Глава 1

Операционное исчисление.

1. Определение преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ с помощью соотношения

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Естественно, что не для всякой функции $f(t)$ этот интеграл имеет смысл. Поэтому начнём с определения класса функций $f(t)$, для которых данное преобразование заведомо реализуемо.

Будем рассматривать функции $f(t)$, определённые для всех значений действительной переменной $-\infty < t < +\infty$ и удовлетворяющие следующим условиям:

1. При $t < 0$ $f(t) \equiv 0$.

2. При $t \geq 0$ функция $f(t)$ на любом конечном участке оси t имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода.

3. При $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, то есть для каждой функции рассматриваемого класса существуют такие положительные постоянные M и a, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| \leq M e^{at}. \qquad (1)$$

Точная нижняя грань тех значений a, для которых имеет место неравенство (2), называется *показателем степени роста* функции $f(t)$.

Отметим, что функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительной переменной t : $f(t) = f_1(t) + i\ f_2(t)$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - действительные функции.

Введём основное определение.

Определение. Преобразованием Лапласа заданной функции $f(t)$ действительной переменной t называется преобразование, ставящее в соответствие функции $f(t)$ функцию $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$, определённую с помощью интеграла

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt. \quad (2)$$

.

Этот интеграл является несобственным интегралом, зависящим от переменной p как от параметра.

Ясно, что $e^{-pt} = e^{-(x+iy)t} = e^{-xt}e^{-iyt} = e^{-xt}(\cos yt - i \sin yt)$, а $|e^{-pt}| = e^{-xt} \to 0$ при $t \to \infty$, если $x = Re\, p > 0$.

Естественно поставить вопрос об области сходимости интеграла (2), и, тем самым, об области определения функции $F(p)$.

Теорема 1. Интеграл $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ сходится в области $Re\ p > a$, где a - показатель степени роста функции $f(t)$, причём в области $Re\ p \geq x_0 > a$ этот интеграл сходится равномерно.

Легко показать, что сходимость интеграла (2) означает, что $|F(p)| \to 0$ при $Re\, p \to \infty$.

Класс функций, допускающих преобразование Лапласа, можно расширить, если воспользоваться следующей леммой.

Лемма. Пусть функция $f(t)$ действительной переменной t определена для всех $t \geq 0$, и пусть существует такое комплексное число p_0, что сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)dt < M. \quad (3)$$

Тогда для всех p, удовлетворяющих условию $Re\ p > Re\ p_0$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt. \quad (4)$$

На основании этой леммы можно в качестве основного класса функций $f(t)$ действительной переменной t, для которых строится преобразование Лапласа (2), рассматривать функции, удовлетворяющие условию (3).

Функция $F(p)$ называется *изображением Лапласа* функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется *оригиналом* функции $F(p)$. Связь функций $f(t)$ и $F(p)$ символически обозначается следующим образом: $f(t) \stackrel{dots}{=} F(p)$ или $F(p) \stackrel{dots}{=} f(t)$.

Наиболее важным классом функций комплексной переменной являются аналитические функции.

Теорема 2. Изображение Лапласа (2) функции $f(t)$ является аналитической функцией комплексной переменной p в области $Re\ p > a$, где a - показатель степени роста функции $f(t)$.

2. Изображение элементарных функций.

Пользуясь определением (2), найдём изображение ряда элементарных функций действительной переменной.

1. Единичная функция Хевисайда. Пусть $f(t) = \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$

Тогда $f(t) \overset{dots}{=} F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$, причём функция $F(p)$, очевидно, определена в области $Re\, p > 0$. Таким образом,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0 \\ 1, \ t > 0 \end{cases} \overset{dots}{=} \frac{1}{p}, \ Re\, p > 0. \tag{5}$$

2. Показательная функция. $f(t) = e^{\alpha t}$. Вычисляя интеграл (2), получим: $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}dt = \frac{1}{p-\alpha}$. Таким образом,

$$e^{\alpha t} \overset{dots}{=} \frac{1}{p-\alpha}, \quad Re\, p > Re\, \alpha. \tag{6}$$

3. Степенная функция. $f(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. В этом случае интеграл (2) имеет вид

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-pt}t^\nu dt, \ Re\, p > 0. \tag{7}$$

Отметим, что при $\nu < 0$ этот интеграл не удовлетворяет второму условию, налагаемому на функцию-оригинал $f(t)$: точка $t = 0$ является точкой разрыва второго рода этой функции. Однако, как легко видеть, при $\nu > -1$ рассматриваемый интеграл относится к классу интегралов $\tilde{F}(p) = p\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$, отличающихся от преобразования Лапласа дополнительным множителем p. Указанное преобразование называется *преобразованием Хевисайда.* Очевидно, что область определения функции $\tilde{F}(p)$ та же, что и для функции $F(p)$.

Перейдём к вычислению интеграла (7). Начнём со случая, когда переменная p принимает действительное значение $p = x > 0$. Сделав замену переменной интегрирования $xt = s$, получим

$$F(x) = \int\limits_0^\infty e^{-xt}t^\nu dt = \frac{1}{x^{\nu+1}}\int\limits_0^\infty e^{-s}s^\nu ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}, \tag{8}$$

где $\Gamma(\nu+1)$ - гамма-функция Эйлера.

Далее отметим справедливость следующего утверждения: пусть на отрезке $[a, b]$ действительной оси x задана непрерывная функция $f(x)$ действительной переменной; тогда в некоторой области G комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a, b]$ действительной оси, может существовать только одна аналитическая функция $f(z)$ комплексной переменной z, принимающая данные значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Функция $f(z)$ называется *аналитическим продолжением функции $f(x)$ действительной переменной x в комплексную область G.*

Так как функция $F(p)$, определённая формулой (7), является аналитической в области $Re\ p > 0$, имеющей на положительной части действительной оси $x > 0$; значение (8), то, в силу единственности аналитического продолжения для функции $F(p)$ в области $Re\, p > 0$, получим выражение

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} t^\nu dt = \Gamma(\nu+1)/p^{\nu+1}. \qquad (9)$$

При этом в случае дробных ν следует выбирать ту ветвь многозначной функции $1/p^{\nu+1}$, которая является непосредственным аналитическим продолжением в область $Re\, p > 0$ действительной функции $1/x^{\nu+1}$. Итак,

$$t^\nu \overset{dots}{=} \Gamma(\nu+1)/p^{\nu+1},\ \nu > -1,\ \mathrm{Re} p > 0. \qquad (10)$$

Для целых $\nu = n$ из формулы (10) получим

$$t^n \overset{dots}{=} \Gamma(n+1)/p^{n+1} = {n!}/{p^{n+1}}. \qquad (11)$$

Вычисляя интеграл (2), можно получить изображение ещё ряда функций действительной переменной, однако во многих случаях для вычисления изображения заданной функции удобнее, оказывается, пользоваться общими свойствами изображения Лапласа.

3. Свойства изображения.

Свойство 1. Линейность изображения. Если $F_i(p) \overset{dots}{=} f_i(t)$, $\mathrm{Re} p > a_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$, то, в силу известных свойств определенных интегралов, имеем:

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \overset{dots}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t),\ Re\, p > \max a_i, \qquad (12)$$

где α_i - заданные постоянные числа, действительные или комплексные, а a_i - показатели степени роста функций $f_i(t)$.

Данное свойство позволяет по найденным изображениям функций найти изображения многочлена, тригонометрических и гиперболических функций. Например, с помощью (6) получим

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \overset{dots}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2},\ Re\, p > |Im\, \omega|. \qquad (13)$$

Аналогично,

$$\sin \omega t \overset{dots}{=} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad Re\, p > |Im\, \omega|. \qquad (14)$$

Свойство 2. Пусть $F(p) \overset{dots}{=} f(t)$, $Re\, p > a$, тогда

$$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \overset{dots}{=} f(\alpha t). \qquad (15)$$

Действительно, $\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$.

Свойство 3. Теорема запаздывания. Пусть $F(p) \overset{dots}{=} f(t)$, $Re\, p > a$, и задана функция $f_\tau(t) = \begin{cases} 0,\ t < \tau,\ \tau > 0, \\ f(t - \tau),\ t \geq \tau. \end{cases}$ Тогда

$$f_\tau(t) \overset{dots}{=} F_\tau(p) = e^{-p\tau} F(p). \qquad (16)$$

Действительно, $F_\tau(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f_\tau(t) dt = \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f(t - \tau) dt$. Сделаем в последнем интеграле замену переменной, положив $t - \tau = t'$. Тогда $F_\tau(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p(t'+\tau)} f(t') dt' = e^{-p\tau} F(p)$, что и доказывает свойство 3.

В качестве примера рассмотрим изображение ступенчатой функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ nf_0, & n\tau \le t < (n+1)\tau, \ n = 1, 2, \ \dots \end{cases}$$

Представим $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда $\eta(t)$:

$$f(t) = f_0 \left[\eta(t-\tau) + \eta(t-2\tau) + \ \dots \right].$$

Использовав свойство линейности и теорему запаздывания, получим:

$$f(t) \overset{dots}{=} F(p) = f_0 e^{-p\tau} \frac{1}{p} + f_0 e^{-2p\tau} \frac{1}{p} + \ \dots \ = \frac{f_0}{p} \frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}}.$$

Свойство 4. Изображение производной. Сейчас мы докажем одно из основных свойств изображения, позволяющее заменить дифференцирование оригинала умножением изображения на независимую переменную.

Если функция $f'(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \overset{dots}{=} F(p),\ Re\, p > a,$ то

$$f'(t) \overset{dots}{=} pF(p) - f(0),\ Re\, p > a. \tag{17}$$

Действительно, интегрируя по частям, получим: $f'(t) \overset{dots}{=} \int\limits_0^\infty e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t)\big|_0^\infty + p \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0),$ что и требовалось.

Аналогично может быть доказано

Свойство 4^*. Если функция $f^{(n)}(t)$ удовлетворяет условиям существования изображения и $f(t) \overset{dots}{=} F(p),\ Re\, p > a,$ то

$$f^{(n)}(t) \overset{dots}{=} p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right],\ Re\, p > a. \tag{18}$$

Формула (18) особенно упрощается в том случае, когда $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$:

$$f^{(n)}(t) \overset{dots}{=} p^n \cdot F(p). \tag{19}$$

Свойство 5. Изображение интеграла. Пусть $F(p) \overset{dots}{=} f(t),\ Re\ p > a,$ тогда

$$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \overset{dots}{=} \frac{1}{p} F(p),\ Re\, p > a. \tag{20}$$

Действительно, используя формулу (2) и меняя, далее, порядок интегрирования, получаем $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \overset{dots}{=} \int\limits_0^\infty e^{-pt} \left(\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \right) dt = \int\limits_0^\infty f(\tau) \left(\int\limits_\tau^\infty e^{-pt} dt \right) d\tau = \frac{1}{p} \int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} F(p),$ что и доказывает формулу (20).

Аналогичным образом может быть доказано

Свойство 5^*. Пусть $F(p) \overset{dots}{=} f(t),\ Re\, p > a,$ тогда

$$\int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 ... \int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \overset{dots}{=} \frac{1}{p^n} F(p),\ Re\, p > a. \tag{21}$$

Свойство 6. Изображение свёртки. Свёрткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $\varphi(t)$, определённая соотношением

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \tag{22}$$

Если $f_1(t) \overset{dots}{=} F_1(p),\ Re\, p > a_1,\ \ f_2(t) \overset{dots}{=} F_2(p),\ Re\, p > a_2,$ то

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \overset{dots}{=} F_1(p) \cdot F_2(p),\ Re\, p > \max(a_1, a_1). \tag{23}$$

Для вычисления изображения свёртки воспользуемся формулой (2) и изменим порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} \left(\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right) dt = \int\limits_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt.$$

Сделав замену переменных $t - \tau = t'$ во внутреннем интеграле, окончательно получим

$$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \overset{dots}{=} \int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int\limits_0^\infty e^{-pt'} f_2(t') dt' = F_1(p) \cdot F_2(p),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается **формула Дюамеля:**

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \overset{dots}{=} f_1(0) \cdot f_2(t) + \int\limits_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Свойство 7. Дифференцирование изображения. Пусть $F(p) \overset{dots}{=} f(t)$, $Re\, p > a$, тогда

$$F'(p) \overset{dots}{=} -\, t \cdot f(t),\ \ Re\, p > a. \tag{23}$$

Действительно, $F'(p) = \frac{d}{dp} \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = -\int\limits_0^\infty e^{-pt} \cdot t \cdot f(t) dt \overset{dots}{=} -\, t \cdot f(t)$, что и утверждается.

Свойство 7^*. Пусть $F(p) \overset{dots}{=} f(t),\ \ Re\, p > a$, тогда

$$F^{(n)}(p) \overset{dots}{=} (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t). \tag{24}$$

Свойство 8. Интегрирование изображения. Если функция $f(t)/t$ удовлетворяет условиям существования изображения и $F(p) \stackrel{dots}{=} f(t), \quad Re\, p > a$, то

$$\frac{f(t)}{t} \stackrel{dots}{=} \int\limits_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_p^\infty F(q)dq. \tag{25}$$

Обозначим

$$I(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt. \tag{26}$$

Найдём производную функцию $I(p)$, дифференцируя интеграл (26) по параметру: $I'(p) = -\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt = -F(p)$. Отсюда, учитывая очевидное условие $I(\infty) = 0$, получим: $I(p) = I(\infty) - \int\limits_\infty^p F(p)dp = \int\limits_p^\infty F(p)dp$.

В качестве примера найдём изображение функции $\frac{\sin\omega t}{t}$. Так как $\sin\omega t \stackrel{dots}{=} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то

$$\frac{\sin\omega t}{t} \stackrel{dots}{=} \int\limits_p^\infty \frac{\omega}{p^2+\omega^2}dp = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{p}{\omega}. \tag{27}$$

С помощью свойства 5 из выражения (27) получаем

$$si\ t = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \stackrel{dots}{=} \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan p\right). \tag{28}$$

Функция $si\ t$ носит название интегрального синуса.

Свойство 8. Теорема смещения. Пусть $F(p) \stackrel{dots}{=} f(t), \quad Re\, p > a$, тогда для любого комплексного числа λ

$$F(p+\lambda) \stackrel{dots}{=} e^{-\lambda t}f(t),\ Re\ p > a -\ Re\ \lambda. \tag{29}$$

Действительно, при $Re\ p > a - Re\lambda$ выполнено $\int\limits_0^\infty e^{-pt}e^{-\lambda t}f(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p+\lambda)t}f(t)dt = F(p+\lambda)$, что и доказывает теорему смещения.

Формула (29) может быть применена для определения изображения функции $e^{-\lambda t}$ на функцию $f(t)$, для которой изображение известно. Так, с помощью этой формулы и уже полученных изображений можно найти

$$t\cdot e^{\alpha t} \stackrel{dots}{=} \frac{1}{(p-\alpha)^2},\ Re\, p >\ Re\ \alpha, \tag{30}$$

$$t^n\cdot e^{\alpha t} \stackrel{dots}{=} \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},\ Re\, p >\ Re\ \alpha, \tag{31}$$

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \stackrel{dots}{=} \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2},\ Re\, p > |\ Im\ \omega| -\ Re\ \alpha \tag{32}$$

и так далее.

4. Определение оригинала по изображению.

Рассмотрим методы определения оригинала по заданному изображению. Отметим здесь, что имеются различные таблицы изображений наиболее часто встречающихся в приложениях функций, так что при решении конкретных задач часто удаётся в справочнике найти выражение оригинала для полученного изображения. Однако, такой метод подбора далеко не всегда оказывается удовлетворительным. Нашей дальнейшей целью является изложение общего метода построения оригинала по изображению.

1. Формула Меллина. начнём со случая, когда по условиям задачи известно, что заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ с ограниченной степенью роста $|f(t)| < Me^{at}$, причём значение постоянной a задано. Требуется по заданной функции $F(p)$ построить искомую функцию $f(t)$. Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть известно, что заданная функция $F(p)$ в области $Re\, p > a$ является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t и обладает степенью роста a. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \quad x > a. \tag{33}$$

Формула (30) часто называется *формулой Меллина,* она, в определённом смысле, является формулой обратной преобразованию Лапласа (формула (2)), так как выражает оригинал через заданное изображение.

В качестве примера применения теоремы 1 рассмотрим вопрос об определении изображения произведения по известным изображениям сомножителей.

Теорема 2. Пусть $f_1(t) \overset{dots}{=} F_1(p)$, $Re\, p > a_1$ и $f_2(t) \overset{dots}{=} F_2(p)$, $Re\, p > a_2$. Тогда

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \overset{dots}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq, \tag{34}$$

причём функция $F(p)$ определена и аналитична в области $Re\ p > a_1 + a_2$, а интегрирование производится по любой прямой, параллельной мнимой оси, лежащей правее прямых $Re\ p = a_1$ и $Re\ p = a_2$.

Пример. Пусть $f_1(t) = \cos\omega t$, $f_2(t) = t$. Найдём изображение функции $f(t) = t\cos\omega t$. Так как $\cos\omega t \overset{dots}{=} \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $t \overset{dots}{=} \frac{1}{p^2}$, то

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{qdq}{(q^2+\omega^2)(p-q)^2},$$

где $Re\, p > |Im\ \omega|$, а интегрирование производится по любой прямой, параллельной мнимой оси и лежащей правее прямой $Re\ p = |Im\ \omega|$. В качестве такой прямой интегрирования выберем прямую, проходящую левее точки $q = p$, и рассмотрим на комплексной плоскости замкнутый контур Γ, состоящий из отрезка $[x - iR,\ x + iR]$ данной прямой и замыкающей его в правой полуплоскости дуги полуокружности $|q - x| = R$. Внутри данного контура подинтегральная функция является всюду аналитической, кроме точки $q = p$, которая есть полюс второго порядка данной функции. Точка $q = \infty$ является нулём третьего порядка этой функции. Поэтому значение интеграла определяется вычетом в особой точке подинтегральной функции. Заметив, что обход контура Γ, совершается в отрицательном направлении, получим

$$F(p) = -\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(q^2+\omega^2)}\right]_{q=p} = \frac{p^2-\omega^2}{(q^2+\omega^2)^2}.$$

Итак,

$$t\cos\omega t \overset{dots}{=} \frac{p^2-\omega^2}{(q^2+\omega^2)^2}.$$

Следующая теорема формулирует достаточные условия того, что заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p является изображением некоторой функции $f(t)$ действительной переменной t.

Теорема 3. Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $F(p)$ - аналитическая функция в области $Re\, p > a$;

б) в области $Re\ p > a$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg p$;

в) для всех $Re\, p = x > a$ сходится интеграл $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|dy < M,\ x > a.$

Тогда функция $F(p)$ при $Re\ p > a$ является изображением функции $f(t)$ действительной переменной t, которая определяется выражением $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)dp,\ x > a.$

Во многих практически важных случаях интеграл (33), дающий выражение оригинала по заданной функции $F(p)$ комплексной переменной может быть вычислен с помощью методов вычисления контурных интегралов от функции комплексной переменной. Пусть функция $F(p)$, первоначально заданная в области $Re\ p > a$, может быть аналитически продолжена на всю плоскость p и пусть её аналитическое продолжение при $Re\ p < a$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. В этом случае интеграл (33) может быть вычислен при помощи теории вычетов.

Пример. Найдём оригинал функции $F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $Re\ p > 0$. Так как условия теоремы 3 выполнены, то

$$F(p) \overset{dots}{=} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} dp, \quad x > 0.$$

Аналитическое продолжение функции $F(p)$ в левую полуплоскость $Re\, p < 0$, функция $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, удовлетворяет условиям леммы Жордана и имеет две особые точки - полюсы первого порядка при $p_{1,2} = \pm i\omega$. Поэтому при $t \geq 0$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2} res\left[e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}, p_k\right] = \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin \omega t, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим далее частные случаи, когда определение оригинала для заданной функции $F(p)$ комплексной переменной производится особенно просто.

Предположим, что изображение $F(p)$ аналитично в бесконечно удалённой точке (тогда $F(\infty) = 0$). Оказывается, что в этом случае оригинал можно находить, беря формально сумму оригиналов членов лорановского разложения функции $F(p)$ в окрестности бесконечно удалённой точки.

Первая теорема разложения. Если $F(p)$ правильна в бесконечно удалённой точке и имеет в её окрестности $|p| \geq R$ лорановское разложение

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \tag{35}$$

то оригиналом $F(p)$ служит (умноженная на $\eta(t)$) функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}. \tag{36}$$

Пример 1. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Эта функция является однозначной аналитической функцией в окрестности точки $p = \infty$, причём в окрестности этой точки функция $F(p)$ может быть разложена в ряд Лорана:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{1}{p^{2k+1}}.$$

Поэтому формула (36) даёт

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \overset{dots}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Полученный ряд представляет собой разложение весьма важной специальной функции - функции Бесселя нулевого порядка

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \overset{dots}{=} J_0(t). \tag{37}$$

Пример 2. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям первой теоремы разложения, причём

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{p^n}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \overset{dots}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} = J_0(2\sqrt{t}). \tag{38}$$

Вторая теорема разложения. Если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ - рациональная, правильная и несократимая дробь, $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k$ - нули функции $B(p)$, то оригинал этой функции-изображения имеет вид

$$f(t) = \sum_{(p_k)} res[F(p_k)e^{p_k t}], \tag{39}$$

где сумма берётся по всем полюсам функции $F(p)$. Если все полюсы функции $F(p)$ - первого порядка, то

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{40}$$