ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 10 (461)

УДК 517.518; 517.982

Т.П. ЛУКАШЕНКО

О СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ, ПОДОБНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫМ

1. Введение

Известно, что ортогональные системы и разложения по ним широко применяются в математике и ее приложениях, что объясняется рядом замечательных свойств таких систем. В [1] и [2] было дано определение более общих систем разложения, подобных ортогональным (более кратко, ортоподобных).

Определение 1.. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω — пространство со счетно-аддитивной (соответственно действительной или комплексной) мерой μ ([3], с. 109–116). Систему $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset H$ будем называть *системой в H с индексами из Ω*.

Определение 2.. Систему $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ в H с индексами из Ω будем называть *ортоподобной* (*подобной ортогональной*) *системой разложения* в H, если любой элемент $y\in H$ можно представить в виде

$$y=\int_\Omega \widehat{y}_\omega e^\omega\,d\mu(\omega), \tag{1}$$

где $\widehat{y}_\omega=(y,e^\omega)$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причем в последнем случае имеется такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k\subset\Omega_{k+1}$ для $k\in\mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty\Omega_k=\Omega$), быть может, зависящее от y и называемое подходящим для y, что функция $\widehat{y}_\omega e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y=\int_\Omega \widehat{y}_\omega e^\omega\,d\mu(\omega)=\lim_{k\to\infty}(L)\int_{\Omega_k}\widehat{y}_\omega e^\omega\,d\mu(\omega). \tag{2}$$

Ортонормированные системы являются ортоподобными системами разложения в замыкании своей линейной оболочки; при этом для любой точки $\omega\in\Omega\quad\mu(\omega)\equiv 1$ и для счетных систем в качестве Ω можно брать $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Для ортоподобных систем разложения имеет место

Утверждение 1. (аналог равенства Парсеваля) ([2], [4], [5]). *Если $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — ортоподобная система разложения в H, то для любого элемента $y\in H$*

$$\|y\|^2=\int_\Omega|\widehat{y}_\omega|^2\,d\mu(\omega)=\int_\Omega|(y,e^\omega)|^2\,d\mu(\omega),$$

где в соответствии с определением интеграл понимается как собственный интеграл Лебега или как несобственный интеграл Лебега по подходящему для элемента y исчерпыванию; для любых элементов $y,z\in H$

$$(y,z)=\int_\Omega\widehat{y}_\omega\overline{\widehat{z}_\omega}\,d\mu(\omega)=\int_\Omega(y,e^\omega)\overline{(z,e^\omega)}\,d\mu(\omega),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00354) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № 00-15-96143).

где также интеграл понимается как собственный интеграл Лебега или как несобственный интеграл Лебега по подходящему для y или z исчерпыванию. Если мера μ неотрицательна, то в обоих случаях интеграл может рассматриваться как собственный интеграл Лебега.

Из утверждения 1 выводится

Утверждение 2. [2] (о мнимой части меры). *Если $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — ортоподобная система разложения в H, то $\int\limits_\Omega \widehat{y}_\omega e^\omega \, d\operatorname{Im}\mu(\omega) = 0$ для любого элемента $y \in H$, поэтому мнимую часть меры μ можно отбросить и без ограничения общности считать μ действительной мерой.*

Определение 3.. Систему элементов $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ из H с индексами из Ω будем называть *неотрицательной (с неотрицательной мерой)*, если Ω — пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой μ.

Всюду ниже функции на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ всегда принимают значения в том поле, над которым рассматривается H.

В случае неотрицательной меры μ верны следующие доказанные в [4] и [5] утверждения.

Утверждение 3. (об экстремальном свойстве коэффициентов разложения). *Пусть $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система, а $c(\omega)$ — функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и*

$$y = \int_\Omega c(\omega) e^\omega \, d\mu(\omega), \tag{3}$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причем в последнем случае существует такое исчерпывание $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Λ_k измеримы, $\Lambda_k \subset \Lambda_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Lambda_k = \Omega$), что функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Λ_k и

$$\int_\Omega c(\omega)e^\omega \, d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Lambda_k} c(\omega)e^\omega \, d\mu(\omega).$$

Тогда выполняется следующий аналог равенства Парсеваля: для любого элемента $z \in H$

$$(y, z) = \int_\Omega \mathrm{c}(\omega)\overline{\widehat{z}_\omega} \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \mathrm{c}(\omega)\overline{(z, e^\omega)} \, d\mu(\omega), \tag{4}$$

где интеграл также понимается как собственный или соответственно несобственный интеграл Лебега — предел интегралов по вышеуказанному исчерпыванию $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω. Если $\int\limits_\Omega |c(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) < \infty$, то в любом случае интеграл может рассматриваться как собственный интеграл Лебега. Полагая $z = y$, имеем равенство $\|y\|^2 = \int\limits_\Omega c(\omega)\overline{\widehat{y}_\omega} \, d\mu(\omega)$, в котором заменить $\widehat{y}_\omega$ на $c(\omega)$, вообще говоря, нельзя:

$$\|y\|^2 \leqslant (L) \int_\Omega |c(\omega)|^2 \, d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место лишь в случае $c(\omega) = \widehat{y}_\omega$ почти всюду на Ω.

Замечание. Для выполнения только аналога равенства Парсеваля (4) неотрицательность меры μ не нужна.

Утверждение 4. (аналог теоремы Рисса–Фишера). *Пусть $c(\omega)$ — функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $\int_\Omega |c(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) < \infty$. Пусть $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — такая последовательность измеримых подмножеств Ω, что $\underline{\lim}_{\,k\to\infty} \Lambda_k = \Omega$ ([3], с. 41) и функция $c(\omega)e^\omega$ интегрируема по Лебегу на Λ_k. Тогда в H существует*

$$\lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Lambda_k} c(\omega)e^\omega \, d\mu(\omega).$$

Утверждение 5. (оценка точности приближения). *Пусть $c(\omega)$ — функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $\int\limits_\Omega |c(\omega)|^2\, d\mu(\omega) < \infty$, E — измеримое подмножество Ω. Тогда при условии измеримости функции $c(\omega)e^\omega$ на Ω существуют собственные или несобственные интегралы Лебега от функции $c(\omega)e^\omega$ по Ω и по E и*

$$\left\| \int_\Omega c(\omega)e^\omega\, d\mu(\omega) - \int_E c(\omega)e^\omega\, d\mu(\omega)\right\|^2 \leqslant \int_{\Omega\setminus E} |c(\omega)|^2\, d\mu(\omega).$$

Замечание. Если при условиях утверждения 5 $\int\limits_\Omega c(\omega)e^\omega\, d\mu(\omega)$ обозначить через y, то оценка точности приближения будет выглядеть как

$$\left\| y - \int_E c(\omega)e^\omega\, d\mu(\omega)\right\|^2 \leqslant \int_{\Omega\setminus E} |c(\omega)|^2\, d\mu(\omega).$$

В частности, для любого элемента $y \in H$ и любого измеримого подмножества E из Ω существует собственный или несобственный интеграл Лебега $\int\limits_E \widehat{y}_\omega e^\omega\, d\mu(\omega)$ и

$$\left\| y - \int_E \widehat{y}_\omega e^\omega\, d\mu(\omega)\right\|^2 \leqslant \int_{\Omega\setminus E} |\widehat{y}_\omega|^2\, d\mu(\omega).$$

Это замечание непосредственно вытекает из утверждения 4 и равенства (1). Последние оценки являются аналогами известной в теории рядов Фурье оценки точности приближения — тождества Бесселя.

Опубликованные [2], [4], [5] утверждения показывают, что системы разложения, подобные ортогональным, обладают почти всеми свойствами ортогональных систем. В случае, когда H — пространство Лебега L^2, они обладают многими замечательными свойствами ортогональных систем функций. Однако задающая преобразование Фурье система $\{\exp(2\pi i\omega x)\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, определяющая преобразование Гильберта система $\{\frac{1}{\pi(\omega-x)}\}_{\omega\in\mathbb{R}}$ и некоторые системы разложения из [6] не являются системами разложения, подобными ортогональным, хотя обладают многими свойствами ортогональных систем. Поэтому естественным является введение и изучение более общего понятия — обобщенной системы разложения, подобной ортогональной.

2. Обобщенные ортоподобные системы разложения

Определение 4.. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω — пространство со счетно-аддитивной (соответственно действительной или комплексной) мерой μ. Пусть $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ — система замкнутых расширяющихся ($H_n \subset H_{n+1}$ для $n \in \mathbb{N}$) подпространств в H, объединение которых всюду плотно в H, а $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — такая система, каждый элемент которой $\boldsymbol{e}^\omega$ является последовательностью $\{e_n^\omega\}_{n=1}^\infty$ элементов H и e_n^ω — ортогональная проекция e_{n+1}^ω на H_n. Тогда систему $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ будем называть *обобщенной системой в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω)*.

Из определения следует, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, и любых $\omega \in \Omega$ элемент e_n^ω — ортогональная проекция e_m^ω на H_n.

Определение 5.. Обобщенная система $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ будет называться *обобщенной ортоподобной (подобной ортогональной) системой разложения в H*, если любой элемент $y \in H_n$ представляется в виде

$$y = \int_\Omega \widehat{y}_\omega^n e_n^\omega\, d\mu(\omega), \tag{5}$$

где $\widehat{y}_\omega^n = (y, e_n^\omega)$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H (точно так же, как в определении 2).

Определение 6.. Обобщенную систему $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ будем называть *неотрицательной* (*с неотрицательной мерой*), если Ω — пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой μ.

Замечание 1. (об интегрировании). Используемое в определениях 2 и 4 понятие интеграла является, по мнению автора, наиболее пригодным для излагаемой далее теории, хотя попытки использования других интегралов также могут быть интересны.

Замечание 2. (о числовом множителе). Разумеется, в интегралы в формулах (1)–(5) можно добавить действительнозначный или комплекснозначный множитель $a(\omega)$, но от него легко избавиться переходом к системе $\{\boldsymbol{s}^\omega\} = \{\sqrt{|a(\omega)|}\boldsymbol{e}^\omega\}$ и мере $\eta(E) = (L)\int\limits_E \frac{a(\omega)}{|a(\omega)|}\,d\mu(\omega)$ (здесь считаем $\frac{0}{0} = 0$),

$$(L)\int_{\Omega_{(k)}} a(\omega)(y, e_n^\omega)e_n^\omega\,d\mu(\omega) = (L)\int_{\Omega_{(k)}} (y, s_n^\omega)s_n^\omega\,d\eta(\omega),$$

где $\Omega_{(k)}$ — Ω или Ω_k ([3], с. 198). Существуют и другие переходы, также избавляющие от множителя $a(\omega)$.

Замечание 3. (об ортоподобных системах). Если в обобщенной ортоподобной системе разложения все элементы $e^\omega \equiv \{e_n^\omega\}_{n=1}^\infty$ постоянные (соответственно все $H_n = H$), то получается определение ортоподобной системы разложения, в частности, охватывающее полные ортонормированные системы.

Замечание 4. (о преобразовании Фурье). Если взять $H = L^2(\mathbb{R})$, $\Omega = \mathbb{R}$ с μ — обычной мерой Лебега, $H_n = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \equiv 0 \text{ на } \mathbb{R}\setminus[-n,n]\}$, $e_n^\omega(x) = \exp(2\pi i\omega x)\chi_{[-n,n]}(x)$, где $\chi_{[-n,n]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[-n,n]$, то в качестве обобщенной ортоподобной неотрицательной системы получится система функций $\{\exp(2\pi i\omega x)\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, определяющая преобразование Фурье $\mathcal{F}(f)(\omega) \equiv \widehat{f}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i\omega x)f(x)\,dx$.

Замечание 5. (о преобразовании Гильберта). Если взять $H = L^2(\mathbb{R})$, $\Omega = \mathbb{R}$ с μ — обычной мерой Лебега, $H_n = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}(f) \equiv 0 \text{ на } \mathbb{R}\setminus[-n,n]\}$,

$$e_n^\omega(x) = \mathcal{F}(-i\exp(2\pi i\omega t)\,\mathrm{sign}\,t\,\chi_{[-n,n]}(t))(x) = \frac{1-\cos 2\pi n(\omega - x)}{\pi(\omega - x)},$$

то в качестве обобщенной ортоподобной неотрицательной системы получится система функций $\left\{\frac{1}{\pi(\omega-x)}\right\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, определяющая преобразование Гильберта $\mathcal{H}(f)(\omega) \equiv \widetilde{f}(\omega) = \mathrm{v.p.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\pi(\omega-x)}\,dx \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x-\omega|\geqslant\varepsilon} \frac{f(x)}{\pi(\omega-x)}\,dx$ ([7], с. 243).

Из приведенных определений 1 и 2 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ система $\{e_n^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в H_n, неотрицательной, если обобщенная система разложения $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ неотрицательна.

Рассматривая обобщенные системы разложения, подобные ортогональным, будем в дальнейшем обозначать через P_n оператор ортогонального проектирования из H в H_n. Известно ([8], с. 139–145), что для любого элемента $y \in H$ элемент $P_n(y)$ является ближайшим к y элементом H_n. Так как в определении 4 замыкание $\bigcup_{n=1}^\infty H_n$ равно H, то для любого $y \in H$ верно, что $y = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(y)$.

Теорема 1.. *Если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенная ортоподобная неотрицательная система разложения в H, то для любого элемента $y \in H$ существует единственная с точностью до эквивалентности (совпадения почти всюду) функция $\widehat{y}_\omega$ на Ω такая, что последовательность функций $\widehat{y}_\omega^n = (y, e_n^\omega)$ сходится к ней в смысле*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\widehat{y}_\omega - \widehat{y}_\omega^n|^2\,d\mu(\omega) = 0.$$

Выполняется аналог равенства Парсеваля–順ланшереля: для любого элемента $y \in H$

$$\|y\|^2 = (L)\int_\Omega |\widehat{y}_\omega|^2\, d\mu(\omega);$$

для любых элементов $y, z \in H$

$$(y,z) = (L)\int_\Omega \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega}\, d\mu(\omega),$$

где (L) *перед знаком интеграла означает, что интеграл понимается как собственный интеграл Лебега.*

Доказательство. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$, в силу аналога равенства Парсеваля для систем разложения, подобных ортогональным ([2] или [4], или [5]),

$$\|P_n(y) - P_m(y)\|^2 = (L)\int_\Omega |(P_n(y), e_n^\omega) - (P_m(y), e_n^\omega)|^2\, d\mu(\omega) =$$
$$= (L)\int_\Omega |(y, e_n^\omega) - (P_m(y), e_m^\omega)|^2\, d\mu(\omega) = (L)\int_\Omega |\widehat{y}_\omega^n - \widehat{y}_\omega^m|^2\, d\mu(\omega).$$

Так как замыкание $\bigcup_{n=1}^\infty H_n$ совпадает с H, то $P_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для любых $n, m > N$

$$(L)\int_\Omega |\widehat{y}_\omega^n - \widehat{y}_\omega^m|^2\, d\mu(\omega) < \varepsilon. \tag{6}$$

Выберем такую строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, что $(L)\int\limits_\Omega |\widehat{y}_\omega^{n_{k+1}} - \widehat{y}_\omega^{n_k}|^2\, d\mu(\omega) < 8^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu\{\omega \in \Omega : |\widehat{y}_\omega^{n_{k+1}} - \widehat{y}_\omega^{n_k}| > 2^{-k}\} < 2^{-k}$ и, значит, последовательность $\widehat{y}_\omega^{n_k}$ сходится почти всюду на Ω к функции, которую обозначим $\widehat{y}_\omega$. Неотрицательные интегрируемые по Лебегу функции $|\widehat{y}_\omega^n - \widehat{y}_\omega^m|^2$ при $n \to \infty$ сходятся почти всюду на Ω к функции $|\widehat{y}_\omega - \widehat{y}_\omega^m|^2$. Пользуясь леммой Фату ([3], с. 170), из (6) получаем, что при $m > n$ выполняется неравенство $(L)\int\limits_\Omega |\widehat{y}_\omega - \widehat{y}_\omega^n|^2\, d\mu(\omega) < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\widehat{y}_\omega - \widehat{y}_\omega^m|^2\, d\mu(\omega) = 0.$$

По аналогу равенства Парсеваля для систем разложения, подобных ортогональным, для любых элементов $y, z \in H$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} (P_m(y), P_m(z)) & = & (L)\int_\Omega \widehat{y}_\omega^m \overline{\widehat{z}_\omega^m}\, d\mu(\omega) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle m\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m\to\infty} \\ (y,z) & & (L)\int_\Omega \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega}\, d\mu(\omega) \end{array}$$

и, следовательно, для любых элементов $y, z \in H$ выполняется аналог равенства Парсеваля–Планшереля

$$(y,z) = (L)\int_\Omega \widehat{y}_\omega \overline{\widehat{z}_\omega}\, d\mu(\omega). \quad \square$$

Доказанный аналог равенства Парсеваля–Планшереля существенно используется в нижеследующих результатах.

Теорема 2.. *Пусть* $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — *неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в* H, *а* $c(\omega)$ — *функция со значениями в* $\mathbb{R}$ *или в* $\mathbb{C}$, $|c(\omega)|^2$ *интегрируема по Лебегу на* Ω *и*

$$y = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega c(\omega) e_n^\omega\, d\mu(\omega),$$

где интегралы понимаются как собственные или несобственные интегралы Лебега от функции со значениями в H. Тогда для любого $z \in H$

$$(y,z) = (L)\int_\Omega c(\omega)\overline{\widehat{z}_\omega}\, d\mu(\omega).$$

Доказательство. Так как скалярное произведение является при фиксированном втором аргументе непрерывным линейным оператором от первого аргумента, то согласно ([3], с. 128)

$$(y,z) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega c(\omega)(e_n^\omega, z)\, d\mu(\omega).$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|c(\omega)(e_n^\omega, z) - c(\omega)\widehat{z}_\omega| \leqslant \frac{1}{2}(\varepsilon^2|c(\omega)|^2 + \varepsilon^{-2}|(e_n^\omega, z) - \widehat{z}_\omega|^2)$, то из теоремы 1 следует, что

$$(y,z) = \int_\Omega c(\omega)\widehat{z}_\omega\, d\mu(\omega). \quad \square$$

Следствие (об экстремальном свойстве коэффициентов разложения). При условии теоремы 2

$$\|y\|^2 \leqslant (L)\int_\Omega |c(\omega)|^2\, d\mu(\omega),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \widehat{y}_\omega$ почти всюду на Ω.

Действительно, полагая в теореме 2 $z = y$, имеем $\|y\|^2 = (L)\int\limits_\Omega c(\omega)\overline{\widehat{y}_\omega}\, d\mu(\omega)$. Используя неравенство $|c(\omega)\overline{\widehat{y}_\omega}| \leqslant \frac{1}{2}(|c(\omega)|^2 + |\widehat{y}_\omega|^2)$ и теорему 1, получаем $\|y\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(L)\int\limits_\Omega |c(\omega)|^2\, d\mu(\omega) + \frac{1}{2}\|y\|^2$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда почти всюду на Ω выполняются равенство $|c(\omega)| = |\widehat{y}_\omega|$ и $c(\omega)\overline{\widehat{y}_\omega} \geqslant 0$, т. е. тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \widehat{y}_\omega$ почти всюду на Ω.

Лемма 1.. *Пусть в гильбертовом пространстве H имеется система замкнутых подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$, $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots$, замыкание $\bigcup_{n=1}^\infty H_n$ совпадает с H, и P_n — оператор ортогонального проектирования из H в H_n. Если y^n — такая ограниченная последовательность в H, что при $n < m$ $y^n = P_n(y^m)$, то y^n — сходящаяся в H последовательность с пределом y и $y^n = P_n(y)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. При $m < n$ $\|y^m\| = \|P_m(y^n)\| \leqslant \|y^n\|$, значит, $\|y^k\|$ — ограниченная неубывающая последовательность, пусть s — ее предел. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое N, что при $k > N$ $\|y^k\|^2 > s^2 - \varepsilon^2$. Тогда при $n \geqslant m > N$ имеем $\|y^n - y^m\|^2 = \|y^n - P_m(y^n)\|^2 = \|y^n\|^2 - \|y^m\|^2 < \varepsilon^2$. Последовательность y^k фундаментальна и, следовательно, сходится. При $n < m$ имеем равенство $y^n = P_n(y^m)$. При $m \to \infty$ в силу непрерывности оператора ортогонального проектирования получаем $y^n = P_n(y)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 3.. *Пусть $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенная ортоподобная неотрицательная система разложения в H, тогда для любого $y \in H$ верно равенство*

$$y = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widehat{y}_\omega^n e_n^\omega\, d\mu(\omega). \tag{7}$$

Доказательство. Так как $(y, e_n^\omega) = (P_n(y), e_\omega^n)$, по определению 5 $P_n(y) = \int\limits_\Omega \widehat{y}_\omega^n e_n^\omega\, d\mu(\omega)$, а по лемме 1 $y = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(y)$, то утверждение теоремы верно. $\square$

Теорема 4.. *Пусть $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенная ортоподобная неотрицательная система разложения в H, $c(\omega)$ — функция со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $|c(\omega)|^2$ интегрируема по Лебегу на Ω, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\{\Lambda_k^n\}_{k=1}^\infty$ — такая последовательность измеримых подмножеств Ω,* *что ее нижний предел* ([3], с. 141) $\varliminf_{k\to\infty} \Lambda_k^n = \Omega$ *и функция* $c(\omega)e_n^\omega$ *интегрируема по Лебегу на* Λ_k^n. *Тогда в* H *существует*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}(L)\int_{\Lambda_k} c(\omega)e_n^\omega\, d\mu(\omega). \tag{8}$$

Доказательство. По теореме 3 из [4] для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $y^n = (L)\int\limits_{\Lambda_k^n} c(\omega)e_n^\omega\, d\mu(\omega)$. Так как при $m \leqslant n$ имеет место равенство $P_m(y^n) = (L)\int\limits_{\Lambda_k^n} c(\omega)P_m(e_n^\omega)\, d\mu(\omega) = (L)\int\limits_{\Lambda_k^n} c(\omega)e_m^\omega\, d\mu(\omega)$ ([3], с.128), а по теореме 2 из [4] для любого $n \in \mathbb{N}$ $\|y^n\|^2 \leqslant \int\limits_\Omega |c(\omega)|^2\, d\mu(\omega) < \infty$, то по лемме 1 последовательность y^n сходится. $\square$

Доказанная теорема является аналогом известной для ортонормированных систем теоремы Рисса–Фишера ([3], с. 414).

Следствие 1.. Если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — обобщенная ортоподобная неотрицательная система разложения в H, то для любого $y \in H$ верно равенство

$$y = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widehat{y}_\omega e_n^\omega\, d\mu(\omega). \tag{9}$$

Действительно, $P_n(y) = \int\limits_\Omega \widehat{y}_\omega^n e_n^\omega\, d\mu(\omega)$, следовательно, по теореме 1

$$\left\|P_n(y) - \int_\Omega \widehat{y}_\omega e_n^\omega\, d\mu(\omega)\right\|^2 = \int_\Omega |\widehat{y}_\omega^n - \widehat{y}_\omega|^2\, d\mu(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и по теореме 3 следствие верно.

Замечание. Если в формуле (7) рассматривать внутренний предел как несобственный интеграл Лебега, то при условии теоремы 3 в H существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_\Omega c(\omega)e_n^\omega\, d\mu(\omega)$, который естественно обозначить короче.

Определение 7.. Будем в дальнейшем $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega c(\omega)e_n^\omega\, d\mu(\omega)$, в котором интеграл понимается как несобственный интеграл Лебега, обозначать

$$\int_\Omega c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega\, d\mu(\omega)$$

и называть интегралом от обобщенной ортоподобной неотрицательной системы разложения $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ с коэффициентами $c(\omega)$. Тем самым сможем короче записывать равенства (7)–(9).

Следствие 2. (оценка точности приближения). Пусть $c(\omega)$ — функция со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $|c(\omega)|^2$ интегрируема по Лебегу на Ω, функция $c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega$ измерима на Ω и E — измеримое подмножество Ω. Тогда существуют собственные или несобственнные (как в примечании выше) интегралы Лебега от функции $c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega$ по Ω и по E и

$$\left\|\int_\Omega c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega\, d\mu(\omega) - \int_E c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega\, d\mu(\omega)\right\|^2 \leqslant \int_{\Omega\setminus E}|c(\omega)|^2\, d\mu(\omega).$$

Замечание. Если при условиях следствия $\int\limits_\Omega c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega\, d\mu(\omega)$ обозначить через y, то оценка точности приближения будет выглядеть как

$$\left\|y - \int_E c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega d\mu(\omega)\right\|^2 \leqslant \int_{\Omega\setminus E}|c(\omega)|^2 d\mu(\omega).$$

В частности, для любого элемента $y \in H$ и любого E — измеримого подмножества Ω

$$\left\| y - \int_E \widehat{y}_\omega \boldsymbol{e}^\omega \, d\mu(\omega) \right\|^2 \leqslant \int_{\Omega \setminus E} |\widehat{y}_\omega|^2 \, d\mu(\omega).$$

Это замечание непосредственно вытекает из утверждения 4 и равенства (1). Последние оценки являются аналогами известной в теории рядов Фурье оценки точности приближения — тождества Бесселя.

3. Вопросы измеримости ортоподобных систем. Пространство коэффициентов разложений

В ряде мест предыдущего параграфа автор фактически повторяет известные в теории пространств Лебега L^p доказательства и рассуждения, т. к. прямая ссылка недопустима из-за возможной неизмеримости функций $\widehat{y}_\omega^n = (y, e_n^\omega)$. В самом деле, если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ — обобщенная ортоподобная система разложения в H, а $\theta(\omega)$ — функция на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $|\theta(\omega)| \equiv 1$ на Ω, то для любого элемента $y \in H_n$ и любых $\omega \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $(y, \theta(\omega)e_n^\omega)\theta(\omega)e_n^\omega = (y, e_n^\omega)e_n^\omega$ и, значит, система $\{\theta(\omega)\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — также ортоподобная система разложения в H, но функции $(y, \theta(\omega)e_n^\omega) = \overline{\theta(\omega)}(y, e_n^\omega)$ при этом могут оказаться неизмеримыми. Вместе с функциями $\widehat{y}_\omega^n$ неизмеримой может быть и функция $\widehat{y}_\omega$. В связи с этим введем

Определение 8.. Неотрицательную обобщенную ортоподобную систему $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ будем называть *измеримой*, если все функции $\widehat{y}_\omega^n = (y, e_n^\omega)$ измеримы.

В случае счетно-конечного пространства с мерой Ω любую неотрицательную обобщенную ортоподобную систему $\{e_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N},\,\omega\in\Omega}$ можно сделать измеримой умножением на функцию $\theta(\omega)$, по модулю равную единице. Для доказательства этого понадобится

Лемма 2. ([5]). *Если пространство Ω со счетно-аддитивной неотрицательной мерой μ счетно-конечно, т. е. является не более чем счетным объединением множеств конечной меры, а Ξ — множество функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, причем для любых двух функций $\varphi(\omega), \psi(\omega) \in \Xi$ произведение $\varphi(\omega)\overline{\psi(\omega)}$ измеримо на Ω, то существует такая функция $\theta(\omega)$ на Ω со значениями соответственно в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $|\theta(\omega)| = 1$ на Ω, что для любой функции $\varphi(\omega) \in \Xi$ функция $\overline{\theta(\omega)}\varphi(\omega)$ измерима на Ω.*

Теорема 5. (об измеримости системы). *Если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega} \equiv \{e_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N},\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H, а пространство с мерой Ω счетно-конечно, то существует такая функция $\theta(\omega)$ на Ω со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $|\theta(\omega)| = 1$ на Ω, что $\{\theta(\omega)e_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N},\omega\in\Omega}$ — измеримая неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H.*

Доказательство. В силу определения 5 для любого $y \in H$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\widehat{y}_\omega^n \equiv (y, e_n^\omega) = (P_n(y), P_n(e_k^\omega)) = (P_n(y), e_k^\omega)$, где $k > n$, и, следовательно, по утверждению 1 для любых элементов $y, z \in H$ и для любых $n, m \in \mathbb{N}$ $\;\widehat{y}_\omega^n \overline{\widehat{z}_\omega^m}$ — интегрируемая по Лебегу на Ω функция,

$$(L)\int_\Omega \widehat{y}_\omega^n \overline{\widehat{z}_\omega^m} \, d\mu(\omega) = (L)\int_\Omega (P_n(y), e_k^\omega)\overline{(P_m(z), e_k^\omega)} \, d\mu(\omega) = (P_n(y), P_m(y)),$$

где $k \geqslant n$, $k \geqslant m$. Значит, пространство с мерой Ω и множество функций $\Xi = \{\widehat{y}_\omega^n\}_{n\in\mathbb{N},\, y\in H}$ удовлетворяют условиям леммы, функция $\theta(\omega)$ из нее и будет подходящей. $\square$

В дальнейшем изложении часто будем ограничиваться рассмотрением измеримых неотрицательных обобщенных ортоподобных систем разложения, что по доказанной теореме в случае счетно-конечного Ω не сужает общности.

Для измеримой неотрицательной обобщенной ортоподобной системы разложения отображение $y \longrightarrow \widehat{y}_\omega$ по теореме 1 является унитарным (сохраняющим скалярное произведение) линейным оператором из гильбертова пространства H в пространство Лебега $L^2(\Omega)$ и образ H — замкнутое подпространство в $L^2(\Omega)$.

Определение 9.. Будем в дальнейшем при рассмотрении измеримой неотрицательной ортоподобной системы разложения образ H в пространстве $L^2(\Omega)$ при отображении $y \longrightarrow \widehat{y}_\omega$ обозначать $L^2_H(\Omega)$ или короче L^2_H. Это множество коэффициентов $\widehat{y}_\omega$ элементов $y \in H$

$$L^2_H(\Omega) = \{c(\omega) \in L^2(\Omega) : c(\omega) = \widehat{y}_\omega \text{ для некоторого } y \in H\}.$$

Как показывают замечания 4 и 5 к определению 5, в случае систем, соответствующих преобразованию Фурье или преобразованию Гильберта, $L^2_H(\Omega) = L^2(\Omega)$, где Ω — это $\mathbb{R}$ с μ — обычной мерой Лебега. В общем случае $L^2_H(\Omega)$ может не совпадать с $L^2(\Omega)$. Так конечномерные неотрицательные ортоподобные системы в $H = \mathbb{R}^n$ или в $H = \mathbb{C}^n$ могут состоять из K векторов, где $K > n$ [2]. В этом случае изометричное H пространство $L^2_H(\Omega)$ n-мерно, а содержащее его пространство $L^2(\Omega)$ K-мерно, Ω состоит из K точек. Автор не знает примеров неотрицательных ортоподобных систем, исключая случай ортонормированных систем, когда $L^2_H(\Omega) = L^2(\Omega)$.

В случае $L^2_H(\Omega) \neq L^2(\Omega)$ естественно рассмотреть и другие возможные по теореме 3 разложения элементов $y \in H$. При этом возникает вопрос о существовании удовлетворяющих условиям теоремы 3 последовательностей измеримых множеств $\{\Lambda^n_k\}_{k=1}^\infty$, что связано с измеримостью функций $c(\omega)e^\omega_n$ из формулы (8). Введем

Определение 10.. Обобщенную систему $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω) будем называть L^2-*измеримой* , если для любой функции $c(\omega)$ из пространства Лебега $L^2(\Omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ все функции $c(\omega)e^\omega_n$ измеримы как функции на Ω со значениями в H.

Теорема 6. (о L^2-измеримости). *Если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H, то для ее L^2-измеримости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

а) *для каждой функции $c(\omega) \in L^2(\Omega)$, каждого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ конечной меры и каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $c(\omega)e^\omega_n$ почти сепарабельнозначна на E*;

б) *для каждого $y \in H$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $c(\omega)\widehat{y}^n_\omega$ измерима на Ω.*

Теорема непосредственно следует из ([3], с. 166).

Следствие (о L^2-измеримости). Если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H, то для ее L^2-измеримости достаточно, чтобы она была измерима, а H сепарабельно.

Лемма 3. (о существовании подходящих исчерпываний). *Если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная L^2-измеримая система разложения в H, то для любой функции $c(\omega) \in L^2(\Omega)$ найдется такое исчерпывание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $c(\omega)e^\omega_n$ интегрируема по Лебегу на Ω_k.*

Доказательство. Множества $\Omega^n_k = \{\omega \in \Omega : 1/k < |c(\omega)| \text{ и } \|c(\omega)e^\omega_n\| < k\} \cup \{\omega \in \Omega : c(\omega) = 0\}$, $\Omega_k = \bigcap_{n=1}^\infty \Omega^n_k$ являются измеримыми, т. к. по условию функции $c(\omega)$ и $c(\omega)e^\omega_n$ измеримы. Функция $c(\omega) \in L^2(\Omega)$ отлична от нуля лишь на подмножествах конечной меры множеств Ω^n_k и Ω_k, на этих подмножествах измеримая функция $c(\omega)e^\omega_n$ ограничена, а значит, интегрируема. □

Теорема 7.. *Если $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная L^2-измеримая система разложения в H, то для любой функции $c(\omega) \in L^2(\Omega)$ существует в пространстве H элемент*

$$y = \int_\Omega c(\omega)\boldsymbol{e}^\omega \, d\mu(\omega) \tag{10}$$

(см. определение 7).

Эта теорема — непосредственное следствие теоремы 4 и леммы 3.

В дальнейшем при рассмотрении неотрицательной обобщенной измеримой ортоподобной системы разложения будем для любого элемента $y \in H$ множество функций $c(\omega) \in L^2(\Omega)$, для которых выполняется равенство (10), обозначать $L^2_y(\Omega)$ или короче L^2_y.

Теорема 8.. *Пусть $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная L^2-измеримая обобщенная ортоподобная система разложения в H, тогда подпространство L^2_0 — ортогональное дополнение L^2_H в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$. Замкнутое подпространство L^2_0 сдвигом на любой элемент множества L^2_y переходит в L^2_y. Функция $\widehat{y}_\omega$ является ортогональной проекцией L^2_y на L^2_H.*

Доказательство. Из формул (1), (6) и теоремы 2 сразу следует, что L^2_0 — ортогональное дополнение L^2_H и, значит, замкнутое подпространство ([3], с. 270). Так как разность любых двух элементов L^2_y — элемент L^2_0, а сумма любого элемента L^2_y с любым элементом L^2_0 — элемент L^2_y, то L^2_0 сдвигом на любой элемент L^2_y переходит в L^2_y. Ортогональной проекцией L^2_y на L^2_H будет функция из пересечения L^2_y и L^2_H, т. е. функция $\widehat{y}_\omega$. □

4. Об ортогональных проекциях ортогональных и обобщенных ортоподобных систем

Простейшим методом получения новых неотрицательных обобщенных ортоподобных систем разложения является проектирование уже известных систем.

Теорема 9.. *Если P — оператор ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ на подпространство H, а $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в $\mathbb{H}$ (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω), то ее проекция $\{P(\boldsymbol{e}^\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, где $P(\boldsymbol{e}^\omega)$ — последовательность $\{P(e^\omega_n)\}_{n=1}^\infty$, — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H (с системой подпространств $\{P(H_n)\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω) (причем если начальная система измерима или L^2-измерима, то спроектированная система соответственно также измерима или L^2-измерима).*

Доказательство. Так как $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ — система замкнутых расширяющихся подпространств в $\mathbb{H}$, объединение которых всюду плотно в $\mathbb{H}$, то, следовательно, $\{P(H_n)\}_{n=1}^\infty$ — система замкнутых расширяющихся подпространств в $P(\mathbb{H}) = H$, объединение которых всюду плотно в H. В [5] доказано, что проекция неотрицательной ортоподобной системы разложения на подпространство — неотрицательная ортоподобная система разложения в этом подпространстве. Следовательно, $\{P(e^\omega_n)\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в $P(H_n)$. Так как e^ω_n — ортогональная проекция e^ω_{n+1} на H_n, то $P(e^\omega_n)$ — ортогональная проекция $P(e^\omega_{n+1})$ на $P(H_n)$. Согласно определениям 4–6 $\{P(\boldsymbol{e}^\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H (с системой подпространств $\{P(H_n)\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω).

Если $y \in H$, то функция $\widehat{y}_\omega$, соответствующая начальной системе $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$, соответствует и спроектированной системе $\{P(e^\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ и поэтому, если начальная система измерима или L^2-измерима, то спроектированная система соответственно также измерима или L^2-измерима. □

Эта теорема позволяет из ортонормированных, ортогональных и неотрицательных ортоподобных систем с помощью проектирования получать примеры неотрицательных обобщенных ортоподобных систем разложения. Естественно выяснить, когда обобщенная ортоподобная система фактически является ортогональной системой в H или проекцией ортогональной системы из некоторого содержащего H гильбертова пространства или ортоподобной системой в H (т. е. когда e^ω_n — ортогональные проекции на H_n ортогональной системы из H или из некоторого содержащего H гильбертова пространства либо ортогональные проекции ортоподобной системы в H).

Теорема 10.. *Пусть $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω). Она вся (почти вся) является некоторой неотрицательной ортоподобной системой разложения $\{\boldsymbol{e}^\omega\} \subset H$ с ω, пробегающим все (почти все) Ω в том смысле, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ элемент e_n^ω — ортогональная проекция $\boldsymbol{e}^\omega$ на H_n тогда и только тогда, когда для каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|e_n^\omega\| < +\infty$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, т. к. если для некоторого $\omega \in \Omega$ при всех $n \in \mathbb{N}$ элементы e_n^ω — ортогональные проекции $\boldsymbol{e}^\omega$ на H_n, то $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|e_n^\omega\| \leqslant \|\boldsymbol{e}^\omega\| < +\infty$.

Докажем достаточность. Согласно лемме 1 для каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ существует элемент $\boldsymbol{e}^\omega = \lim\limits_{n\to\infty} e_n^\omega$ и $P_n(\boldsymbol{e}^\omega) = e_n^\omega$. Осталось только доказать, что система $\{\boldsymbol{e}^\omega\}$ с ω, пробегающим все (почти все) Ω, — неотрицательная ортоподобная система разложения в H. Для любого элемента $y \in H_n$ по теореме 1 $\widehat{y}_\omega = \lim\limits_{m\to\infty} (y, e_m^\omega) = (y, e_n^\omega)$ и, следовательно, $\widehat{y}_\omega = (y, \boldsymbol{e}^\omega)$ для всех (почти всех) $\omega \in \Omega$. Так как $\bigcup_{n=1}^\infty H_n$ всюду плотно в H, то для любого $y \in H$ $\widehat{y}_\omega = (y, \boldsymbol{e}^\omega)$ для всех (почти всех) $\omega \in \Omega$. По теореме 1 для любого элемента $y \in H$ выполняется аналог равенства Парсеваля–Планшереля $\|y\|^2 = (L) \int\limits_\Omega |\widehat{y}_\omega|^2 \, d\mu(\omega)$, а по [5] это необходимое и достаточное условие того, чтобы система $\{\boldsymbol{e}^\omega\}$ была неотрицательной ортоподобной системой разложения в H. $\square$

Лемма 4.. *Пусть $\{e^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H. Если $\mu(\tau) > 0$, где $\tau \in \Omega$, то $\|e^\tau\|^2 \leqslant 1/\mu(\tau)$.*

Доказательство. По аналогу равенства Парсеваля

$$\|e^\tau\|^2 = \int_\Omega |(e^\tau, e^\omega)|^2 \, d\mu(\omega) \geqslant \|e^\tau\|^4 \mu(\tau),$$

значит, утверждение леммы верно. $\square$

Теорема 11.. *Пусть $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω). Она вся (почти вся) является некоторой полной ортонормированной (ортогональной) системой $\{\boldsymbol{e}^\omega\}$ из H с ω, пробегающим все (почти все) Ω в том смысле, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ элемент e_n^ω — ортогональная проекция $\boldsymbol{e}^\omega$ на H_n тогда и только тогда, когда для каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ $\boldsymbol{e}^\omega = \{e_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является нулевой последовательностью, $\mu(\omega) = 1$ ($\mu(\omega) > 0$) и для каждого (почти каждого) $\rho \in \Omega$, для каждого (почти каждого) $\tau \in \Omega$, $\tau \neq \rho$, $\lim\limits_{n\to\infty} (e_n^\rho, e_n^\tau) = \int\limits_\Omega \widehat{\boldsymbol{e}^\rho}_\omega \overline{\widehat{\boldsymbol{e}^\tau}_\omega} \, d\mu(\omega) = 0$.*

Доказательство. Необходимость очевидна, т. к.

1) для ортонормированной (ортогональной) системы $\{\boldsymbol{e}^\omega\}$ все индексы ω имеют меру $\mu(\omega) = 1$ (> 0);

2) скалярное произведение разных ее членов $(\boldsymbol{e}^\rho, \boldsymbol{e}^\tau) = \lim\limits_{n\to\infty} (e_n^\rho, e_n^\tau) = \int\limits_\Omega \widehat{\boldsymbol{e}^\rho}_\omega \overline{\widehat{\boldsymbol{e}^\tau}_\omega} \, d\mu(\omega) = 0$.

Докажем достаточность. Из леммы 2 и теоремы 9 следует, что

3) подсистема $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\mu(\omega)>0}$ является некоторой неотрицательной ортоподобной системой разложения $\{\boldsymbol{e}^\omega\} \subset H$ с такими $\omega \in \Omega$, что $\mu(\omega) > 0$.

Скалярное произведение двух разных ее членов $(\boldsymbol{e}^\rho, \boldsymbol{e}^\tau) = \lim\limits_{n\to\infty} (e_n^\rho, e_n^\tau) = \int\limits_\Omega \widehat{\boldsymbol{e}^\rho}_\omega \overline{\widehat{\boldsymbol{e}^\tau}_\omega} \, d\mu(\omega) = 0$, значит, это ортогональная система. При этом по аналогу равенства Парсеваля $\|\boldsymbol{e}^\rho\|^2 = |(\boldsymbol{e}^\rho, \boldsymbol{e}^\rho)|^2 \mu(\rho)$ и, значит, если $\mu(\rho) = 1$, то $\|\boldsymbol{e}^\rho\| = 1$. $\square$

Теорема 12.. *Пусть $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω). Она вся (почти вся) является ортогональной проекцией на H некоторой полной ортонормированной (ортогональной)* *системы $\{\boldsymbol{\epsilon}^\omega\}$ с ω, пробегающим все (почти все) Ω, из какого-то содержащего H гильбертова пространства в том смысле, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ элемент e_n^ω — ортогональная проекция $\boldsymbol{\epsilon}^\omega$ на H_n тогда и только тогда, когда для каждого (почти каждого) $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega) = 1$ $(\mu(\omega) > 0)$.*

Доказательство. Необходимость следует из п. 1) предыдущего доказательства.

Достаточность. Согласно п. 3) предыдущего доказательства и [5] система $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\mu(\omega)>0}$ является ортогональной проекцией на H некоторой полной ортонормированной (ортогональной) системы $\{\boldsymbol{\epsilon}^\omega\}_{\mu(\omega)>0}$ из какого-то содержащего H гильбертова пространства. □

Следствие. Любая не более чем счетная (т. е. с не более чем счетным Ω) обобщенная ортоподобная система почти вся (а если $\mu(\omega) > 0$ для каждого $\omega \in \Omega$, то вся) является ортогональной проекцией на H некоторой полной ортогональной системы из некоторого содержащего H гильбертова пространства.

5. Критерий неотрицательных обобщенных ортоподобных систем — аналог равенства Парсеваля–Планшереля

Теорема 13.. *Неотрицательная L^2-измеримая обобщенная система $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω) будет неотрицательной обобщенной ортоподобной системой разложения в H тогда и только тогда, когда для любого элемента $y \in H$ выполняется аналог равенства Парсеваля–Планшереля*

$$\|y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(y, e_n^\omega)|^2 \, d\mu(\omega).$$

Доказательство. Необходимость выполнения аналога равенства Парсеваля–Планшереля видна из теоремы 1.

Докажем достаточность. Если $y \in H_n$, то для $m > n$ $(y, e_m^\omega) = (y, e_n^\omega)$ и, значит, $\|y\|^2 = \int\limits_\Omega |(y, e_n^\omega)|^2 \, d\mu(\omega)$. Тогда по теореме 10 из [5] $\{e_n^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H_n, а значит, $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H. □

В случае счетно-конечного Ω и сепарабельного H требование L^2-измеримости можно отбросить.

Теорема 14.. *Неотрицательная обобщенная система $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из счетно-конечного пространства с мерой Ω будет неотрицательной обобщенной ортоподобной системой разложения в H тогда и только тогда, когда для любого элемента $y \in H$ выполняется аналог равенства Парсеваля–Планшереля*

$$\|y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(y, e_n^\omega)|^2 \, d\mu(\omega).$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 13 с заменой ссылки на теорему 10 из [5] ссылкой на теорему 11 из [5].

6. О конструкциях обобщенных ортоподобных систем

Докажем ряд теорем о методах построения неотрицательных обобщенных ортоподобных систем разложения. Простейшей из них является

Теорема 15.. *Если $\boldsymbol{P}$ — оператор проектирования в гильбертовом пространстве H на подпространство H', а $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω) (по определениям 4–6), $\boldsymbol{e}^\omega = \{e_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}}$, то ее проекция $\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}^\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, где $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}^\omega) = \{\boldsymbol{P}(e_n^\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H' (с системой подпространств $\{H'_n\}_{n=1}^\infty$, где $H'_n = \boldsymbol{P}(H_n)$, и индексами из Ω).*

Доказательство. Если P_n — оператор ортогонального проектирования из H на H_n, то композиция $\boldsymbol{P}P_n$ является оператором ортогонального проектирования из H' на H'_n и $\boldsymbol{P}P_n(e_{n+1}^\omega) = \boldsymbol{P}(e_n^\omega)$, а согласно [5] $\{\boldsymbol{P}(e_n^\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H'_n. □

Укажем еще один метод построения неотрицательных обобщенных ортоподобных систем разложения.

Теорема 16.. *Пусть $\{\boldsymbol{e}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — неотрицательная обобщенная ортоподобная система разложения в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из Ω) (по определениям 4 и 5), $\boldsymbol{e}^\omega = \{e_n^\omega\}_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть Υ — пространство со счетно-аддитивной неотрицательной мерой ν, $\Omega\times\Upsilon$ — произведение пространств Ω и Υ, $\mu\times\nu$ — произведение мер μ и ν ([3], с. 201–206), Φ_υ — такое измеримое отображение Υ в множество линейных непрерывных операторов, отображающих H в H и коммутирующих с операторами P_n ортогонального проектирования H на H_n, что*

$$\int_\Upsilon \Phi_\upsilon\cdot\Phi_\upsilon^*\,d\nu(\upsilon) = E, \tag{11}$$

E — тождественный оператор, под Φ^* понимается оператор, сопряженный с Φ, интеграл берется от функций со значениями в нормированном пространстве линейных непрерывных операторов. Тогда система $\{\Phi_\upsilon(\boldsymbol{e}^\omega)\}_{(\omega,\upsilon)\in\Omega\times\Upsilon}$, где $\Phi_\upsilon(\boldsymbol{e}^\omega) = \{\Phi_\upsilon(e_n^\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, — ортоподобная неотрицательная система разложения в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из $\Omega\times\Upsilon$).

Доказательство. Сначала покажем, что для каждого натурального n $\{\Phi_\upsilon(e_n^\omega)\}_{(\omega,\upsilon)\in\Omega\times\Upsilon}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H_n.

Пусть $y\in H_n$, т. к. $(y,\Phi_\upsilon(e_n^\omega)) = (\Phi_\upsilon^*(y), e_n^\omega)$, то

$$\Phi_\upsilon^*(y) = \int_\Omega (y,\Phi_\upsilon(e_n^\omega))e^\omega\,d\mu(\omega).$$

Так как Φ_υ — непрерывный линейный оператор, то, используя ([3], с. 128), имеем

$$\Phi_\upsilon\cdot\Phi_\upsilon^*(y) = \int_\Omega (y,\Phi_\upsilon(e_n^\omega))\Phi_\upsilon(e_n^\omega)\,d\mu(\omega)$$

как для собственного, так и несобственного интегрирования по Лебегу. В силу (11)

$$y = (L)\int_\Upsilon \Phi_\upsilon\cdot\Phi_\upsilon^*(y)\,d\nu(\upsilon) = (L)\int_\Upsilon\left(\int_\Omega (y,\Phi_\upsilon(e_n^\omega))\Phi_\upsilon(e_n^\omega)\,d\mu(\omega)\right)d\nu(\upsilon).$$

Теорема доказана в случае, когда внутренний интеграл в правой части последнего равенства — собственный интеграл Лебега. В случае, когда этот интеграл несобственный, требуется дополнительное рассуждение. По условию теоремы $\Phi_\upsilon\cdot\Phi_\upsilon^*$, а значит, и $\|\Phi_\upsilon\cdot\Phi_\upsilon^*\|$ интегрируема по Лебегу на Υ. По утверждениям 1 и 3

$$\left\|\int_{\Omega_k}(y,\Phi_\upsilon(e_n^\omega))e_n^\omega\,d\mu(\omega)\right\| = \left\|\int_{\Omega_k}(\Phi_\upsilon^*(y),e_n^\omega)e_n^\omega\,d\mu(\omega)\right\| \leqslant \|\Phi_\upsilon^*(y)\| \leqslant \|\Phi_\upsilon^*\|\cdot\|y\|.$$

Так как для любого линейного непрерывного оператора A из H в H выполняется равенство

$$\|A\cdot A^*\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1,\ \|z\|\leqslant 1}(A\cdot A^*(y),z) = \sup_{\|y\|\leqslant 1,\ \|z\|\leqslant 1}(A^*(y),A^*(z)) = \|A^*\|^2 = \|A\|^2,$$

то значит,

$$\left\|\Phi_v\Big(\int_{\Omega_k}(y,\Phi_v(e_n^\omega))e_n^\omega\,d\mu(\omega)\Big)\right\| \leqslant \|\Phi_v\|\cdot\|\Phi_v^*\|\cdot\|y\| = \|\Phi_v\cdot\Phi_v^*\|\cdot\|y\|,$$

справа стоит интегрируемая по Лебегу на Υ функция. Пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла ([3], с. 168), получаем

$$\begin{aligned} y = (L)\int_\Upsilon \Phi_v\cdot\Phi_v^*(y)\,d\nu(v) &= (L)\int_\Upsilon\Big(\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega_k}(y,\Phi_v(e_n^\omega))\Phi_v(e_n^\omega)\,d\mu(\omega)\Big)d\nu(v) = \\ &= \lim_{k\to\infty}(L)\int_\Upsilon\int_{\Omega_k}(y,\Phi_v(e_n^\omega))\Phi_v(e_n^\omega)\,d\mu(\omega)d\nu(v) = \\ &= \lim_{k\to\infty}(L)\int_{\Upsilon\times\Omega_k}(y,\Phi_v(e_n^\omega))\Phi_v(e_n^\omega)\,d(\nu(v)\times\mu(\omega)). \end{aligned}$$

Следовательно, для каждого натурального n $\{\Phi_v(e_n^\omega)\}_{(\omega,v)\in\Omega\times\Upsilon}$ — неотрицательная ортоподобная система разложения в H_n.

По условию операторы Φ_v и P_n коммутируют, поэтому $P_n(\Phi_v(e_{n+1}^\omega)) = \Phi_v(P_n(e_{n+1}^\omega)) = \Phi_v(e_n^\omega)$.

По определениям 4–6 система $\{\Phi_v(\boldsymbol{e}^\omega)\}_{(\omega,v)\in\Omega\times\Upsilon}$, где $\Phi_v(\boldsymbol{e}^\omega) = \{\Phi_v(e_n^\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$, — ортоподобная неотрицательная система разложения в H (с системой подпространств $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ и индексами из $\Omega\times\Upsilon$). $\square$

Наиболее известными континуальными неотрицательными ортоподобными системами разложения являются всплески Д. Габора и всплески Дж. Морле. Покажем, что они строятся по доказанной теореме на основе неотрицательной обобщенной ортоподобной системы функций $\{\exp(2\pi i\omega x)\}_{\omega\in\mathbb{R}}$, определяющей преобразование Фурье (см. замечание 4 к определению 6).

Всплески Габора. Порожденное одной функцией $w(x)$ семейство функций

$$w_{\lambda,\beta}(x) = e^{2\pi i\lambda x}w(x-\beta),$$

где параметры λ, β и переменная x из $\mathbb{R}$, называют системой всплесков Габора. Если функция $w\in L^2(\mathbb{R})$ и $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, то для любой функции $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R}(f,w_{\lambda,\beta})w_{\lambda,\beta}(x)\,d\lambda\,d\beta,$$

где последний интеграл понимается как предел в $L^2(\mathbb{R})$

$$\int_\mathbb{R}\int_{|\lambda|\leqslant A}(f,w_{\lambda,\beta})w_{\lambda,\beta}(x)\,d\lambda\,d\beta$$

при $A\to\infty$.

Этот результат при дополнительном предположении суммируемости на $\mathbb{R}$ функции $w(x)$ был получен Д. Габором [9] (или см. [10], с. 317–320). В более общем виде он изложен в [11], [12] и в [6].

Если для $\beta\in\mathbb{R}$ взять операторы $\Phi_\beta(f)(x) = f(x)w(x-\beta)$, то

$$\int_\mathbb{R}\Phi_\beta\cdot\Phi_\beta^*\,d\beta = \int_\mathbb{R}|w(\beta)|^2\,d\beta\cdot E = E,$$

где E — тождественный оператор, интеграл берется от функций со значениями в нормированном пространстве линейных непрерывных операторов. Используя теоремы 14 и 9, можно констатировать, что семейство всплесков Габора $\{w_{\lambda,\beta}(x)\}_{(\lambda,\beta)\in\mathbb{R}^2}$ с обычной мерой Лебега на $\mathbb{R}^2$ будет неотрицательной ортоподобной системой разложения.

Всплески Морле. Порожденное одной функцией $\psi(x)$ семейство функций

$$\psi_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\psi\Big(\frac{x-\beta}{\alpha}\Big),$$

где параметр $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, параметр $\beta \in \mathbb{R}$ и переменная $x \in \mathbb{R}$, называют системой всплесков Морле. Если функция $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ и

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\lambda)|^2}{|\lambda|}\, d\lambda = 1,$$

где $\widehat{\psi}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $\psi(x)$, то для любой функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f, \psi_{\alpha,\beta}) \psi_{\alpha,\beta}(x)\, d\beta\, \frac{d\alpha}{\alpha^2},$$

где последний интеграл понимается как предел в $L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{|\alpha| \geqslant \varepsilon} \int_{\mathbb{R}} (f, \psi_{\alpha,\beta}) \psi_{\alpha,\beta}(x)\, d\beta\, \frac{d\alpha}{\alpha^2}$$

при $\varepsilon \to +0$.

Этот результат при дополнительном предположении суммируемости на $\mathbb{R}$ функции $\psi(x)$ был получен А. Гроссманном и Дж. Морле [13] (или [10], с. 325–329). В более общем виде он изложен в [11], [12] и в [6].

Если взять для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ операторы $\Phi_\alpha(f)(x) = \sqrt{|\alpha|}\, \widehat{\psi}(\alpha x) f(x)$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_\alpha \cdot \Phi_\alpha^* \frac{d\alpha}{\alpha^2} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\alpha x)|^2 \frac{d\alpha}{\alpha} \cdot E = E,$$

где E — тождественный оператор, интеграл берется от функций со значениями в нормированном пространстве линейных непрерывных операторов, а $\widehat{\psi}$ — преобразование Фурье функции $\psi(x)$. Используя теоремы 14 и 9, можно констатировать, что семейство всплесков $\{\sqrt{|\alpha|}\, \widehat{\psi}(\alpha x) \exp 2\pi i \beta x\}_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2}$ с мерой на $\mathbb{R}^2$, задаваемой дифференциалом $\frac{d\alpha}{\alpha^2} d\beta$, будет неотрицательной ортоподобной системой разложения. Применив к ней унитарный (сохраняющий скалярное произведение) оператор — преобразование Фурье, получим неотрицательную ортоподобную систему $\{\psi_{\alpha,\beta}(x)\}_{(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}}$ — систему всплесков Морле.

Заметим, что в [6] оба приведенных примера также получаются при помощи некоторой общей конструкции, связанной с унитарным оператором — преобразованием Фурье.

В заключение статьи отметим, что ряд построенных в [6] систем разложения можно получить аналогичным образом, исходя из неотрицательных обобщенных ортоподобных систем, связанных с преобразованием Гильберта (см. замечание 5 к определению 4) или с преобразованием Фурье на локально-компактной топологической группе, или с преобразованием Рисса.

Литература

1. Лукашенко Т.П. *О системах разложения, подобных ортогональным* // Международн. конф. по теор. приближ. функций, посв. памяти проф. П.П. Коровкина. Калуга, 26–29 июня 1996 г. Тез. докл. Т. 2. – Тверь: Изд–во Тверск. ун-та, 1996. – С. 135–136.
2. Лукашенко Т.П. *Системы разложения, подобные ортогональным* // Фундамент. и прикл. матем. – 1997. – Т. 3. – № 2. – С. 487–517.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* Ч. 1. – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
4. Лукашенко Т.П. *Ортоподобные неотрицательные системы разложения* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. – 1997. – № 5. – С. 27–31.
5. Лукашенко Т.П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным* // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – № 12. – С. 57–72.
6. Лукашенко Т.П. *Системы разложения на пространствах с мерой* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – №1. – С. 165–174.
7. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* – М.: Мир, 1974. – 336 с.

8. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 1071 с.
9. Gabor D. *Theory of communication* // J. Inst. Elec. Eng. – London, 1946. – V. 93. – № 3. – P. 429–457.
10. Gasquet C., Witomski P. *Analyse de Fourier et applications.* – Paris: Masson, 1990. – 354 p.
11. Лукашенко Т.П. *Всплески на топологических группах* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 332. – № 1. – С. 15–17.
12. Лукашенко Т.П. *Всплески на топологических группах* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58. – № 3. – С. 88–102.
13. Grossmann A., Morlet J. *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape* // SIAM J. Math. Anal. – 1984. – V. 15. – № 4. – P. 723–736.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступили
первый вариант 30.11.1998
окончательный вариант 11.05.2000