\mathbf{P}(A)$ — семейство всех перечислений множества A, частично упорядоченное отношением $\leq_e$. Результат Кейса означает, что

$$d_e(A) \in \mathbf{T} \iff \mathbf{P}(A) \textit{ имеет наименьший элемент.}$$

Используя введенную терминологию, можно доказать, что для любых A и B

$$A \leq_e B \iff (\exists z)(\forall f \in \mathbf{P}(B))(\exists g \in \mathbf{P}(A))(\forall x)[g(x) = \phi_z^{\tau f}(x)],$$

где $\phi_z^{\tau f}$ — частичная функция, вычислимая на z-й машине Тьюринга с оракулом τf.

Из следующей теоремы следует, что $\mathbf{P}(A)$ для $|A| \geq 2$ имеет несчетную мощность.

Теорема 1. *Для любого A, $|A| \geq 2$, в $\mathbf{P}(A)$ существует несчетные антицепи.*

Доказательство. Ясно, что $A \leq_e f$ для любого перечисления $f \in \mathbf{P}(A)$. Из сравнения мощностей $\{f : f \leq_e A\}$ и $\{f : A \leq_e f\}$ следует, что существует некоторое $f \in \mathbf{P}(A)$ такое, что $A \leq_e f$ и $f \not\leq_e A$, т. е. $A <_e f$.

Лемма 1. *Для любой не более чем счетной совокупности $\{f_n\}_{n\in\omega}$ перечислений множества A таких, что $A <_e f_n$ для всех $n \in \omega$, существует перечисление $g \in \mathbf{P}(A)$ такое, что $g|_e f_n$ для всех $n \in \omega$.*

Доказательство. Построение функции g осуществим с помощью пошаговой конструкции. Обозначим через $g^{(t)}$ конечный начальный сегмент функции g, построенный к концу шага t и через $x_t = 1 + \max \delta g^{(t)}$. Пусть $\{a_s\}_{s\in\omega}$ — произвольное фиксированное перечисление A (возможно с повторениями). Будем предполагать, что $a_0 \neq a_1$. Начальный сегмент σ будем называть A-сегментом, если $\delta\sigma = \{0, 1, \dots, x\}$ для некоторого x, и $\rho\sigma \subseteq A$. Будем использовать символ σ как переменную для A-сегментов.

Шаг 0. Полагаем $\tau g^{(0)} = \{\langle 0, a_0\rangle\}$.

Шаг $3s + 1$. Пусть $t = 3s$, полагаем

$$\tau g^{(t+1)} = \tau g^{(t)} \cup \{\langle x_t, a_s\rangle\}.$$

Шаг $3s+2$. Пусть $t=3s+1$ и $s=\langle k,n\rangle$, проверим выполнимость условия

$$\exists\sigma[g^{(t)}\subseteq\sigma\,\&\,\Phi_k(\tau\sigma)\not\subseteq\tau f_n]. \tag{1}$$

Если условие (1) выполнено, то полагаем $g^{(t+1)}=\sigma^*$, где $\tau\sigma^*$ имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих (1). В противном случае полагаем $g^{(t+1)}=g^{(t)}$.

Шаг $3s+3$. Пусть $t=3s+2$ и $s=\langle k,n\rangle$, проверим выполнимость условия

$$\langle x_t,a_0\rangle\in\Phi_k(\tau f_n). \tag{2}$$

Если условие (2) выполнено, то полагаем $\tau g^{(t+1)}=\tau g^{(t)}\cup\{\langle x_t,a_1\rangle\}$. В противном случае полагаем $\tau g^{(t+1)}=\tau g^{(t)}\cup\{\langle x_t,a_0\rangle\}$.

Докажем, что функция $g=\bigcup\limits_{t\in\omega}g^{(t)}$ удовлетворяет лемме 1. Ясно, $\delta g=\omega$ и, благодаря шагам $3s+1$, $s\in\omega$, $\rho g=A$. Итак, $g\in\mathbf{P}(A)$. Докажем, что $f_n\not\leq_e g$ для любого $n\in\omega$. Предположим, $f_n\leq_e g$ для некоторого n, т. е. существует e-оператор Φ_k такой, что $\tau f_n=\Phi_k(\tau g)$. Рассмотрим шаг $3s+2$, где $s=\langle k,n\rangle$. Условие (1) на этом шаге не может быть выполнено, т. к. в противном случае имели бы $\Phi_k(\tau g)\supset\Phi_k(\tau\sigma^*)$ и $\Phi_k(\tau\sigma^*)\not\subseteq\tau f_n$, и поэтому $\Phi_k(\tau g)\not\subseteq\tau f_n$.

Итак, в этом случае имеем

$$\forall\sigma[g^{(t)}\subseteq\sigma\to\Phi_k(\tau\sigma)\subseteq\tau f_n].$$

Отсюда и из непрерывности e-оператора Φ_k следует, в частности, что

$$\Phi_k(\tau g^{(t)}\cup X_t\times A)\subseteq\tau f_n,$$

где $X_t=\omega\setminus\delta g^{(t)}$. Если предположить, что $\Phi_k(\tau g)=\tau f_n$, то $\Phi_k(\tau g^{(t)}\cup X_t\times A)=\tau f_n$. Так как $\tau g^{(t)}$ — конечное, а X_t — вычислимое множества, то $f_n\leq_e A$, что противоречит условию теоремы. Итак, $\Phi_k(\tau g)\neq\tau f_n$, что противоречит предположению. Следовательно, $f_n\not\leq_e g$ для всех $n\in\omega$.

Шаги $t=3s+3$, $s=\langle k,n\rangle$, $k,n\in\omega$, обеспечивают неравенство $\tau g\neq\Phi_k(\tau f_n)$ для всех k, n. Итак, существует перечисление $g\in\mathbf{P}(A)$, такое, что $g|_e f_n$ для всех n и лемма 3 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Лемма 1 обеспечивает существование в $\mathbf{P}(A)$ счетной антицепи $\{f_n\}_{n\in\omega}$, состоящей из перечислений A таких, что $A<_e f_n$ для всех n. Рассмотрим семейство всевозможных таких антицепей, частично упорядоченное отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$. По лемме Цорна в данном семействе существует максимальная антицепь, обозначим ее через $\mathbf{H}$. Предположим, что $\mathbf{H}$ — счетное множество, тогда $\mathbf{H}=\{h_s\}_{s\in\omega}\subset\mathbf{P}(A)$, где $A<_e h_s$ для всех s. При этом выполнено условие леммы 1, следовательно, существует перечисление $g\in\mathbf{P}(A)$ такое, что $g|_e h_s$ для всех s. Рассмотрим $\mathbf{H}'=\mathbf{H}\cup\{g\}$. Так как $\mathbf{H}'\supset\mathbf{H}$ и является антицепью, получено противоречие с максимальностью $\mathbf{H}$, следовательно, $\mathbf{H}$ — несчетная антицепь перечислений множества A. $\square$

Обозначим через $\mathbf{D}_e(A)$ множество e-степеней, содержащих некоторое перечисление A:

$$\mathbf{D}_e(A)=\{d_e(\tau f):f\in\mathbf{P}(A)\},$$

частично упорядоченное отношением $\leq$. Легко проверить, что $\mathbf{D}_e(A)$ — верхняя подполурешетка $\mathbf{D}_e$ для любого A. Заметим, что если $d_e(A)$ — нетотальная e-степень, то $d_e(A)\notin\mathbf{D}_e(A)$. Если $A=\emptyset$, то $\mathbf{D}_e(A)=\emptyset$, если $|A|=1$, то $\mathbf{D}_e(A)=\{\mathbf{0}_e\}$.

Обозначим через $\mathbf{T_a}=\{\mathbf{g}:\mathbf{g}\in\mathbf{T}\,\&\,\mathbf{a}\leq\mathbf{g}\}$ верхний конус в $\mathbf{T}$, порожденный e-степенью $\mathbf{a}$. Достаточно очевидно, $\mathbf{D}_e(A)=\mathbf{T_a}$ для любого A, $|A|\geq 2$. Заметим, что если A — в. п., то $\mathbf{a}=\mathbf{0}_e$ и $\mathbf{T}_{\mathbf{0}_e}=\mathbf{T}$.

Пусть $\overline{\mathbf{D}_e(A)}=\mathbf{T}\setminus\mathbf{D}_e(A)$ — множество тотальных e-степеней, не содержащих перечислений множества A, тогда $\overline{\mathbf{D}_e(A)}=\{\mathbf{g}:\mathbf{g}\in\mathbf{T}\,\&\,\mathbf{a}\not\leq\mathbf{g}\}$.

Следующая теорема 2 позволяет определить e-сводимость через перечисления. Результаты такого вида (для ряда сводимостей) имеются также в статье Селмана [11].

Теорема 2. *Для любых A, $|A| \geq 2$ и B*

$$A \leq_e B \iff \mathbf{D}_e(B) \subseteq \mathbf{D}_e(A).$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $A \leq_e B$ и $g \in \mathbf{P}(B)$ — произвольное перечисление B. Имеем $A \leq_e B \leq_e g$, поэтому $A = \Phi_{z_0}(\tau g)$ для некоторого z_0. Зафиксируем естественный пересчет $\tau g = \{\langle 0, g(0)\rangle, \langle 1, g(1)\rangle, \dots\}$ и обозначим через f_0 перечисление A такое, что

$$f_0(n) = [\textit{n-й элемент, полученный на выходе e-оператора } \Phi_{z_0}, \\ \textit{если на вход подаются элементы } \tau g \textit{ в естественном порядке}].$$

Ясно, что на выходе e-оператора получим элементы множества A в некотором порядке (возможно с повторениями). Определим перечисление $f_0^* \in \mathbf{P}(A)$:

$$f_0^*(x) = \begin{cases} f_0(x/2), & \text{если } \exists y[x = 2y]; \\ a_0, & \text{если } \exists y[x = 2y + 1 \,\&\, y \in \tau g]; \\ a_1, & \text{если } \exists y[x = 2y + 1 \,\&\, y \notin \tau g]. \end{cases}$$

Ясно, что $f_0^* \equiv_e g$, т. е. $\mathbf{D}_e(B) \subseteq \mathbf{D}_e(A)$.

$\Leftarrow$. Пусть A и $B \neq \emptyset$ — произвольные множества, $B = \{b_0, b_1, \dots\}$ — произвольное перечисление B. Покажем, что $\mathbf{D}_e(B) \subseteq \mathbf{D}_e(A) \to A \leq_e B$. Проверим сначала, что $A \leq_e f$ для любого перечисления $f \in \mathbf{P}(B)$. Действительно, $\rho f = B \to d_e(\tau f) \in \mathbf{D}_e(B) \to d_e(\tau f) \in \mathbf{D}_e(A)$, тогда существует перечисление $g \in \mathbf{P}(A)$ такое, что $f \equiv_e g$. Итак, $A \leq_e g \leq_e f$.

Как показано в ([6], с. 46), в этом случае имеет место

Лемма 2. *Существуют $m \in \omega$ и конечная функция β такая, что $\rho\beta \subseteq B$, и для любой конечной функции $\widetilde{\beta}$ такой, что $\rho\widetilde{\beta} \subseteq B$ и $\beta \subseteq \widetilde{\beta}$*

$$(\exists f \in \mathbf{P}(B))[\widetilde{\beta} \subseteq f \,\&\, A = \Phi_m(\tau f)].$$

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $\langle x, D\rangle$ означает $\langle x, u\rangle$, где $D = D_u$ и

$$W_n = \{\langle x, \langle D\rangle_2\rangle : \langle x, D\rangle \in W_m \,\&\, \tau\beta \cup D \textit{ — однозначное множество}\}.$$

Покажем, что $A = \Phi_n(B)$. Пусть $x \in A$ и $f \in \mathbf{P}(B)$ такое, что $\beta \subseteq f$ и $A = \Phi_m(\tau f)$. В этом случае

$$\exists D[\langle x, D\rangle \in W_m \,\&\, D \subseteq \tau f].$$

Так как $D \subseteq \tau f$ и $\tau\beta \subseteq \tau f$, то $\tau\beta \cup D$ — однозначное множество. Так как $\langle x, \langle D\rangle_2\rangle \in W_n$ и $\langle D\rangle_2 \subseteq \rho f = B$, то $x \in \Phi_n(B)$.

Обратно, пусть $x \in \Phi_n(B)$, тогда

$$\exists D[\langle x, D\rangle \in W_m \,\&\, \langle D\rangle_2 \subseteq B \,\&\, \tau\beta \cup D \textit{ — однозначное множество}].$$

Пусть $\tau\widetilde{\beta} = \tau\beta \cup D$. Очевидно, $\beta \subseteq \beta$ и $\rho\widetilde{\beta} \subseteq B$, поэтому в силу леммы 2 найдется такое перечисление $f \in \mathbf{P}(B)$, что $\widetilde{\beta} \subseteq f$ и $A = \Phi_m(\tau f)$. Так как $\langle x, D\rangle \in W_m$ и $D \subseteq \tau\widetilde{\beta} \subseteq \tau f$, то $x \in \Phi_m(\tau f) = A$. $\square$

Введем понятие ко-тотальной степени перечислимости.

Определение. e-степень $d_e(A)$ называется *ко-тотальной*, если $d_e(\overline{A}) \in \mathbf{T}$.

Обозначим через $\mathbf{CT}$ множество ко-тотальных e-степеней. Так как в любой тотальной e-степени $\mathbf{a}$ существует множество $A \in \mathbf{a}$ такое, что $A \equiv_e c_A$, и, следовательно, $A \equiv_e \overline{A}$, то любая тотальная e-степень является ко-тотальной, т. е. $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{CT}$. Легко заметить, что $\mathbf{\Pi}_1^0 \subseteq \mathbf{CT}$ и $\mathbf{CT} \cap \mathbf{\Pi}_2^0 \subseteq \mathbf{\Delta}_2^0$. В [7] показано, что существуют квазиминимальные ко-тотальные e-степени, т. е. $\mathbf{T} \subset \mathbf{CT}$. В [8] показано, что под любой ненулевой тотальной e-степенью существуют квазиминимальные несравнимые e-степени $d_e(A)$ и $d_e(\overline{A})$, поэтому $\mathbf{\Delta}_2^0 \setminus \mathbf{CT} \neq \emptyset$. В частности, не всякая нетотальная e-степень является ко-тотальной.

Обозначим для любой e-степени $\mathbf{a}$ через

$$\mathbf{CT}(\leq \mathbf{a}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \,\&\, \mathbf{x} \in \mathbf{CT}\}.$$

В [9] показано, что существует ненулевая e-степень $\mathbf{a} \in \mathbf{CT}(\leq \mathbf{0}'_e)$, образующая минимальную пару с любой e-степенью из $\mathbf{\Pi}^0_1$. В частности, отсюда следует, что $\mathbf{\Pi}^0_1 \subset \mathbf{CT}(\leq \mathbf{0}'_e)$.

Теорема 3. *Любая тотальная e-степень* $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'_e$ *содержит функцию* f *такую, что* $d_e(\overline{\tau f})$ *квазиминимальна.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'_e$ и $A \in \mathbf{a}$ — ретрассируемое множество. Это означает, что существует частично вычислимая функция ψ такая, что $A \subseteq \delta\psi$, $\psi(a_0) = a_0$ и $\psi(a_{n+1}) = a_n$ для всех $n \in \omega$, где $\{a_n\}_{n\in\omega}$ — элементы A, расположенные в порядке возрастания (*прямой пересчет* A). Построим тотальную функцию f с помощью конструкции, вычислимой относительно A, такую, что $\rho f = A$ и $d_e(\overline{\tau f})$ — квазиминимальная e-степень. Так как $f \leq_e A$ как результат конструкции, и $A \leq_e f$, то $A \equiv_e f$. На шаге $t+1$ через f_t обозначим конечный начальный сегмент f, построенный к концу шага t. Пусть $l_t = 1 + \max \delta f_t$. Символ σ используется как переменная для конечных начальных A-сегментов (т.е. $\rho\sigma \subset A$).

Шаг 0. Полагаем $f_0 = \emptyset$ и $l_0 = 0$.

Шаг $2s+1$. Пусть $t = 2s$, проверим

$$\exists D[\Phi_s(D) \text{ \textit{неоднозначно}}]. \tag{3}$$

Если (3) выполнено, то пусть D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (3). При этом могут представиться еще две возможности

$$\exists\sigma[f_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^*\rangle_1 \subseteq \delta\sigma \,\&\, \Phi_s(\overline{\tau\sigma}) \text{ \textit{однозначно}}]. \tag{4}$$

В случае выполнения условия (4) пусть $\tau\sigma^*$ имеет наименьший канонический индекс. Полагаем

$$f_{t+1} = \sigma^*.$$

Если условие (4) не выполнено, то имеем

$$\forall\sigma[f_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^*\rangle_1 \subseteq \delta\sigma \to \Phi_s(\overline{\tau\sigma}) \text{ \textit{неоднозначно}}]. \tag{5}$$

Пусть $\tau\sigma^*$ имеет наименьший канонический индекс среди σ таких, что

$$f_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^*\rangle_1 \subseteq \delta\sigma \,\&\, D^* \subseteq \delta\sigma \times \omega \setminus \tau\sigma.$$

Полагаем $f_{t+1} = \sigma^*$.

Если (3) не выполняется, то полагаем $f_{t+1} = f_t$ и переходим к следующему шагу.

Шаг $2s+2$. Пусть $t = 2s+1$, полагаем $f_{t+1} = f_t \cup \{\langle l_t, a_s\rangle\}$.

Описание конструкции закончено. Пусть $f = \bigcup_{t\in\omega} f_t$, докажем, что f — требуемая функция. Заметим, что проверка условий (3) и (4) на шагах $2s+1$ вычислима относительно множества $\overline{K_0} \oplus A$, а выполнение построения на шагах $2s+2$ вычислимо относительно A. По условию теоремы $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'_e$, поэтому вся конструкция вычислима отностельно A, и, следовательно, $f \leq_e A$. Как видно из конструкции, $\rho f = A$, поэтому $A \leq_e f$.

Пусть тотальная функция $g \leq_e \overline{\tau f}$, тогда $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$ для некоторого s_0. Рассмотрим шаг $2s_0+1$, пусть $t_0 = 2s_0$. Если условие (3) не выполняется, то имеем

$$\forall D[\Phi_{s_0}(D) \text{ — \textit{однозначное множество}}],$$

тогда $\Phi_{s_0}(\omega)$ — однозначное множество. Так как $\overline{\tau f} \subseteq \omega$, то $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f}) \subseteq \Phi_{s_0}(\omega)$ и тогда в силу тотальности g $\tau g = \Phi_{s_0}(\omega)$. Следовательно, τg — в. п. и g — вычислимая функция.

Если условие (3) выполнено, то может представиться любое из взаимоисключающих условий (4) или (5). Пусть выполняется (4), тогда, как видно из построения, $\Phi_{s_0}(\overline{\tau f}_{t_0+1})$ однозначно. Так как $\overline{\tau f} \subseteq \overline{\tau f}_{t_0+1}$, то

$$\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f}) \subseteq \Phi_{s_0}(\overline{\tau f}_{t_0+1}),$$

и тогда $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f}_{t_0+1})$. Множество $\overline{\tau f}_{t_0+1}$ вычислимо, поэтому τg — в.п. и g — вычислимая функция.

Докажем, что если выполнено условие (5), то $\Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$ — неоднозначное множество. Действительно, при выборе f_{t_0+1} мы добились, чтобы множество $\Phi_{s_0}(D^*)$ стало неоднозначным, где $D^* \subseteq \overline{\tau f}_{t_0+1}$ и $\langle D^* \rangle_1 \subseteq \delta f_{t_0+1}$. В этом случае, как видно из конструкции, $D^* \subseteq \overline{\tau f}$. Тогда $\Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$ неоднозначно, как и $\Phi_{s_0}(D^*)$. Таким образом, в нашем случае, когда $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$, условие (5) на шаге $2s_0 + 1$ не может быть выполнено. Итак, $d_e(\overline{\tau f})$ — квазиминимальная e-степень. $\square$

Следующая теорема является более сильным аналогом теоремы МакИвоя [4].

Теорема 4. *Для любой тотальной e-степени* $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}'_e$ *существует квазиминимальная кототальная e-степень* $\mathbf{a}$ *такая, что* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$.

Доказательство. Пусть $B \in \mathbf{b}$ такое, что $B \equiv_e c_B$. Построим по шагам тотальную функцию f, удовлетворяющую требованиям

$(Q):\ \forall z[\overline{\tau f} \neq W_z] \,\&\, \forall g[g \leq_e \overline{\tau f} \to g$ — *вычислимая функция*$]$,

$(J):\ \mathbf{J}(\overline{\tau f}) \equiv_e B$.

Заметим, что тотальная функция, удовлетворяющая требованию (Q), построена в [7] с помощью достаточно сложной приоритетной конструкции. Здесь предлагается простая интервальная конструкция, с помощью которой строится тотальная функция f, удовлетворяющая требованиям (Q) и (J).

На шаге $t+1$ через f_t обозначим конечный начальный сегмент f, построенный к концу шага t. Пусть $l_t = 1 + \max \delta f_t$. Символ σ используется как переменная для конечных начальных сегментов.

Шаг 0. Полагаем $f_0 = \emptyset$ и $l_0 = 0$.

Шаг $4s+1$. Пусть $t = 4s$, проверим

$$\exists y[\langle l_t, y \rangle \in W_s]. \tag{6}$$

Если (6) выполнено, то полагаем

$$f_{t+1} = f_t \cup \{\langle l_t, y^* \rangle\},$$

где y^* — наименьшее y, удовлетворяющее (6). В противном случае полагаем

$$f_{t+1} = f_t \cup \{\langle l_t, 0 \rangle\},$$

и переходим к следующему шагу.

Шаг $4s+2$. Пусть $t = 4s+1$, проверим

$$\exists D[\Phi_s(D) \text{ неоднозначно}]. \tag{7}$$

Если (7) выполнено, то пусть D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (7). При этом могут представиться еще две возможности

$$\exists \sigma[f_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^* \rangle_1 \subseteq \delta\sigma \,\&\, \Phi_s(\overline{\tau\sigma}) \text{ однозначно}]. \tag{8}$$

В случае выполнения условия (8) пусть $\tau\sigma^*$ имеет наименьший канонический индекс. Полагаем $f_{t+1} = \sigma^*$. Если условие (8) не выполнено, то имеем

$$\forall \sigma[f_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^* \rangle_1 \subseteq \delta\sigma \to \Phi_s(\overline{\tau\sigma}) \text{ неоднозначно}].$$

Пусть $\tau\sigma^*$ имеет наименьший канонический индекс среди σ таких, что

$$f_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^* \rangle_1 \subseteq \delta\sigma \,\&\, D^* \subseteq \delta\sigma \times \omega \setminus \tau\sigma.$$

Полагаем $f_{t+1} = \sigma^*$. Если (7) не выполняется, то полагаем $f_{t+1} = f_t$ и переходим к следующему шагу.

Шаг $4s + 3$. Пусть $t = 4s + 2$, проверим

$$\exists\sigma[f_t \subset \sigma \,\&\, s \in \Phi_s(\overline{\tau\sigma})]. \tag{9}$$

Если (9) выполнено, то пусть $D^* \subseteq \overline{\tau\sigma}$ — конечное множество с наименьшим каноническим индексом, для которого $s \in \Phi_s(D^*)$. Полагаем

$$f_{t+1} = \sigma^*,$$

где $\tau\sigma^*$ имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих условию (9) и таких, что $\langle D^*\rangle_1 \subseteq \delta\sigma$. В противном случае полагаем

$$f_{t+1} = f_t,$$

и переходим к следующему шагу.

Шаг $4s + 4$. Пусть $t = 4s + 3$, полагаем

$$f_{t+1} = f_t \cup \{\langle l_t, 1 - c_B(s)\rangle\}.$$

Описание конструкции закончено. Пусть $f = \bigcup\limits_{t\in\omega} f_t$, докажем, что в ходе конструкции удовлетворены требования (Q) и (J).

Шаги $4s + 1$, $s \in \omega$, обеспечивают $\overline{\tau f} \neq W_s$ для всех $s \in \omega$, т.к. при выполнении условия (6) $\langle l_t, y^*\rangle \in W_s \cap \tau f$, а в противном случае $\langle l_t, 1\rangle \in \overline{\tau f} \setminus W_s$.

Пусть тотальная функция $g \leq_e \overline{\tau f}$, тогда $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$ для некоторого s_0. Рассмотрим шаг $4s_0 + 2$, пусть $t_0 = 4s_0 + 1$. Повторяя часть доказательства теоремы 3, в этом случае можно проверить, что g — вычислимая функция. Итак, требование (Q) удовлетворено.

Проверим, что удовлетворено также и требование (J). Из конструкции следует, что все шаги $4s + 1$, $4s + 2$, $4s + 3$, $s \in \omega$, вычислимы в $\mathbf{0}'_e$, а шаги $4s + 4$, $s \in \omega$, вычислимы в B. Так как по условию теоремы $\mathbf{0}'_e \leq \mathbf{b}$, то вся конструкция вычислима относительно произвольного перечисления B. Проверяя на шагах $4x + 3$ выполнимость условия (9), имеем

$$x \in (\overline{\tau f})^e \iff f_{4x+3} \neq f_{4x+2},$$

откуда $\mathbf{J}(\overline{\tau f}) \leq_e B$.

Чтобы проверить $B \leq_e \mathbf{J}(\overline{\tau f})$, покажем, что последовательность начальных сегментов $\{f_t\}_{t\in\omega}$, и, следовательно, последовательность вычислимых множеств $\{\overline{\tau f}\}_{t\in\omega}$ вычислима относительно $\mathbf{J}(\overline{\tau f})$. Тогда $c_B(x) = 1 - f_{4x+4}(l_x)$ для всех $x \in \omega$, т.е. $B \leq_e \mathbf{J}(\overline{\tau f})$. Ясно, что $\overline{\tau f} \leq_e \mathbf{J}(\overline{\tau f})$. Все шаги, кроме $4s+4$, $s \in \omega$, вычислимы в $\mathbf{0}'_e$, а на шагах $4s+4$, $s \in \omega$, выполняется построение

$$f_{4s+4} = f_{4s+3} \cup \{\langle l_{4s+3}, 1 - c_{\overline{\tau f}}(l_{4s+3})\rangle\},$$

которое вычислимо в $\overline{\tau f}$. Итак, $\mathbf{J}(\overline{\tau f}) \equiv_e B$, и требование (J) удовлетворено.

Пусть $\mathbf{a} = d_e(\tau f)$. Из конструкции и требования (Q) следует, что $\mathbf{a}$ — ко-тотальная квазиминимальная e-степень, а из требования (J) — что $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$. $\square$

Представляет интерес следующая релятивизация понятия квазиминимального множества. Пусть B — произвольное данное множество. Множество A называется *B-квазиминимальным*, если $B <_e A$ и $f \leq_e A \to f \leq_e B$ для любой тотальной функции f. В этом случае e-степень $d_e(A)$ называется **b**-*квазиминимальной*, где $\mathbf{b} = d_e(B)$. Обозначим через $\mathbf{Q_b}$ множество **b**-квазиминимальных e-степеней. Ясно, что $\mathbf{Q} = \mathbf{Q_0}$ и любая **b**-квазиминимальная e-степень нетотальна. В [10] показано, что $\mathbf{Q_b} \neq \emptyset$ для каждой е-степени **b**.

Обобщением теоремы Гаттериджа [7] является следующая

Теорема 5. *Для любой тотальной е-степени* **b** *существует* **b**-*квазиминимальная ко-тотальная е-степень* **a**.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}$ — произвольная тотальная e-степень, и $B \in \mathbf{b}$ такое, что $B \equiv_e c_B$. Построим по шагам тотальную функцию f, удовлетворяющую требованию

$(BQ): \ (\forall s)[\overline{\tau f} \neq \Phi_s(B)] \,\&\, (\forall g)[\Phi_t(\overline{\tau f}) = \tau g \to g \leq_e B]$.

Через f_t обозначим подфункцию f, построенную к концу шага t, имеющую вид $c_B \oplus \sigma_t$, где σ_t — некоторый конечный начальный сегмент, выбранный на шаге t. Пусть $l_t = 1 + \max \delta\sigma_t$. Таким образом, $f = \bigcup\limits_{t\in\omega} f_t = c_B \oplus \bigcup\limits_{t\in\omega} \sigma_t = c_B \oplus \alpha$.

Шаг 0. Полагаем $f_0 = c_B \oplus \emptyset$ и $l_0 = 0$.

Шаг $2s+1$. Пусть $t = 2s$, проверим

$$\exists y[\langle 2l_t + 1, y\rangle \in \Phi_s(B)]. \tag{10}$$

Если (10) выполнено, то полагаем $f_{t+1} = f_t \cup \{\langle 2l_t + 1, y^*\rangle\}$, где y^* — наименьшее y, удовлетворяющее (10). В противном случае полагаем $f_{t+1} = f_t \cup \{\langle 2l_t + 1, 0\rangle\}$ и переходим к следующему шагу.

Заметим, что если выполнено (10), то $\langle 2l_t+1, y^*\rangle \in \Phi_s(B) \cap \tau f$, следовательно, $\langle 2l_t+1, y^*\rangle \notin \overline{\tau f}$. Если (10) не выполнено, то $\langle 2l_t+1, 1\rangle \in \overline{\tau f} \setminus \Phi_s(B)$. В любом случае после шага $2s+1$ $\overline{\tau f} \neq \Phi_s(B)$.

Шаг $2s+2$. Пусть $t = 2s+1$, проверим

$$\exists D[\Phi_s(D) \ \textit{неоднозначно}]. \tag{11}$$

Если (11) выполнено, то пусть D^* имеет наименьший канонический индекс среди D, удовлетворяющих (11). При этом могут представиться еще две возможности

$$\exists \sigma[\sigma_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^*\rangle_1 \subseteq \delta(c_B \oplus \sigma) \,\&\, \Phi_s(\overline{\tau(c_B \oplus \sigma)}) \ \textit{однозначно}]. \tag{12}$$

В случае выполнения условия (12) пусть $\tau\sigma_{t+1}$ имеет наименьший канонический индекс. Полагаем $f_{t+1} = c_B \oplus \sigma_{t+1}$. Если условие (12) не выполнено, то имеем

$$\forall \sigma[\sigma_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^*\rangle_1 \subseteq \delta(c_B \oplus \sigma) \to \Phi_s(\overline{\tau(c_B \oplus \sigma)}) \ \textit{неоднозначно}]. \tag{13}$$

Пусть $\tau\sigma_{t+1}$ имеет наименьший канонический индекс среди σ таких, что

$$\sigma_t \subset \sigma \,\&\, \langle D^*\rangle_1 \subseteq \delta(c_B \oplus \sigma) \,\&\, D^* \subseteq \delta(c_B \oplus \sigma) \times \omega \setminus \tau(c_B \oplus \sigma).$$

Полагаем $f_{t+1} = c_B \oplus \sigma_{t+1}$.

Если (11) не выполняется, то полагаем $f_{t+1} = f_t$ и переходим к следующему шагу.

Описание конструкции закончено. Так как

$$\forall x[x \in B \iff \langle 2x, 1\rangle \in \tau f \iff \langle 2x, 0\rangle \in \overline{\tau f}],$$

то $B \leq_e \overline{\tau f}$.

Докажем, что удовлетворено требование (BJ). Пусть тотальная функция $g \leq_e \overline{\tau f}$, тогда $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$ для некоторого s_0. Рассмотрим шаг $2s_0 + 2$, пусть $t_0 = 2s_0 + 1$. Если условие (11) не выполняется, то имеем

$$\forall D[\Phi_{s_0}(D) \text{ — } \textit{однозначное множество}],$$

тогда $\Phi_{s_0}(\omega)$ — однозначное множество. Так как $\overline{\tau f} \subseteq \omega$, то $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f}) \subseteq \Phi_{s_0}(\omega)$ и тогда в силу тотальности g $\tau g = \Phi_{s_0}(\omega)$. Следовательно, τg — в. п. и g — вычислимая функция.

Если условие (11) выполнено, то может представиться любое из взаимоисключающих условий (12) или (13). Пусть выполняется (12), тогда, как видно из построения, $\Phi_{s_0}(\overline{\tau f}_{t_0+1}) = \Phi_{s_0}(\overline{\tau(c_B \oplus \sigma_{t+1})})$ однозначно. Так как $\overline{\tau f} \subseteq \overline{\tau f}_{t_0+1}$, то

$$\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f}_{t_0+1}) = \Phi_{s_0}(\overline{\tau(c_B \oplus \sigma_{t+1})}).$$

Множество $\tau\sigma_{t_0+1}$ конечно, поэтому $\overline{\tau(c_B \oplus \sigma_{t+1})} \leq_e c_B \leq_e B$. Следовательно, $g \leq_e B$.

Докажем, что если выполнено условие (13), то $\Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$ — неоднозначное множество. Действительно, при выборе f_{t_0+1} мы добились, чтобы множество $\Phi_{s_0}(D^*)$ стало неоднозначным, где $D^* \subseteq \overline{\tau f}_{t_0+1}$ и $\langle D^* \rangle_1 \subseteq \delta f_{t_0+1}$. В этом случае, как видно из конструкции, $D^* \subseteq \overline{\tau f}$. Тогда $\Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$ неоднозначно, как и $\Phi_{s_0}(D^*)$. Таким образом, в нашем случае, когда $\tau g = \Phi_{s_0}(\overline{\tau f})$, условие (13) на шаге $2s_0 + 2$ не может быть выполнено. Итак, требование (Q) удовлетворено.

Завершим доказательство теоремы. Пусть $\mathbf{a} = d_e(\overline{\tau f})$ — построенная в ходе конструкции ко-тотальная e-степень. Уже показано выше, что $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. Из того, что удовлетворено требование (BJ), следует $\mathbf{a}$ — $\mathbf{b}$-квазиминимальная е-степень.

Литература

1. Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени.* – Казань: Казанское математическое общество, 2000. – 576 с.
2. Friedberg R., Rogers H. *Reducibility and completness for sets of integers* // Z. math. Logik Grunde. Math. – 1959. – Bd. 5. – S. 117–125.
3. Case J. *Enumeration reducibility and partial degrees* // Annals Math. Logic. – 1971. – V. 2. – №. 4. – P. 419–439.
4. McEvoy K. *Jumps of quasi-minimal enumeration degrees* // The Journal of Symbolic Logic. – 1985. – V. 50. – № 3. – P. 839–848.
5. Медведев Ю.Т. *Степени трудности массовых проблем* // ДАН СССР. – 1955. – Т. 104. – С. 501–504.
6. Поляков Е.А., Розинас М.Г. *Теория алгоритмов. Учебное пособие.* – Иваново: Изд-во Ивановск. ун-та, 1976. – 88 с.
7. Gutteridge L. *Some results on e-reducibility*: Ph. D. Dins. Simon Univer., Burnaby, 1971.
8. Арсланов М.М., Купер С.Б., Калимуллин И.Ш. *Свойства расщепления тотальных е-степеней* // Алгебра и логика. – 2003. – Т. 43. – № 1. – С. 1–25.
9. Панкратов А. *Исследование некоторых свойств е-степеней кототальных множеств* // Межд. конференция “Логика и приложения”. Тезисы докладов, Новосибирск, 2000 г.
10. Sasso L.P. *A servey of partial degrees* // J. Symbolic Logic. – 1975. – V. 40. – P. 130–140.
11. Selman L. *Arithmetical reducibilities* I // Z. Math. Logic Grundlag Math. – 1971. – V. 17. – P. 335–350.

Ивановский государственный
химико-технологический университет

Поступила
05.11.2002