Известия вузов. Математика
2015, №11, с. 73–79

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Г.З. ХАБИБУЛЛИНА, С.В. МАКЛЕЦОВ, Р.М. МАВЛЯВИЕВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Аннотация. В трехмерном евклидовом пространстве рассматривается эллиптическое уравнение с сильным вырождением. Выводятся первая и вторая формулы Грина. Построено фундаментальное решение исследуемого уравнения и получено интегральное представление его решения.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение, фундаментальное решение, интегральное представление решения.

УДК: 517.95

Фундаментальные результаты для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка принадлежат М.В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О.А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работе С.Г. Михлина [3]. Исследование вырождающихся уравнений было продолжено в работах К.Б. Сабитова [4]–[6]. Построением фундаментальных решений для некоторых вырождающихся эллиптических уравнений, а также исследованием краевых задач для этих уравнений занимались Ф.Г. Мухлисов [7], А.Ш. Хисматуллин [8], [9], А.М. Нигмедзянова [10], Э.В. Чеботарева [11] и др. Особенностью данной работы является то, что в трехмерном евклидовом пространстве строится фундаментальное решение эллиптического уравнения с сильным вырождением. После определенной замены переменных изучаемое уравнение приводится к уравнению Гельмгольца, а конечная область переходит в бесконечную.

Пусть E_3^+ — полупространство $x_3 > 0$ трехмерного евклидова пространства E_3 точек $x = (x', x_3)$, $x' = (x_1, x_2)$, D — симметричная относительно плоскости $x_3 = 0$ конечная область в E_3, ограниченная поверхностью Γ, $D^+ = E_3^+ \cap D$, $\Gamma^+ = E_3^+ \cap \Gamma$, $\widetilde{D}^+ = D^+ \cup \Gamma^+$, $D_e^+ = E_3^+ \setminus \widetilde{D}^+$, $\widetilde{D}_e^+ = E_3^+ \setminus D^+$.

В E_3^+ рассмотрим уравнение

$$\Delta_T u - \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_T u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + Tu$, $T = x_3^\alpha \frac{\partial}{\partial x_3}\big(x_3^\alpha \frac{\partial}{\partial x_3}\big)$, $\alpha > 1$, $\lambda > 0$ — некоторые постоянные. Будем искать ограниченные при $x_3 \to 0$ решения уравнения (1).

С помощью замены переменных по формулам

$$\xi' = x', \quad \xi_3 = \frac{x_3^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Поступила 17.04.2014

приводим уравнение (1) к уравнению Гельмгольца

$$\widetilde{\Delta}_T u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} - \lambda^2 u = 0. \tag{2}$$

При этом область D^+ переходит в бесконечную область G, поверхность Γ^+ — в бесконечную поверхность $\widetilde{\Gamma}$.

Ясно, что если $u = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — решение уравнения (2) в области G, то функция $u = \varphi\big(x', \frac{x_3^{1-\alpha}}{1-\alpha}\big)$ будет решением уравнения (1) в области D^+.

Решения уравнения (2) в виде функции, зависящей лишь от расстояния $u = u(r)$, где $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, находятся из уравнения

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) - \lambda^2 u = 0. \tag{3}$$

После преобразования оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \lambda^2 u = 0$$

или, по-другому,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) - \lambda^2 u = 0. \tag{4}$$

Домножая на r, приводим (4) к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) - \lambda^2 (ru) = 0. \tag{5}$$

Выполнив в (5) замену $\omega = ru$, получаем уравнение $\omega'' - \lambda^2 \omega = 0$, общее решение которого имеет вид $\omega(r) = C_1 e^{\lambda r} + C_2 e^{-\lambda r}$, где $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения (3) находится по формуле

$$u(r) = \frac{C_1}{r} e^{\lambda r} + \frac{C_2}{r} e^{-\lambda r} = C_1 u_1(r) + C_2 u_2(r), \tag{6}$$

здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решение $u_1(r)$ экспоненциально возрастает при $r \to \infty$, при этом $u_2(r)$, напротив, экспоненциально стремится к нулю на бесконечности. В связи с этим отметим, что решение $u_1(r)$ не имеет физического смысла, в то время как $u_2(r)$ им обладает, и в терминах диффузии может пониматься как убывание концентрации на бесконечности, вызываемое поглощением.

Поскольку ищем ограниченные решения уравнения (1) в области E_3^+, то будем искать такие же решения и для уравнения (2). Для этого в (6) положим $C_1 = 0$. Тогда в классе ограниченных в области G решений уравнения (2) справедливо следующее поведение на бесконечности:

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = O\left(\frac{1}{r} e^{-\lambda r}\right).$$

Вернемся к переменным x_1, x_2, x_3.

Поскольку по условию $\alpha > 1$, то $1 - \alpha < 0$. Введя обозначение $1 - \alpha = -\beta$, где $\beta > 0$, получим $\xi_3^2 = \beta^{-2} x_3^{-2\beta}$. Заметим, что $r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + \beta^{-2} x_3^{-2\beta} \geq \beta^{-2} x_3^{-2\beta}$.

Тогда при $x_3 \to 0$ имеем оценку $|u(x_1, x_2, x_3)| \leq \frac{A}{re^{\lambda r}} \leq A\beta x_3^{\beta} e^{-\frac{\lambda}{\beta x_3^{\beta}}}$, где $A > 0$ — некоторая постоянная.

Таким образом, решение уравнения (1) в классе ограниченных в области E_3^+ решений экспоненциально стремится к нулю при $x_3 \to 0$.

Обозначим через $C_q^2(D^+)$ множество функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям

1) $u \in C^2(D^+) \cap C^1(D^+ \cup \Gamma^+) \cap C(D^+)$,

2) $u = O(x_3^q)$ при $x_3 \to 0,\ q > 0$.

Пусть $u, v \in C_q^2(D^+)$. Тогда легко можно доказать, что имеют место формулы

$$\iiint\limits_{D^+} v\Delta_T u x_3^{-\alpha} dx + \iiint\limits_{D^+} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^{2\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3} + \lambda^2 uv\right] x_3^{-\alpha} dx = \\ = \iint\limits_{\Gamma^+} vA[u]\xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+, \quad (7)$$

$$\iiint\limits_{D^+} [v\Delta_T u - u\Delta_T v] x_3^{-\alpha} dx = \iint\limits_{\Gamma^+} \{vA[u] - uA[v]\}\xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+, \quad (8)$$

где $A[\ ] = \cos(n,\xi_1)\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cos(n,\xi_2)\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3^{2\alpha}\cos(n,\xi_3)\frac{\partial}{\partial \xi_3}$ — конормальная производная, n — внешняя нормаль к поверхности Γ^+. Формула (7) называется первой формулой Грина, (8) — второй формулой Грина для оператора Δ_T.

Если $u = v$ и u — решение уравнения (1) в области D^+, то из (7) имеем

$$\iiint\limits_{D^+} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + x_3^{2\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 + \lambda^2 u^2\right] x_3^{-\alpha} dx = \iint\limits_{\Gamma^+} uA[u]\xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+.$$

Если u и v — решения уравнения (1), то

$$\iint\limits_{\Gamma^+} \{vA[u] - uA[v]\}\,\xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ = 0.$$

Известно ([12], сс. 82, 83), что фундаментальное решение уравнения (2) с особенностью в точке ξ_0 имеет вид

$$\omega(\xi,\xi_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda r_{\xi\xi_0}}}{r_{\xi\xi_0}},$$

где $r_{\xi\xi_0} = \sqrt{(\xi_1 - \xi_{10})^2 + (\xi_2 - \xi_{20})^2 + (\xi_3 - \xi_{30})^2}$.

Возвращаясь к старым переменным, получаем фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0

$$\varepsilon(x,x_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda \rho_{xx_0}}}{\rho_{xx_0}}, \quad (9)$$

где $\rho_{xx_0} = \sqrt{(x' - x_0')^2 + \left(\frac{x_3^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{x_{30}^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^2}$.

Теорема. *Для произвольного решения $u(x)$ уравнения (2) из класса $C_q^2(D^+)$ при $x_0 \in D^+$ имеет место интегральное представление*

$$u(x_0) = \iint\limits_{\Gamma^+} \left(\varepsilon(\xi,x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi,x_0)]\right)\xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+, \quad (10)$$

где $\varepsilon(\xi,x_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\lambda\rho_{\xi x_0}}}{\rho_{\xi x_0}}$ — фундаментальное решение уравнения с особенностью в точке x_0, $A[\ ] = \cos(n,\xi_1)\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cos(n,\xi_2)\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3^{2\alpha}\cos(n,\xi_3)\frac{\partial}{\partial \xi_3}$ — конормальная производная.

Доказательство. Пусть $u(x) \in C_q^2(D^+)$ — решение уравнения (1) в области D^+. Зададим в области D^+ произвольную точку x_0. Пусть $Q_{x_0\varepsilon}$ — шар с центром в точке x_0 и радиуса ε такого, что $Q_{x_0\varepsilon} \subset D^+$, $S_{x_0\varepsilon}$ — граница шара $Q_{x_0\varepsilon}$ — сфера. Обозначим через $D_\varepsilon^+ = D^+ \setminus \overline{Q}_{x_0\varepsilon}$.

К функциям $v = \varepsilon(x, x_0)$ и $u(x)$ применим вторую формулу Грина (8) для оператора Δ_T в области D_ε^+. Имеем

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon^+} \left(\varepsilon(x, x_0)\Delta_T u - u\Delta_T \varepsilon(x, x_0)\right) x_3^{-\alpha} dx =$$

$$= \iint\limits_{\Gamma^+} \left(\varepsilon(\xi, x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\right) \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ +$$

$$+ \iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \left(\varepsilon(\xi, x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\right) \xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}.$$

Учитывая, что в области D_ε^+ $\Delta_T u - \lambda^2 u = 0$ и $\Delta_T \varepsilon(x, x_0) - \lambda^2 \varepsilon(x, x_0) = 0$, получаем

$$0 = \iint\limits_{\Gamma^+} \left(\varepsilon(\xi, x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\right) \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ + \iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \left(\varepsilon(\xi, x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\right) \xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}$$

или

$$\iint\limits_{\Gamma^+} \left(\varepsilon(\xi, x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\right) \xi_3^{-\alpha} d\Gamma^+ =$$

$$= -\iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} \left(\varepsilon(\xi, x_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\right) \xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon} = -(J'_\varepsilon + J''_\varepsilon). \quad (11)$$

Ясно, что $J'_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Вычислим предел интеграла

$$J''_\varepsilon = -\iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} uA[\varepsilon(\xi, x_0)]\xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}. \quad (12)$$

Заменим в интеграле (12) $\varepsilon(x, x_0)$ на его значение из (9).

$$J''_\varepsilon = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} uA\left[\frac{e^{-\lambda\rho_{\xi x_0}}}{\rho_{\xi x_0}}\right] \xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi} \iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} u\frac{e^{-\lambda\rho_{\xi x_0}}}{\rho_{\xi x_0}} A[\rho_{\xi x_0}]\xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} u\frac{e^{-\lambda\rho_{\xi x_0}}}{\rho_{\xi x_0}^2} A[\rho_{\xi x_0}]\xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon} = J''_{1\varepsilon} + J''_{2\varepsilon}.$$

Также ясно, что $J''_{1\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Вычислим предел интеграла

$$J''_{2\varepsilon} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} u\frac{e^{-\lambda\rho_{\xi x_0}}}{\rho_{\xi x_0}^2} A[\rho_{\xi x_0}]\xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}$$

при $\varepsilon \to 0$, здесь

$$A[\rho_{\xi x_0}] = \frac{(\xi_1 - x_{10})^2}{\rho_{\xi x_0} r_{\xi x_0}} + \frac{(\xi_2 - x_{20})^2}{\rho_{\xi x_0} r_{\xi x_0}} + \frac{\xi_3^\alpha (\xi_3 - x_{30})^2}{\big(x_{30} + \overline{\theta}(\xi_3 - x_{30})\big)^\alpha},$$

$$\rho_{\xi x_0} = \sqrt{(\xi_1 - x_{10})^2 + (\xi_2 - x_{20})^2 + \big(x_{30} + \overline{\theta}(\xi_3 - x_{30})\big)^{-2\alpha} (\xi - x_{30})^2},$$

где $0 < \overline{\theta} < 1$. Таким образом,

$$J''_{2\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint\limits_{S_{x_0\varepsilon}} u(\xi) \frac{e^{-\lambda \left[(\xi_1 - x_{10})^2 + (\xi_2 - x_{20})^2 + \frac{(\xi_3 - x_{30})^2}{(x_{30} + \overline{\theta}(\xi_3 - x_{30}))^{2\alpha}}\right]^{\frac{1}{2}}}}{\left[(\xi_1 - x_{10})^2 + (\xi_2 - x_{20})^2 + \big(x_{30} + \overline{\theta}(\xi_3 - x_{30})\big)^{-2\alpha} (\xi_3 - x_{30})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \times$$
$$\times \left[(\xi_1 - x_{10})^2 + (\xi_2 - x_{20})^2 + \frac{\xi_3^\alpha (\xi_3 - x_{30})^2}{\big(x_{30} + \overline{\theta}(\xi_3 - x_{30})\big)^\alpha}\right] \xi_3^{-\alpha} dS_{x_0\varepsilon}.$$

Если воспользоваться представлением сферы:

$$\xi_1 = x_{10} + \varepsilon \sin\theta \cos\varphi, \quad \xi_2 = x_{20} + \varepsilon \sin\theta \sin\varphi,$$
$$\xi_3 = x_{30} + \varepsilon \cos\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),$$

то элемент поверхности сферы представится в виде $dS_{x_0\varepsilon} = \varepsilon^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$, а

$$J''_{2\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} u \frac{e^{-\lambda \left[\varepsilon^2 \sin^2\theta + \frac{\varepsilon^2 \cos^2\theta}{(x_{30} + \overline{\theta}\varepsilon\cos\theta)^{2\alpha}}\right]^{\frac{1}{2}}}}{\left[\varepsilon^2 \sin^2\theta + \big(x_{30} + \overline{\theta}\varepsilon\cos\theta\big)^{-2\alpha} \varepsilon^2 \cos^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}} \times$$
$$\times \left[\varepsilon^2 \sin^2\theta + \frac{(x_{30} + \varepsilon\cos\theta)^\alpha \varepsilon^2 \cos^2\theta}{(x_{30} + \overline{\theta}\varepsilon\cos\theta)^\alpha}\right] (x_{30} + \varepsilon\cos\theta)^{-\alpha} \varepsilon^2 \sin\theta \, d\theta =$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u \frac{e^{-\lambda\varepsilon \left[\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{(x_{30} + \overline{\theta}\varepsilon\cos\theta)^{2\alpha}}\right]^{\frac{1}{2}}} \left[\sin^2\theta + \frac{(x_{30} + \varepsilon\cos\theta)^\alpha \cos^2\theta}{(x_{30} + \overline{\theta}\varepsilon\cos\theta)^\alpha}\right]}{\left[\sin^2\theta + \big(x_{30} + \overline{\theta}\varepsilon\cos\theta\big)^{-2\alpha} \cos^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}} \times$$
$$\times (x_{30} + \varepsilon\cos\theta)^{-\alpha} \sin\theta \, d\theta.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$J''_{2\varepsilon} = u(x_0) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x_{30}^{-\alpha} \sin\theta d\theta}{\left[\sin^2\theta + x_{30}^{-2\alpha} \cos^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}} = u(x_0) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x_{30}^{-\alpha} \operatorname{tg}\theta \, d \operatorname{tg}\theta}{\left[\operatorname{tg}^2\theta + x_{30}^{-2\alpha}\right]^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= u(x_0) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x_{30}^\alpha \operatorname{tg}\theta \, d(x_{30}^\alpha \operatorname{tg}\theta)}{[1 + (x_{30}^\alpha \operatorname{tg}\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} = u(x_0) \int\limits_0^{\infty} \frac{t \, dt}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} = -u(x_0). \quad (13)$$

Переходя в равенстве (11) к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом (13) получим интегральное представление (10). □

Таким образом, доказали, что для функции $u(x) \in C_q^2(D^+)$ при $x_0 \in D^+$ имеет место интегральное представление (10).

Полученное интегральное представление в дальнейшем может быть применено при исследовании краевых задач типа Дирихле и Неймана для рассмотренного трехмерного эллиптического уравнения (1) с сильным вырождением.

Литература

[1] Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области*, ДАН СССР **77** (2), 181–183 (1951).

[2] Олейник О.А. *Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области*, ДАН СССР **87** (6), 885–887 (1952).

[3] Михлин С.Г. *Вырождающиеся эллиптические уравнения*, Вестн. ЛГУ, № 8, 19–48 (1954).

[4] Сабитов К.Б. *О постановке краевых задач для уравнения смешанного типа с вырождением второго порядка на границе бесконечной области*, Сиб. матем. журн. **21** (4), 146–150 (1980).

[5] Сабитов К.Б. *Задача типа Трикоми для уравнения смешанного типа с сильным характеристическим вырождением*, Дифференц. уравнения **20** (2), 333–337 (1984).

[6] Сабитов К.Б., Ильясов Р.Р. *Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом спектральным методом*, Изв. вузов. Матем., № 2, 64–71 (2004).

[7] Мухлисов Ф.Г., Хисматуллин А.Ш. *Исследование краевых задач для одного вырождающегося B-эллиптического уравнения методом потенциалов*, Тр. 5-й Междун. конф. молодых ученых и студентов "Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки". Ч. 1: Математика. Матем. моделир. Самара, 2004 (Изд-во СамГТУ, Самара, 2004), с. 87–90.

[8] Хисматуллин А.Ш. *Интегральное представление одного вырождающегося B-эллиптического уравнения*, Тр. Второй Всеросс. науч. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". Ч. 3. Самара, 2004 (Изд-во СамГТУ, Самара, 2004), с. 228–231.

[9] Хисматуллин А.Ш. *Решение краевых задач для одного вырождающегося B-эллиптического уравнения второго рода методом потенциалов*, Изв. вузов. Матем., № 1, 63–75 (2007).

[10] Нигмедзянова А.М. *О фундаментальном решении одного вырождающегося эллиптического уравнения*, Тр. Второй Всеросс. науч. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". Ч. 3. Самара, 2005 (Изд-во СамГТУ, Самара, 2005), с. 180–182.

[11] Чеботарева Э.В. *Исследование краевых задач для сингулярного B-эллиптического уравнения методом потенциалов*, Изв. вузов. Матем., № 5, 88–91 (2010).

[12] Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1976).

Г.З. Хабибуллина

доцент, кафедра теории и методики обучения физике и информатике,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: hgz1980@rambler.ru

С.В. Маклецов

старший преподаватель, кафедра теории функций и приближений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: smak-80@yandex.ru

Р.М. Мавлявиев

старший преподаватель, кафедра высшей математики и математического моделирования,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: mavly72@mail.ru

G.Z. Khabibullina, S.V. Makletsov, and R.M. Mavlyaviev

Integral representation of a solution to three-dimensional elliptic equation with strong degeneration

Abstract. In a three-dimentional Euclidean space we consider an elliptic equation with strong degeneration. We derive the first and the second Green formula. We also construct a fundamental solution to the equation and obtain an integral representation of its solution.

Keywords: degenerate elliptic equations, fundamental solution, integral representation of the solution.

G.Z. Khabibullina

Associate Professor, Chair of Theory and Principles of Physics and Information Science Teaching,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: hgz1980@rambler.ru

S.V. Makletsov

Senior Lecturer, Chair of Function Theory and Approximations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: smak-80@yandex.ru

R.M. Mavlyaviev

Senior Lecturer, Chair of Higher Mathematics and Mathematical Modeling,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: mavly72@mail.ru