И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.925 :517.968

М.Ф. КУЛАГИНА

ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

В настоящее время имеется достаточно много работ, в которых изучаются условия существования почти периодических решений дифференциальных уравнений. Подробную библиографию по этому кругу вопросов можно найти в [1]–[3]. Работ, в которых изучаются почти периодические решения интегральных и интегродифференциальных уравнений, значительно меньше. Здесь можно, например, отметить работы [4]–[9].

В статье впервые применяется операционное исчисление, введенное и изученное в [9] и [10], для построения в явном виде почти периодических решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами, таких же уравнений с отклоняющимися аргументами, некоторых линейных интегродифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и разностными ядрами.

Почти периодическим полиномом называется функция $p(t)$, $-\infty < t < +\infty$, являющаяся линейной комбинацией функций вида $\exp(i\lambda t)$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Через Π_C обозначим замыкание по норме $L_\infty(-\infty,\infty)$ множества всех почти периодических полиномов. Множество Π_C является подалгеброй $L_\infty(-\infty,\infty)$, состоящей из всех почти периодических по Бору функций. Через Π_W обозначим подмножество Π_C, состоящее из функций $A(t) \in \Pi_C$ вида $A(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$, удовлетворяющих условию $\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Множество Π_W является банаховой алгеброй ([11], с. 337–338). Каждой функции $A(t)$ из Π_W поставим в соответствие функцию

$$a(\lambda) = M\{A(t)e^{i\lambda t}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A(t)e^{i\lambda t}dt. \tag{1}$$

Такая функция существует и может быть отличной от нуля не более чем для счетного множества значений $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \dots ; a(\lambda_n) = a_n \neq 0$ ([1], с. 32).

Таким образом, каждой функции из Π_W ставим в соответствие функцию $a(\lambda)$ или последовательность пар $a(\lambda) = \{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots\}$, a_n комплексные, λ_n вещественные.

Если $A(t) \in \Pi_W$, то соответствующая этой функции последовательность $\{a_n\} \in l_1$ (будем говорить $a(\lambda) \in l_1$). И наоборот, для каждой функции $a(\lambda) \in l_1$ существует функция $A(t)$, для которой выполнено (1) и

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}. \tag{2}$$

Ряд здесь сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < t < \infty$. Следовательно, установлено взаимно однозначное соответствие между функциями из Π_W и двумерными последовательностями $a(\lambda) \in l_1$. При этом считаем, что две последовательности $a(\lambda), b(\lambda) \in l_1$ совпадают, если

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 98-01-03304.

им соответствуют одни и те же функции, так что последовательность $a(\lambda)$ не изменится, если к ней добавить счетное множество пар вида $(0, \lambda)$.

Равенство (2), которое последовательности $a(\lambda) \in l_1$ ставит в соответствие функцию $A(t) \in \Pi_W$, назовем *обобщенным дискретным преобразованием Фурье.* Равенство (1) производит обратное преобразование. Последовательность $a(\lambda)$ будем называть *оригиналом*, а функцию $A(t)$ — *изображением.* Обобщенное дискретное преобразование Фурье будем обозначать символом W_0, т. е.

$$A(t) = W_0 a(\lambda), \quad a(\lambda) = W_0^{-1} A(t).$$

Обобщенное дискретное преобразование W_0 было введено в [9] и [10], там же изучены свойства этого преобразования. Приведем некоторые из них.

1. Если $A(t) \in \Pi_W$, δ вещественное, то $W_0^{-1} A(t-\delta) = e^{-i\lambda\delta} a(\lambda)$.
2. Пусть $A(t)$ дифференцируема и $A^{(j)}(t) \in \Pi_W$, $j = \overline{0,p}$, тогда $W_0^{-1} \frac{d^p A(t)}{dt^p} = (i\lambda)^p a(\lambda)$.
3. Если $A(t) \in \Pi_W$ и $B(t) \in \Pi_W$, то

$$W_0 a(\lambda) b(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A(t-s) B(s) ds.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение с отклоняющимися аргументами

$$x^{(n)}(t-\eta_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(n-k)}(t-\eta_k) = f(t), \tag{3}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные, а $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ — вещественные постоянные, $f(t)$ — заданная функция класса Π_W. Решение уравнения (3) $x(t) = \sum\limits_m x_m e^{i\lambda_m t}$ будем искать в классе Π_W. Для уравнений вида (3) с отклоняющимися аргументами можно доказать аналог леммы Эсклангона. Это доказательство почти дословно повторяет доказательство этой леммы в ([1], с. 186–187) (во всех построениях комбинации производных заменяются комбинациями с отклоняющимися аргументами).

Покажем, что если $x(t) \in \Pi_W$, то и $x^{(j)}(t) \in \Pi_W$, $j = \overline{1,n}$. В силу аналога леммы Эсклангона из ограниченности решения уравнения (3) следует ограниченность всех производных $x^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,n}$. Из ограниченности производной $x^{(k+1)}(t)$ следует равномерная непрерывность производной $x^{(k)}(t)$, а значит, ее почти периодичность ([1], с. 28). Отсюда следует, что $x^{(j)}(t) \in \Pi_C$, $j = \overline{1, n-1}$. Тогда из (3) получаем, что и $x^{(n)}(t) \in \Pi_C$. Все производные будут принадлежать Π_W, если покажем, что сходятся ряды

$$\sum_m |\lambda_m|^k |x_m|, \quad k = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Если последовательность $\{\lambda_m\}$ ограничена, то ряды (4) сходятся, т. к. $x(t) \in \Pi_W$. Значит, надо показать сходимость этих рядов, когда $\lambda_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Перепишем (3) в виде

$$x^{(n)}(t-\eta_0) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{(n-k)}(t-\eta_k) = f(t) - a_n x(t-\eta_n).$$

Так как правая часть этого равенства принадлежит Π_W, то сходятся ряды

$$\sum_m |(i\lambda_m)^n e^{-i\lambda_m \eta_0} + a_1 (i\lambda_m)^{n-1} e^{-i\eta_1 \lambda_m} + \cdots + a_{n-1}(i\lambda_m) e^{-i\eta_{n-1}\lambda_m}|\,|x_m| =$$

$$= \sum_m |\lambda_m|^n \left| 1 + \frac{a_1 e^{i(\eta_0-\eta_1)\lambda_m}}{i\lambda_m} + \cdots + \frac{a_{n-1} e^{i(\eta_0-\eta_{n-1})\lambda_m}}{(i\lambda_m)^{n-1}} \right| |x_m|.$$

При достаточно больших m

$$\left| 1 + \frac{a_1 e^{i(\eta_0-\eta_1)\lambda_m}}{i\lambda_m} + \cdots + \frac{a_{n-1} e^{i(\eta_0-\eta_{n-1})\lambda_m}}{(i\lambda_m)^{n-1}} \right| \geq \alpha > 0.$$

Тогда

$$|\lambda_m|^n|x_m| \le \frac{1}{\alpha}|\lambda_m|^n|x_n|\left|1+\frac{a_1 e^{i(\eta_0-\eta_1)\lambda_m}}{i\lambda_m}+\cdots+\frac{a_{n-1}e^{i(\eta_0-\eta_{n-1})\lambda_m}}{(i\lambda_m)^{n-1}}\right|.$$

Отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_m |\lambda_m|^n|x_m|$, а также сходимость всех рядов (4).

Применим к (3) преобразование W_0 и получим

$$\left[(i\lambda)^n e^{-i\eta_0\lambda}+\sum_{k=1}^n a_k(i\lambda)^{n-k}e^{-i\eta_k\lambda}\right]x(\lambda)=f(\lambda)$$

или

$$Q_n(\lambda)x(\lambda)=f(\lambda), \tag{5}$$

где $f(\lambda) = W_0^{-1}f(t)$, $x(\lambda) = W_0^{-1}x(t)$, $Q_n(\lambda) = (i\lambda)^n e^{-i\eta_0\lambda} + \sum\limits_{k=1}^n a_k(i\lambda)^{n-k}e^{-i\eta_k\lambda}$. Если μ_k, $k=1,2,\ldots,$ — различные вещественные корни квазиполинома $Q_n(\lambda)$ (их может быть счетное множество), то для разрешимости (3) необходимо, чтобы $f(\mu_j)=0$, $j=1,2,\ldots$ Из (5) получаем

$$x(\lambda)=\begin{cases} f(\lambda)/Q_n(\lambda), & \lambda\ne\mu_j;\\ c_j, & \lambda=\mu_j,\end{cases}$$

где c_j — произвольные комплексные постоянные. Если

$$\psi(\lambda)=\begin{cases} f(\lambda)/Q_n(\lambda), & \lambda\ne\mu_j;\\ 0, & \lambda=\mu_k,\end{cases} \tag{6}$$

где $\lambda^k\psi(\lambda)\in l_1$, $k=\overline{0,n}$, то все решения (3), принадлежащие Π_W, даются формулой

$$x(t)=\sum_j c_j e^{i\mu_j t}+W_0\psi(\lambda), \tag{7}$$

где c_j — произвольные комплексные постоянные такие, что $\{\mu_j^k c_j\}\in l_1$, $k=\overline{0,n}$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения* (3) $f(t)\in\Pi_W$. *Чтобы это уравнение имело решение, принадлежащее этому же классу, необходимо и достаточно, чтобы* 1) $f(\lambda)=0$ *при* $\lambda=\mu_j$, $j=1,2,\ldots,$ *где* μ_j, $j=1,2,\ldots,$ *— различные вещественные корни квазиполинома* $Q_n(\lambda)=(i\lambda)^n e^{i\eta_0\lambda}+\sum\limits_{k=1}^n a_k(i\lambda)^{n-k}e^{i\eta_k\lambda}$; 2) $\lambda^k\psi(\lambda)\in l_1$, $k=\overline{0,n}$, *где* $\psi(\lambda)$ *дается формулой* (6). *При выполнении этих условий все решения уравнения* (3) *класса* Π_W *даются формулой* (7), *где* c_j *— произвольные комплексные постоянные такие, что* $\{\mu_j^k c_j\}\in l_1$, $k=\overline{0,n}$.

Если в уравнении (3) положим $\eta_0=\eta_1=\cdots=\eta_n=0$, то получим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^n a_k x^{(n-k)}(t)=f(t). \tag{8}$$

В этом случае квазиполином $Q_n(\lambda)$ превратится просто в полином $P_n(\lambda)=(i\lambda)^n+\sum\limits_{k=1}^n a_k(i\lambda)^{n-k}$, который может иметь лишь конечное число p различных вещественных корней μ_k. Решение уравнения (8) дается формулой

$$x(t)=\sum_{k=1}^p c_k e^{i\mu_k t}+W_0\varphi(\lambda), \tag{9}$$

где

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda)/P_n(\lambda), & \lambda \neq \mu_k; \\ 0, & \lambda = \mu_k, \end{cases} \tag{10}$$

c_k — произвольные комплексные постоянные.

Следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Если в уравнении (8) $f(t) \in \Pi_W$, то для того чтобы это уравнение имело решение, принадлежащее тому же классу, необходимо и достаточно, чтобы 1) $f(\lambda) = 0$, $\lambda = \mu_k$, $k = \overline{1, p}$, где μ_k — различные вещественные корни полинома $P_n(\lambda) = (i\lambda)^n + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (i\lambda)^{n-k}$; 2) $\lambda^k \varphi(\lambda) \in l_1$, $k = \overline{0, n}$, где $\varphi(\lambda)$ дается формулой (10). При выполнении этих условий все решения уравнения (8) класса Π_W даются формулой (9), где c_k — произвольные комплексные постоянные.

Теперь рассмотрим интегродифференциальное уравнение с отклоняющимися аргументами

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x^{(k)}(t - \eta_{kj}) + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} K_{kj}(t - s) x^{(k)}(s - \delta_{kj}) ds \right\} = f(t), \tag{11}$$

где a_{kj} — комплексные, η_{kj}, δ_{kj} — вещественные постоянные, $K_{kj}(t)$ и $f(t)$ — заданные функции класса Π_W. Решение уравнения будем искать в классе функций $x(t)$ таких, что $x^{(k)} \in \Pi_W$, $k = \overline{0, q}$, где q — максимальный порядок производной, входящей в (11).

Применяя к (11) преобразование W_0^{-1}, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} [a_{kj} (i\lambda)^k e^{-i\eta_{kj}\lambda} + K_{kj}(\lambda)(i\lambda)^k e^{-i\delta_{kj}\lambda}] x(\lambda) = f(\lambda)$$

или

$$R(\lambda) x(\lambda) = f(\lambda), \tag{12}$$

где $f(\lambda) = W_0^{-1} f(t)$, $x(\lambda) = W_0^{-1} x(t)$, $K_{kj}(\lambda) = W_0^{-1} K_{kj}(t)$,

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} [a_{kj} (i\lambda)^k e^{-i\eta_{kj}\lambda} + K_{kj}(\lambda)(i\lambda)^k e^{-i\delta_{kj}\lambda}]. \tag{13}$$

Функция $R(\lambda)$ может иметь счетное множество вещественных корней μ_l, $l = 1, 2, \dots$ Для разрешимости (11) необходимо, чтобы $f(\mu_l) = 0$, $l = 1, 2, \dots$ Из (12) получаем

$$x(t) = \sum_{l} c_l e^{i\mu_l t} + W_0 \varphi(\lambda), \tag{14}$$

где

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda)/R(\lambda), & \lambda \neq \mu_l; \\ 0, & \lambda = \mu_l, \end{cases} \tag{15}$$

c_l — произвольные постоянные. Функция (14) является решением уравнения (11), если $\lambda^k \varphi(\lambda) \in l_1$, $k = \overline{0, q}$, $\{\mu_l^k c_l\} \in l_1$, $k = \overline{0, q}$.

Значит, справедлива

Теорема 2. *Если функции $f(t)$ и $K_{kj}(t)$, $k = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m}$, — функции класса Π_W, то для того чтобы уравнение (11) имело решение такое, что $x^{(j)}(t) \in \Pi_W$, $j = \overline{0, q}$, где q — максимальный порядок производной, входящей в (11), необходимо и достаточно, чтобы 1) $f(\lambda) = 0$ при $\lambda = \mu_l$, $l = 1, 2, \dots$, где μ_l, $l = 1, 2, \dots$, — различные вещественные корни функции $R(\lambda)$, которая дается формулой (13); 2) $\lambda^k \varphi(\lambda) \in l_1$, $k = \overline{0, q}$, где $\varphi(\lambda)$ находится по формуле (15). При выполнении этих условий все решения уравнения (11) указанного выше класса даются формулой (14), где c_l — произвольные комплексные постоянные такие, что $\{\mu_l^k c_l\} \in l_1$, $k = \overline{0, q}$.*

Если в уравнении (11) положим все η_{kj} и δ_{kj} равными нулю, то получим интегродифференциальное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{(n-k)}(t) + \sum_{j=1}^{m} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} K_j(t-s) x^{(j)} ds = f(t).$$

В этом случае функция $R(\lambda) = P_n(\lambda) + K(\lambda)$, где $P_n(\lambda) = (i\lambda)^n + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (i\lambda)^{n-k}$, $K(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{m} K_j(\lambda)(i\lambda)^j$, и теорема 2 остается в силе.

В заключение заметим, что с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье можно строить решения класса Π_W систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, уравнений с отклоняющимися аргументами, а также систем интегродифференциальных уравнений вида (11).

Литература

1. Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. – 396 с.
2. Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.
3. Панков А.А. *Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1985. – 181 с.
4. Пуляев В.Ф. *Ограниченные и почти периодические решения линейных интегральных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1787–1798.
5. Непомнящих Ю.В. *Почти периодические решения нелинейных интегродифференциальных уравнений* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1989. – С. 137–143.
6. Staffans Olof. *On the almost periodicity of the solutions of an integrodifferential equation* // J. Integr. Equat. – 1985. – V. 8. – № 3. – P. 249–260.
7. Langenhop Carl E. *Periodic and almost periodic solutions of Volterra integral differential equations with infinite memory* // J. Differ. Equat. – 1985. – V. 58. – № 3. – P. 394–403.
8. Кулагина М.Ф. *О почти периодических решениях характеристических сингулярных уравнений на прямой. Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения.* – Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1988. – С. 82–88.
9. Кулагина М.Ф. *Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти периодических функций* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 19–29.
10. Кулагина М.Ф. *О некоторых бесконечных системах с разностными индексами* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 18–23.
11. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Л. *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.* – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.

Чувашский государственный университет

Поступили
первый вариант 15.10.1998
окончательный вариант 12.10.1999