ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 1 (464)

УДК 517.512.6

А.А. КЕЛЬЗОН

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ m-ГАРМОНИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В данной статье выводится оценка уклонения тригонометрического интерполяционного полинома Лагранжа по равноотстоящим узлам от интерполируемой функции, если последняя всюду непрерывна и имеет m-гармоническую ограниченную вариацию на периоде. Из полученной оценки следует равномерная сходимость соответствующего интерполяционного процесса для функций указанного класса.

Введем необходимые обозначения. Пусть m — натуральное число, f — 2π-периодическая функция, заданная на вещественной оси. Через $V_{m,H}(f;a,b)$ обозначим m-гармоническую вариацию функции f на отрезке $[a,b]$, т. е. [1]

$$V_{m,H}(f;a,b)=\sup\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\triangle^m f(I_n)|}{n}, \tag{1}$$

где

$$\triangle^m f(I_n)\equiv\triangle^m f(a_n,b_n)=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m-\nu}C_m^{\nu}f(a_n+\nu h_n),$$
$$h_n=(b_n-a_n)/m,$$

а верхняя грань в (1) берется по всевозможным последовательностям $\{I_n\}$ непересекающихся интервалов $I_n=(a_n,b_n)$, лежащих в $[a,b]$.

Через CHBV_m обозначим класс непрерывных 2π-периодических функций f, для которых $V_{m,H}(f;0,2\pi)<\infty$.

Отметим, что при $m=1$ соответствующий класс был введен в [2]. Там же была доказана равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье для функций класса CHBV_1.

Пусть далее ξ — произвольное вещественное число,

$$x_{k,n}\equiv x_{k,n}(\xi)=\xi+2k\pi/(2n+1),$$
$$t_{k,n}(x)=\frac{\sin[(n+1/2)(x-x_{k,n})]}{(2n+1)\sin[(x-x_{k,n})/2]}=\frac{(-1)^k\sin[(n+1/2)(x-\xi)]}{(2n+1)\sin[(x-x_{k,n})/2]}, \tag{2}$$
$$k=0,\pm1,\dots;\ \ n=0,1,2,\dots$$

Через $L_n(f;x)\equiv L_{n,\xi}(f;x)$, $n=1,2,\dots$, обозначим тригонометрический полином порядка не выше n, совпадающий с функцией f в узлах $x_{k,n}$, $k=0,\pm1,\dots$ (тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа). Как известно (напр., [3], гл. X, § 1, с. 10),

$$L_n(f;x)=\sum_{k=-n}^{n}f(x_{k,n})t_{k,n}(x).$$

Пусть, наконец, $\omega(f,\cdot)$ — модуль непрерывности функции f.

Известна

Лемма 1 ([4]). *Пусть m и N — натуральные числа, причем $N > m$; α_k, $k = \overline{1,N}$, — произвольные числа. Тогда справедливо тождество*

$$\sum_{k=1}^{N}\alpha_k = \frac{1}{2^m}\Big\{\sum_{k=1}^{N-m}\sum_{\nu=0}^{m}C_m^\nu\alpha_{k+\nu} + \sum_{j=1}^{m}D_{m,j}\alpha_j + \sum_{j=N-m+1}^{N}D_{m,N-j+1}\alpha_j\Big\},$$

где $D_{m,j} = \sum\limits_{i=j}^{m}C_m^i$.

Основной результат работы представляет

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathrm{CHBV}_m$ при некотором натуральном m. Тогда при всех натуральных n и любых вещественных ξ и x справедливо неравенство*

$$|L_{n,\xi}(f;x) - f(x)| \le \inf_{\delta\in(0,\pi/2)}\bigg\{\frac{m}{2^{m+1}}(V_{m,H}(f;x-\delta,x) + V_{m,H}(f;x,x+\delta)) + 2\omega\Big(f;\frac{2\pi}{2n+1}\Big) + \\ + m\Big(\frac{\pi^3}{12}+2\Big)\omega(f;\delta) + \frac{1}{\delta}\Big(\frac{2\pi\omega(f,\pi)}{2n+1} + \omega\Big(f;\frac{2\pi}{2n+1}\Big)\Big)\bigg\}. \quad (3)$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что $x \in [x_{-1,n}, x_{0,n})$ (если бы $x \in [x_{k,n}, x_{k+1,n})$, то можно было бы перейти к функции $\varphi(\cdot) = f(\cdot - x_{-1,n} + x_{k,n})$). Поскольку $L_n(f;x_{k,n}) - f(x_{k,n}) = 0$, $k = 0, \pm1, \dots$, далее будем считать, что

$$x_{-1,n} < x < x_{0,n}. \quad (4)$$

В силу известного тождества (напр., [5], гл. 1, § 1.5, с. 19) $\sum\limits_{k=-n}^{n} t_{k,n}(x) = 1$ имеем

$$L_{n,\xi}(f;x) - f(x) = \sum_{k=-n}^{n}(f(x_{k,n}) - f(x))\,t_{k,n}(x) = \sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=0}^{n}. \quad (5)$$

Оценим вторую сумму в правой части (5). Выберем произвольное δ из интервала $(0, \pi/2)$. Пусть $N = N(n, x, \delta)$ определяется из условия

$$x_{N,n} \le x + \delta < x_{N+1,n}. \quad (6)$$

Положим $g(t) \equiv g_x(t) = f(t) - f(x)$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n}(f(x_{k,n}) - f(x))t_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n}g(x_{k,n})t_{k,n}(x) = \\ = g(x_{0,n})t_{0,n}(x) + \sum_{k=1}^{N}g(x_{k,n})t_{k,n}(x) + \sum_{k=N+1}^{n}g(x_{k,n})t_{k,n}(x). \quad (7)$$

Из известного неравенства (напр., [6], ч. I, гл. IV, § 2, с. 114) $|\sin nt| \le n|\sin t|$ $(-\infty < t < +\infty)$ следует, что

$$|t_{k,n}(x)| \le 1, \quad k = 0, \pm1, \dots; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Отсюда с учетом (4) получаем

$$|g(x_{0,n})t_{0,n}(x)| \le |g(x_{0,n})| = |f(x_{0,n}) - f(x)| \le \omega(f; 2\pi/(2n+1)). \quad (9)$$

Воспользовавшись леммой 1, преобразуем первую сумму, стоящую в правой части (7), при $N > m$ (случай $N \le m$ рассмотрим ниже)

$$\sum_{k=1}^{N} g(x_{k,n})t_{k,n}(x) = \frac{1}{2^m}\Big\{ \sum_{k=1}^{N-m}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})t_{k+\nu,n}(x) + \\ + \sum_{j=1}^{m} D_{m,j} g(x_{j,n})t_{j,n}(x) + \sum_{j=N-m+1}^{N} D_{m,N-j+1} g(x_{j,n})t_{j,n}(x)\Big\}. \quad (10)$$

Оценим сначала вторую и третью суммы из правой части (10). С учетом (8)

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} D_{m,j} g(x_{j,n})t_{j,n}(x)\Big| \le \max_{j=\overline{1,m}} |g(x_{j,n})| \sum_{j=1}^{m} D_{mj} = \\ = \max_{j=\overline{1,m}} |f(x_{j,n}) - f(x)| \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m} C_m^i \le \omega(f;\delta)\sum_{s=1}^{m} sC_m^s = \omega(f;\delta) m \sum_{s=1}^{m} C_{m-1}^{s-1}$$

и, значит,

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} D_{mj} g(x_{j,n})t_{j,n}(x)\Big| \le m\cdot 2^{m-1}\omega(f;\delta). \quad (11)$$

Ввиду (8)

$$\Big|\sum_{j=N-m+1}^{N} D_{m,N-j+1} g(x_{j,n})t_{j,n}(x)\Big| \le \omega(f;\delta)\sum_{j=N-m+1}^{N} D_{m,N-j+1} = \omega(f,\delta)\sum_{s=1}^{m} D_{ms}$$

и аналогично предыдущему получаем

$$\Big|\sum_{j=N-m+1}^{N} D_{m,N-j+1} g(x_{j,n})t_{j,n}(x)\Big| \le m\cdot 2^{m-1}\omega(f;\delta). \quad (12)$$

Оценим двойную сумму в правой части (10). Из (2), (4) и (6) следует

$$\operatorname{sign} t_{k,n}(x) = (-1)^k, \quad k = \overline{1,N}. \quad (13)$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{N-m}\sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})t_{k+\nu,n}(x) = \sum_{k=1}^{N-m}(-1)^k\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})|t_{k+\nu,n}(x)| = \\ = \sum_{k=1}^{N-m}(-1)^k\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})|t_{k,n}(x)| - \sum_{k=1}^{N-m}(-1)^k\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})(|t_{k,n}(x)| - |t_{k+\nu,n}(x)|) = \\ = \sum_{k=1}^{N-m} t_{k,n}(x)\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu C_m^\nu g(x_{k+\nu,n}) - \\ - \sum_{k=1}^{N-m}(-1)^k\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})(|t_{k,n}(x)| - |t_{k+\nu,n}(x)|) \equiv S_1 - S_2. \quad (14)$$

Далее имеем $S_1 = (-1)^m \sum\limits_{k=1}^{N-m} t_{k,n}(x)\Delta^m g(x_{k,n}, x_{k+m,n})$. Но при $k = \overline{1, N-m}$ из (2) с учетом (4) следует

$$|t_{k,n}(x)| \le \frac{1}{(2n+1)\sin[(x_{k,n} - x_{0,n})/2]} = \frac{1}{(2n+1)\sin(k\pi/(2n+1))} \le \frac{1}{2k}$$

и, следовательно, в силу выбора N

$$|S_1| \le \sum_{k=1}^{N-m} \frac{|\Delta^m g(x_{k,n}, x_{k+m,n})|}{2k} \le \frac{m}{2} V_{m,H}(g; x, x+\delta)$$

и, значит,

$$|S_1| \le \frac{m}{2} V_{m,H}(f; x, x+\delta). \tag{15}$$

Для оценки S_2 заметим, что при $k = \overline{1, N-m}$, $\nu = \overline{0, m}$ из (2) с учетом (4) будем иметь

$$|t_{k,n}(x)| - |t_{k+\nu,n}(x)| = \frac{|\sin[(n+1/2)(x-\xi)]|}{2n+1} \left(\frac{1}{\sin[(x_{k,n}-x)/2]} - \frac{1}{\sin[(x_{k+\nu,n}-x)/2]} \right) =$$

$$= \frac{|\sin[(n+1/2)(x-\xi)]|}{2n+1} \frac{2\sin[(x_{k+\nu,n}-x_{k,n})/4]\cos[(x_{k+\nu,n}+x_{k,n}-2x)/4]}{\sin[(x_{k,n}-x)/2]\sin[(x_{k+\nu,n}-x)/2]}.$$

Отсюда, учитывая (4) и некоторые хорошо известные элементарные неравенства, получаем

$$||t_{k,n}(x)| - |t_{k+\nu,n}(x)|| \le \frac{2\sin[(x_{k+\nu,n}-x_{k,n})/4]}{(2n+1)\sin[(x_{k,n}-x_{0,n})/2]\sin[(x_{k+\nu,n}-x_{0,n})/2]} =$$

$$= \frac{2\sin[\nu\pi/(4n+2)]}{(2n+1)\sin[k\pi/(2n+1)]\sin[(k+\nu)\pi/(2n+1)]} \le$$

$$\le \frac{\nu\pi/(2n+1)}{(2n+1)[2k\pi/\pi(2n+1)][2(k+\nu)\pi/\pi(2n+1)]} = \frac{\nu\pi}{4k(k+\nu)} \le \frac{m\pi}{4k^2}.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu C_m^\nu g(x_{k+\nu,n})(|t_{k,n}(x)| - |t_{k+\nu,n}(x)|) \right| \le \frac{m\pi}{4k^2} \sup_{x\le t\le x+\delta} |g(t)| \sum_{\nu=0}^{m} C_m^\nu \le \frac{\pi m 2^m}{4k^2} \omega(f,\delta).$$

Отсюда

$$|S_2| \le \frac{\pi m 2^m}{4} \omega(f,\delta) \sum_{k=1}^{N-m} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi m 2^m}{4} \omega(f,\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

и, значит,

$$|S_2| < \frac{\pi^3 m 2^m}{24} \omega(f,\delta). \tag{16}$$

Подставим (15) и (16) в (14), а затем полученное неравенство, а также (11) и (12) в (10). В результате будем иметь

$$\left| \sum_{k=1}^{N} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x) \right| \le \frac{m}{2^{m+1}} V_{m,H}(f; x, x+\delta) + \left(\frac{\pi^3 m}{24} + m \right) \omega(f;\delta). \tag{17}$$

При $N \le m$ выполнено более сильное неравенство. Действительно, при $N \le m$, учитывая (8) и (6), имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{N} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x) \right| \le \sum_{k=1}^{N} |g(x_{k,n})| \le \sum_{k=1}^{N} \omega(f;\delta) \le N\omega(f;\delta) \le m\omega(f;\delta).$$

Переходим к оценке последней суммы в правой части (7). Обозначим для краткости $a_k \equiv a_{k,n}(x) := \sum_{j=k}^{n} t_{j,n}(x)$, $g_k := g(x_{k,n})$, $k = \overline{1,n}$, $a_{n+1} := 0$. Применим к оцениваемой сумме преобразование Абеля

$$\sum_{k=N+1}^{n} g_k t_{k,n}(x) = \sum_{k=N+1}^{n} g_k (a_k - a_{k+1}) = g_{N+1} a_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{n} (g_k - g_{k-1}) a_k. \tag{18}$$

Из (2) с учетом (4) следует неравенство $|t_{k,n}(x)| \geq |t_{k+1,n}(x)|$, $k = \overline{1, n-1}$. Отсюда и из (13) получаем $|a_k| \leq |t_{k,n}(x)|$, $k = \overline{1, n-1}$, и, поскольку $|a_n| = |t_{n,n}(x)|$, из (18) следует оценка

$$\Big| \sum_{k=N+1}^{n} g_k t_{k,n}(x) \Big| \leq |g_{N+1}|\, |t_{N+1,n}(x)| + \max_{k=\overline{N+2,n}} |f(x_{k,n}) - f(x_{k-1,n})| \sum_{k=N+2}^{n} |t_{k,n}(x)|.$$

Но ввиду (2) и (6) $|t_{k,n}(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)\sin(\delta/2)} \leq \frac{\pi}{(2n+1)\delta}$, $k = \overline{N+1, n}$. Кроме того, $|g_{N+1}| = |f(x_{N+1,n}) - f(x)| \leq \omega(f, \pi)$. Отсюда и из предыдущего неравенства находим

$$\Big| \sum_{k=N+1}^{n} g(x_{k,n}) t_{k,n}(x) \Big| \leq \frac{\pi\omega(f,\pi)}{(2n+1)\delta} + \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right) \frac{n-N+1}{(2n+1)\delta}.$$

Подставляя эту оценку, а также (9) и (17) в (7), получим

$$\Big| \sum_{k=0}^{n} (f(x_{k,n}) - f(x)) t_{k,n}(x) \Big| \leq \frac{m}{2^{m+1}} V_{m,H}(f; x, x+\delta) +$$
$$+ \omega\Big(f; \frac{2\pi}{2n+1}\Big) + \Big(\frac{\pi^3 m}{24} + m\Big)\omega(f;\delta) + \frac{1}{\delta}\Big(\frac{\pi\omega(f;\pi)}{2n+1} + \frac{1}{2}\omega\Big(f; \frac{2\pi}{2n+1}\Big)\Big).$$

Аналогичным образом можно провести оценивание первой суммы в правой части (5). Именно, для этой суммы справедлива оценка

$$\Big| \sum_{k=-n}^{-1} (f(x_{k,n}) - f(x)) t_{k,n}(x) \Big| \leq \frac{m}{2^{m+1}} V_{m,H}(f; x-\delta, x) + \omega\Big(f; \frac{2\pi}{2n+1}\Big) +$$
$$+ \Big(\frac{\pi^3 m}{24} + m\Big)\omega(f;\delta) + \frac{1}{\delta}\Big(\frac{\pi\omega(f;\pi)}{2n+1} + \frac{1}{2}\omega\Big(f; \frac{2\pi}{2n+1}\Big)\Big).$$

Из двух последних неравенств следует утверждение теоремы.

Известно [1], [4], что $\mathrm{CHBV}_m \subset \mathrm{CHBV}_{m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$ В связи с этим естественно ввести обозначение

$$\mathrm{CHBV}_\infty := \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{CHBV}_m.$$

Перейдем к доказательству равномерной сходимости тригонометрического интерполяционного процесса по равноотстоящим узлам на классе CHBV_∞. Потребуется следующая

Лемма 2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $V_{m,H}(f; a, b) < \infty$ при некотором натуральном m. Тогда при любом $\gamma \in (0, b-a)$ справедливы соотношения*

а) $\lim\limits_{x' \to x+0} V_{m,H}(f; x, x') = 0$ *равномерно по* $x \in [a, b-\gamma]$,

б) $\lim\limits_{x' \to x-0} V_{m,H}(f; x', x) = 0$ *равномерно по* $x \in [a+\gamma, b]$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Тот факт, что рассматриваемый предел равен нулю при каждом x, доказан в [4]. Допустим, сходимость не является равномерной. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что каково бы ни было число $\delta > 0$, в промежутке $[a, b-\gamma]$ найдутся два числа x_0 и x'_0 такие, что $0 < x'_0 - x_0 < \delta$ и тем не менее $V_{m,H}(f; x_0, x'_0) \geq \varepsilon$.

Выберем последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$ так, что $\delta_n \to 0$. В силу сказанного для каждого δ_n в промежутке $[a, b-\gamma]$ найдутся два числа x_n и x'_n такие, что

$$0 < x'_n - x_n < \delta_n \tag{19}$$

и тем не менее

$$V_{m,H}(f; x_n, x'_n) \geq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Из последовательности $\{x_n\}$ выделим подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке x^*. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что сама последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*. Но поскольку $\delta_n \to 0$, то из (19) следует, что тогда и последовательность $\{x'_n\}$ будет сходиться к x^*. Отсюда будет следовать [4], что

$$V_{m,H}(f; x_n, x'_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Но это противоречит (20). Следовательно, утверждение а) доказано. Утверждение б) доказывается аналогично. □

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathrm{CHBV}_\infty$. *Тогда при любом вещественном* ξ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} L_{n,\xi}(f; x) = f(x),$$

причем сходимость равномерная на всей вещественной оси.

Доказательство легко следует из теоремы 1 и леммы 2.

Действительно, если $f \in \mathrm{CHBV}_\infty$, то $f \in \mathrm{CHBV}_m$ при некотором натуральном m, и достаточно в правой части формулы (3) положить $\delta = \sqrt{\omega(f; 2\pi/(2n+1))}$. Остается лишь заметить, что при выбранном δ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(\omega(f; 2\pi/(2n+1)))^{1/2}} = 0,$$

если только f не является тождественной постоянной ([6], ч. I, гл. IV, § 1, с. 109). Если же $f \equiv \mathrm{const}$, то утверждение теоремы тривиально, т. к. в этом случае $L_{n,\xi}(f; x) = f(x)$ при всех x.

Отметим, что в частном случае, когда $f \in \mathrm{CHBV}_1$, теорема 2 была доказана в [7], [8], а поточечная сходимость для $f \in \mathrm{CHBV}_\infty$ была установлена в [9]. Кроме того, заметим, что теорема 2 в сочетании с результатами работ [1], [4] позволяет утверждать, что класс CHBV_∞ включается в класс функций, для которых одновременно равномерно сходятся тригонометрический ряд Фурье и тригонометрический интерполяционный процесс Лагранжа по равноотстоящим узлам. Задачу описания этого класса ставил А.А. Привалов (ср. [10], сс. 98–109, 203–206).

Литература

1. Кельзон А.А. *О функциях* (m, Φ)*-ограниченной вариации* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 321. – № 4. – С. 670–672.
2. Waterman D. *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation* // Studia Math. – 1972. – Т. 44. – № 2. – P. 107–117.
3. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* – Т. II. – М.: Мир, 1965. – 540 с.
4. Кельзон А.А. *Функции* (m, Φ)*-ограниченной вариации и сходимость рядов Фурье* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 8. – С. 29–38.
5. Турецкий А.Х. *Теория интерполирования в задачах.* – Минск: Выш. школа, 1968. – 320 с.
6. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
7. Новиков В.В. *О двух признаках сходимости интерполяционного процесса Лагранжа* // Матем. и ее прилож. – Саратов, 1988. – С. 18–19.
8. Новиков В.В. *Сходимость интерполяционного процесса Лагранжа для функций обобщенной ограниченной вариации* // Теория функций и приближений. Труды 7-й Саратовской зимней школы 30 января – 4 февраля 1994 г. Ч. 3. – Саратов, 1995. – С. 62–66.
9. Кельзон А.А. *О тригонометрическом интерполировании функций* m*-гармонической ограниченной вариации* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 10. – С. 44–47.
10. Привалов А.А. *Избранные труды.* – Саратов, 1997. – 288 с.

Государственная морская академия
имени адмирала С.О. Макарова (Санкт-Петербург)

Поступила
01.07.1999