ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 517.544

Е.А. ШИРОКОВА

СВЕДЕ́НИЕ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ В СЛУЧАЕ УГЛОВЫХ ТОЧЕК НА ИСКОМОМ И НА ИЗВЕСТНОМ КОНТУРАХ

В [1] решение внутренней обратной краевой задачи для параметра s сводилось к решению интегрального уравнения Фредгольма для случаев классической постановки [2], [3], когда известные граничные значения $w(s)$ являются функцией с гёльдеровой производной, а также для обобщенной постановки той же задачи — в случае, когда $w'(s)$ и ее обратная величина являются интегрируемыми по Лебегу. В классической постановке предусматривалось также отличие $w'(s)$ от нуля, таким образом, искомый контур получался гладким. В обобщенной постановке указанные ограничения частично снимались, однако получаемое решение принадлежало более широкому классу функций и не выявляло поведения решения в окрестности точек, где происходят нарушения классических условий. В первой части данной статьи допускается обращение в 0 или в ∞ функции $w'(s)$ в отдельных точках и приводится решение задачи сведением к интегральному уравнению. Во второй части статьи получено ослабление условий на исходные данные для обобщенной постановки. Кроме того, в отличие от [1], допускается угловая точка на известном контуре. Приведены ограничения, когда задача может быть сведена к решению интегрального уравнения.

1. Пусть условия, наложенные на $w(s)$ в [1] в случае классической постановки задачи, нарушаются: в то время как известный контур Γ_w остается гладким, искомый контур Γ_z в точке, соответствующей параметру s_0, образует угол, равный $\frac{\pi}{\gamma}$. Согласно [3], [4] это означает, что

$$w(s) = w(s_0) + \operatorname{sgn}(s-s_0)|s-s_0|^{\gamma}[u_1(s) + iv_1(s)], \quad \gamma \ge 1/2, \quad s \in [0,l], \tag{1}$$

где $u_1^2(s_0) + v_1^2(s_0) \ne 0$, $u_1'(s), v_1'(s) \in C_\alpha[0,l]$, $\alpha \in (0,1]$. Будем предполагать, что контур Γ_w обладает единственной точкой с таким свойством. В остальном ограничения на $w(s)$ те же, что и в [1]: контур Γ_w простой и замкнутый, $w'(s) \ne 0$, $s \in [0,l] \setminus \{s_0\}$. Будем обозначать для $\phi \in C_\alpha[0,l]$

$$\|\phi\|_{H_\alpha} = \sup_{t_1,t_2\in[0,l]} |\phi(t_1) - \phi(t_2)|\, |t_1 - t_2|^{-\alpha}, \quad \|\phi\|_C = \max_{t\in[0,l]} |\phi(t)|.$$

Введем новый параметр для кривой $\Gamma_w : \sigma = \operatorname{sgn}(s-s_0)|s-s_0|^{\gamma}$. Тогда $s = s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma}$, и после введения нового параметра получим

$$\widetilde{w}(\sigma) \equiv w(s(\sigma)) = w(s_0) + \sigma[u_1(s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma}) + iv_1(s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma})],$$

$$\frac{d\widetilde{w}}{d\sigma} = u_1(s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma}) + iv_1(s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma}) + |\sigma|^{1/\gamma}[u_1'(s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma}) + iv_1'(s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma})]\frac{1}{\gamma}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\widetilde{w}}{d\sigma}\Big|_{\sigma_2} - \frac{d\widetilde{w}}{d\sigma}\Big|_{\sigma_1} = \int_{s(\sigma_1)}^{s(\sigma_2)} [u_1'(t) + iv_1'(t)]dt + [|\sigma_2|^{1/\gamma} - |\sigma_1|^{1/\gamma}][u_1'(s(\sigma_2)) + iv_1'(s(\sigma_2))]\frac{1}{\gamma} +$$
$$+ |\sigma_1|^{1/\gamma}[u_1'(s(\sigma_2)) + iv_1'(s(\sigma_2)) - u_1'(s(\sigma_1)) - iv_1'(s(\sigma_1))]\frac{1}{\gamma},$$

где $s(\sigma) = s_0 + \operatorname{sgn}\sigma|\sigma|^{1/\gamma}$. Если $\widetilde{w}(\sigma) \equiv \widetilde{u}(\sigma) + i\widetilde{v}(\sigma)$, то

$$|\widetilde{u}'(\sigma_2) - \widetilde{u}'(\sigma_1)| \le \|u_1'\|_C |\operatorname{sgn}\sigma_2|\sigma_2|^{1/\gamma} - \operatorname{sgn}\sigma_1|\sigma_1|^{1/\gamma}| + \|u_1'\|_C \,||\sigma_2|^{1/\gamma} - |\sigma_1|^{1/\gamma}|\tfrac{1}{\gamma} + \\ + l\|u_1'\|_{H_\alpha} |\operatorname{sgn}\sigma_2|\sigma_2|^{1/\gamma} - \operatorname{sgn}\sigma_1|\sigma_1|^{1/\gamma}|^{\alpha}\tfrac{1}{\gamma} \le K_1|\sigma_2 - \sigma_1|^{\beta},$$

где

$$\beta = \begin{cases} \alpha, & \gamma < 1; \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}, & \gamma > 1. \end{cases}$$

Аналогично,

$$|\widetilde{v}(\sigma_2) - \widetilde{v}(\sigma_1)| \le K_2|\sigma_2 - \sigma_1|^{\beta}.$$

Если контур Γ_w простой, то т.к. при новой параметризации $\widetilde{w}'(\sigma) \ne 0$, легко показать, что существует константа $m > 0$ такая, что $|\widetilde{w}(\sigma_1) - \widetilde{w}(\sigma_2)|\,|\sigma_1 - \sigma_2|^{-1} \ge m > 0$, $|\sigma_1 - \sigma_2| \le [(l - s_0)^\gamma + s_0^\gamma]/2$. Теперь для функции $\widetilde{w}(\sigma)$ выполняются все условия, наложенные на функцию $w(s)$ в [1] при постановке классической обратной краевой задачи. Таким образом, решение задачи сведется к решению интегрального уравнения с ядром $\{\arg[\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau$, удовлетворяющим неравенству [1]

$$\int_0^l \left| \left\{ \arg \frac{\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma_1)}{\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma_2)} \right\}'_\tau \right| d\tau \le K \begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2|^{\beta}, & \beta < 1; \\ |\sigma_1 - \sigma_2|^{1-\epsilon}, & \epsilon > 0, \ \ \beta = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(w) = \ln\left[\frac{dz}{dw}\frac{1}{(w - w(s_0))^{1/\gamma - 1}}\right],$$

аналитическую в D_w. Обозначим

$$p(\sigma) = -\frac{1}{2}\ln[u'^2(s(\sigma)) + v'^2(s(\sigma))] - \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\ln|\widetilde{w}(\sigma) - \widetilde{w}(0)| \equiv \operatorname{Re}\Psi(\widetilde{w}(\sigma)),$$

$$q(\sigma) = \arg\frac{dz}{dw}\Big|_{w=\widetilde{w}(\sigma)} - \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\arg[\widetilde{w}(\sigma) - \widetilde{w}(0)] \equiv \operatorname{Im}\Psi(\widetilde{w}(\sigma)).$$

Нетрудно видеть, что $p(\sigma) \in C_\beta[-s_0^\gamma, (l - s_0)^\gamma]$. Так как

$$\Psi(\widetilde{w}(\sigma)) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_w}\frac{\Psi(\widetilde{w}(\tau))d\widetilde{w}(\tau)}{\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)},$$

то, отделяя мнимые части последнего равенства, получим

$$q(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-l_0^\gamma}^{(l-s_0)^\gamma} q(\tau)\{\arg[\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau d\tau - \frac{1}{\pi}\int_{-l_0^\gamma}^{(l-s_0)^\gamma} p(\tau)\{\ln|\widetilde{w}(\tau) - \widetilde{w}(\sigma)|\}'_\tau d\tau. \tag{2}$$

Решение $q(\sigma)$ этого уравнения согласно [1] удовлетворяет условию $q(\sigma) \in C_\beta[-s_0^\gamma, (l - s_0)^\gamma]$. Теперь , если решение интегрального уравнения найдено, может быть восстановлена функция

$$\Psi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-s_0^\gamma}^{(l-s_0)^\gamma}\frac{p(\sigma) + iq(\sigma)}{\widetilde{w}(\sigma) - w}\widetilde{w}'(\sigma)d\sigma + i\phi_0.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dw} = (w - w(s_0))^{1/\gamma - 1}\exp\Psi(w), \quad z(w) = \int_{w_0}^{w}(w - w(s_0))^{1/\gamma - 1}\exp\Psi(w)dw + C.$$

Искомый контур получается при отображении Γ_w с помощью функции $z(w)$. В случае, когда угловых точек на искомом контуре несколько, следует проводить указанную перепараметризацию контура соответственное число раз — так, чтобы для полученного уравнения контура

$$w = \widetilde{w}(\sigma) = w(s(\sigma_1(\cdots(\sigma_{n-1}(\sigma))\cdots)))$$

функция $\{\arg[\widetilde{w}(\tau)-\widetilde{w}(\sigma)]\}'_\tau$ была гёльдеровой, а затем рассматривать аналитическую в D_w функцию

$$\Psi(w)=\ln\left[\frac{dz}{dw}(w-w(s_1))^{1-1/\gamma_1}\cdots(w-w(s_n))^{1-1/\gamma_n}\right].$$

2. При обобщенной постановке задачи в [1] предполагалось, что $w(s)=u(s)+iv(s)$, $s\in[0,l]$, будучи продолженной с $[0,l]$ l-периодически, удовлетворяет следующим ограничениям: $u(s)$ и $v(s)$ абсолютно непрерывны, $s\in[a,a+l]$, $|w'(s)|\in L_{1+\epsilon}[0,l]$, $\epsilon>0$, $|w'(s)|^{-1}\in L_1[0,l]$, $w(0)=w(l)$, $|w(s_1)-w(s_2)|\,|s_1-s_2|^{-1}>0$, $0<|s_1-s_2|<l/2$, и для почти всех $s_1,s_2\in[a,a+l]$ справедливо неравенство

$$|\arg w'(s_1)-\arg w'(s_2)|\le K\left|\int_{s_1}^{s_2}|w'(s)|ds\right|^\alpha,\quad 0<\alpha\le 1.$$

Покажем, что приведенное ограничение на $|w'(s)|^{-1}$ можно ослабить, а именно, условие $|w'(s)|^{-1}\in L_1[0,l]$ заменить на условие $|w'(s)|^{-1}\in L_\rho[0,l]$, $\rho>0$. Действительно, в [1] указанное ограничение используется дважды: при применении теоремы Зарецкого и при доказательстве того, что $\ln|w'(s)|\in L_\mu[0,l]$ $\forall\mu>1$. Для применения теоремы Зарецкого ([5], с. 238) следует обеспечить выполнение условия $\operatorname{mes}\{s\in[0,l]\mid\sigma'(s)=0\}=0$, и ограничение $\sigma'(s)^{-1}=|w'(s)|^{-1}\in L_\rho[0,l]$, $\rho>0$, является для этого достаточным. Рассмотрим приведенное в [1] доказательство включения $\ln|w'(s)|\in L_\mu[0,l]$ $\forall\mu>1$, заменяя в нем $|w'(s)|$ на $|w'(s)|^\rho$, $0<\rho<1$. При этом из выпуклости вниз функции $\exp y^{1/\mu}$ по y при $y>(\mu-1)^\mu$ следует, что для множества $A=\{s\in[0,l]\mid |\ln^\mu|w'(s)|^\rho|>(\mu-1)^\mu\}$ в случае, если $\operatorname{mes}A>0$, справедливо

$$\exp\sqrt[\mu]{\frac{1}{\operatorname{mes}A}\int_A|\ln^\mu|w'(s)|^\rho|ds}\le\frac{1}{\operatorname{mes}A}\int_A\exp|\ln|w'(s)|^\rho|ds\le[\|w'\|^\rho_{L_\rho}+\|w'^{-1}\|^\rho_{L_\rho}]\operatorname{mes}^{-1}A.$$

Следовательно,

$$\int_0^l|\ln^\mu|w'(s)||ds=\frac{1}{\rho^\mu}\int_0^l|\ln^\mu|w'(s)|^\rho|ds\le$$
$$\le\frac{1}{\rho^\mu}\{(l-\operatorname{mes}A)(\mu-1)^\mu+\operatorname{mes}A\ln^\mu[(\|w'(s)\|^\rho_{L_\rho}+\|w'^{-1}\|^\rho_{L_\rho})\operatorname{mes}^{-1}A]\}<\infty.$$

Таким образом, указанное ослабление ограничения на $w'(s)^{-1}$, расширяя класс исходных данных, позволяет решать внутреннюю обратную краевую задачу в обобщенной постановке так же, как в [1], путем свед́ения к интегральному уравнению.

Нетрудно заметить, что ограничения на $w(s)$ в (1) в первой части при $1/2\le\gamma$ удовлетворяют условиям обобщенной постановки. При решении внутренней обратной краевой задачи, даже в обобщенной постановке, предполагалось, что известный контур Γ_w является гладким. Предположим теперь, что известный контур в точке $w(s_0)$ образует угол $\pi\delta$, $\delta\in(0,1)\cup(1,2)$. Это означает согласно [3], [4], что $w(s)=w(s_0)+|s-s_0|^\gamma[u_1(s)+iv_1(s)]$, $\gamma>0$, $u_1(s)$, $v_1(s)$ ограничены в окрестности s_0 и

$$\operatorname{tg}\pi\delta=\frac{v_1(s_0+0)u_1(s_0-0)-v_1(s_0-0)u_1(s_0+0)}{u_1(s_0+0)u_1(s_0-0)+v_1(s_0+0)v_1(s_0-0)}.\tag{3}$$

Теорема. *Пусть заданная на отрезке $[0,l]$ и l-периодически продолженная на $[s_0,s_0+l]$ функция $w(s)$ такова, что $w(0)=w(l)$, $|w(s_1)-w(s_2)|\,|s_1-s_2|^{-1}>0$, $0<|s_1-s_2|\le l/2$; $w(s)=w(s_0)+|s-s_0|^\gamma w_1(s)$, $w_1(s_0\pm0)\ne0,\infty$; $w_1(s)=u_1(s)+iv_1(s)$, $u_1(s)$, $v_1(s)$ абсолютно непрерывны на $[s_0,s_0+l]$, $w_1'(s)\in L_{1+\epsilon}[s_0,s_0+l]$, имеет место (3), причем $\delta>1$, $\delta\le\gamma$, $|w'(s)|^{-1}|s-s_0|^{\gamma(1-1/\delta)}\in L_\rho[s_0,s_0+l]$, $\rho>0$ и $|\arg w'(s_2)-\arg w'(s_1)|\le K\left|\int\limits_{s_1}^{s_2}|w'(s)|ds\right|^\alpha$, $\alpha\in(0,1]$ для почти всех s_1, s_2 из (s_0,s_0+l). Тогда $w(s)$ — граничные значения некоторой функции, аналитической в области с границей длины l, и параметр s является дуговой абсциссой этой границы.*

Доказательство. Как и раньше, функция $w(s)$ задает простой замкнутый контур Γ_w, теперь уже кусочно гладкий. Будем обозначать неизвестный контур Γ_z. Воспользуемся аналитической функцией, переводящей негладкий контур Γ_w в гладкий контур Γ_ζ. Функция $\zeta(w) = (w - w(s_0))^{1/\delta}$, $w \in D_w$, переводит простой замкнутый контур Γ_w в простой замкнутый гладкий контур Γ_ζ. Обозначим $h(s) = \zeta(w(s)) = |s - s_0|^{\gamma/\delta}[w_1(s)]^{1/\delta}$, тогда

$$h'(s) = |s - s_0|^{(\gamma/\delta - 1)}[\gamma \operatorname{sgn}(s - s_0) w_1^{1/\delta} + |s - s_0| w_1'(s) w_1^{(1/\delta - 1)}]/\delta.$$

Покажем, что $h(s)$ удовлетворяет всем условиям, накладываемым на контур из предыдущего пункта. Заметим сначала, что благодаря простоте контура Γ_w и непрерывности $w_1(s)$ имеем $\min\limits_{s \in [s_0, s_0 + l]} |w_1(s)| \geq c > 0$. Следовательно,

$$|w_1(s_2)^{1/\delta} - w_1(s_1)^{1/\delta}| = \frac{1}{\delta}\left|\int_{w_1(s_1)}^{w_1(s_2)} w^{(1/\delta - 1)} dw\right|,$$

где интеграл взят по дуге контура Γ_w, и, значит,

$$|w_1(s_2)^{1/\delta} - w_1(s_1)^{1/\delta}| \leq \frac{1}{\delta} c^{(1/\delta - 1)} |w_1(s_2) - w_1(s_1)|.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Re}[w_1(s_{k+1})^{1/\delta}] - \operatorname{Re}[w_1(s_k)^{1/\delta}]| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |w_1(s_{k+1})^{1/\delta} - w_1(s_k)^{1/\delta}| \leq M \sum_{k=1}^{n} |w_1(s_{k+1}) - w_1(s_k)| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |u_1(s_{k+1}) - u_1(s_k)| + \sum_{k=1}^{n} |v_1(s_{k+1}) - v_1(s_k)|.$$

Так как $|s - s_0|^{\gamma/\delta}$ липшицева на $[s_0, s_0 + l]$ при $\gamma/\delta \geq 1$, то $\operatorname{Re} h(s)$ и $\operatorname{Im} h(s)$ абсолютно непрерывны на $[s_0, s_0 + l]$. Благодаря отмеченной ограниченности $|w_1(s)|^{-1}$ на $[0, l]$ имеем $h' \in L_{1+\epsilon}[s_0, s_0 + l]$ при $\gamma \geq \delta$. Далее имеем $|h'|^{(-1)} = |w'^{-1}|\,|s - s_0|^{\gamma(1 - 1/\delta)} |w_1|^{(1 - 1/\delta)} \in L_\rho[s_0, s_0 + l]$, $\rho > 0$. Остается показать, что контур Γ_ζ будет контуром Ляпунова. Действительно,

$$|\Delta \arg h'| = |(1/\delta - 1)\Delta \arg(w - w(s_0)) + \Delta \arg w'| \leq$$
$$\leq (1 - 1/\delta)|\Delta \arg(w - w(s_0))| + K\left|\int_{s_1}^{s_2} |w'(s)| ds\right|^{\alpha}.$$

Так как $h'(s) = w'(s)[w(s) - w(s_0)]^{(1/\delta - 1)}$, имеем

$$\left|\int_{s_1}^{s_2} |w'(s)| ds\right| \leq \sup_{s \in [0, l]} |w(s) - w(s_0)|^{(1 - 1/\delta)} \left|\int_{s_1}^{s_2} |h'(s)| ds\right|.$$

Кроме того, $|\Delta \arg(w(s) - w(s_0))| \leq K_1 \left|\int\limits_{s_1}^{s_2} |w'(s)| ds\right|^{\alpha}$ согласно ([6], с. 29), что совместно с предыдущим неравенством доказывает принадлежность нового контура классу Ляпунова. Таким образом, аналитическая функция, отображающая область, ограниченную контуром Γ_ζ, на неизвестную область D_z, может быть найдена по схеме, приведенной в [1]. Обозначим $p(\sigma) = -\ln|h'(s(\sigma))|$, где $\sigma(s) = \int\limits_0^s |h'(s)| ds$, $\sigma_k = \int\limits_0^l |h'(s)| ds$, $p(\sigma) \in L_\nu[0, \sigma_k]$ $\forall \nu > 1$. Найдем из уравнения Фредгольма, аналогичного (2),

$$q(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma_k} q(\tau)\{\arg[\widetilde{h}(\tau) - \widetilde{h}(\sigma)]\}'_\tau d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma_k} p(\tau)\{\ln|\widetilde{h}(\tau) - \widetilde{h}(\sigma)|\}'_\tau d\tau,$$

решение $q(\sigma) \in L_\nu[0, \sigma_k]$ $\forall \nu > 1$; здесь $\widetilde{h}(\sigma) \equiv h(s(\sigma))$. Теперь

$$z(\zeta) = e^{i\phi_0} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \exp F(\zeta) d\zeta + C,$$

где

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\zeta} \frac{p(\tau) + iq(\tau)}{\widetilde{h}(\tau) - \zeta} d\widetilde{h}(\tau).$$

Таким образом, функция $z(\zeta)$ отобразит контур Γ_ζ на неизвестный контур Γ_z. Далее сама аналитическая функция, граничные значения которой — известная функция $w(s)$, $s \in [0, l]$, — восстанавливается с использованием интегральной формулы Коши.

Литература

1. Широкова Е.А. *О сведе́нии решения обратной краевой задачи к решению уравнения Фредгольма* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 8. – С. 72–80.
2. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.
3. Гахов Ф.Д. *Об обратных краевых задачах* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1953. – Т. 113. – № 10. – С. 9–20.
4. Гахов Ф.Д., Мельник И.М. *Особые точки контура в обратной краевой задаче теории аналитических функций* // Укр. матем. журн. – 1959. – Т. 11. – № 1. – С. 25–37.
5. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 399 с.
6. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.

Казанский государственный университет

Поступила
23.02.1999