ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, А.А. АКИМОВ

К ТЕОРИИ АНАЛОГА ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F(x,y), \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D, ограниченной простой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(0,0)$ и $B_1(l,0)$, $l > 0$, и характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения (1) при $y < 0$

$$\gamma_1 : \xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt = 0, \quad \gamma_2 : \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt = l,$$

где $K(y) \in C[y_{c_1}, 0] \wedge C^2[y_{c_1}, 0]$, y_{c_1} — ордината точки C_1 пересечения характеристик γ_1 и γ_2. Пусть $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Для уравнения (1) в области D поставим задачу типа Неймана, изученную Моравец [1].

Задача Моравец. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D \cup \Gamma) \wedge C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$Ku_x dy - u_y dx = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{4}$$

$$Ku_x dy - u_y dx = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \gamma, \tag{5}$$

где ϕ и ψ — заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что задача (2)–(5) впервые изучена Моравец [1] для уравнения Чаплыгина (в этом случае в (1) $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$ при всех $(x,y) \in \overline{D}$, $A(x,y) = B(x,y) = C(x,y) = F(x,y) = 0$) в более общей постановке (в гиперболической части граничное условие (5) задано, вообще говоря, на нехарактеристической кривой) и в несколько иной области, чем D. Методом вспомогательных функций там доказана теорема единственности решения задачи при существенных геометрических ограничениях на кривую Γ в точках подхода к оси $y = 0$. В монографии Л. Берса ([2], с. 118) для уравнения Лаврентьева–Бицадзе методом вспомогательных функций доказана теорема единственности решения задачи (2)–(5) в постановке Моравец, когда кривая Γ в точках подхода к оси $y = 0$ перпендикулярна, производная $\frac{dy}{dx}$ не обращается в нуль на Γ, за исключением одной точки. В случае, когда кривая Γ совпадает с характеристикой, получена теорема единственности решения задачи Моравец для уравнения Чаплыгина [3] при условии $3K'^2 - 2KK'' \geq 0$, $y < 0$, и Лаврентьева–Бицадзе [4] без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ. В данной работе при некоторых ограничениях на коэффициенты

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-0100934, и Министерства образования Российской Федерации по фундаментальным исследованиям в области математики, грант № 22 .

уравнения (1) установлены экстремальные свойства решений задачи (2)–(5) в области гиперболичности D_- и смешанной области D. На основании этих свойств получены теоремы единственности решения задачи (2)–(5) без ограничений геометрического характера на кривую Γ. В п. 4 приведены достаточные условия относительно функции $K(y)$, при которых справедливы теоремы единственности решения задачи Моравец для уравнения Чаплыгина без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ.

2. Экстремальные свойства решений задачи Моравец в области гиперболичности

В области D_- перейдем к характеристическим координатам (ξ, η). Тогда уравнение (1) примет вид

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta), \tag{6}$$

где

$$a = \frac{(A + B\sqrt{-K} - K'/2\sqrt{-K})}{4K}, \quad c = \frac{C}{4K},$$
$$b = \frac{(A - B\sqrt{-K} + K'/2\sqrt{-K})}{4K}, \quad f = \frac{F}{4K},$$

а область D_- отображается в область Δ, ограниченную отрезками A_0B_0 $(\eta = \xi)$, B_0C_0 $(\eta = l)$ и A_0C_0 $(\xi = 0)$.

Пусть $\alpha = a\beta$, $\beta = \exp \int b\, d\xi$, функции $a(\xi,\eta)$, $a_\xi(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\overline{\Delta}$, кроме, быть может, отрезка $\overline{A_0B_0}$, и при $(\xi,\eta) \in \Delta \cup B_0C_0$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\alpha(0,\eta) \geq 0, \quad h = \alpha_\xi + \alpha b - c \geq 0, \quad \int_0^\xi \beta(t,\eta)c(t,\eta)dt > 0, \quad 0 < \xi < \eta \leq l; \tag{B_1}$$

$$c(\xi,\eta) = 0, \quad \alpha(\xi,\eta) - \int_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|dt > 0, \quad 0 < \xi < \eta \leq l. \tag{B_2}$$

Предполагается, что правая часть $f(\xi,\eta)$ уравнения (6) интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0, \xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, где $0 < \xi_0 < \eta_0 \leq l$.

Определение 1. Регулярным в Δ решением уравнения (6) назовем функцию $u(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям:
1) $u(\xi,\eta) \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\Delta)$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_0 u \equiv 0$ в Δ;
2) производная u_η непрерывна в $\overline{\Delta}$, кроме, быть может, отрезка $\overline{A_0B_0}$.

Лемма 1. *Пусть* 1) *коэффициенты уравнения* (6) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (B_1); 2) $f(\xi,\eta) \leq 0$ (≥ 0) *на* $\Delta \cup B_0C_0$; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее условию* $u_\eta = 0$ *на характеристике* A_0C_0. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{\Delta}}(\xi,\eta) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}}(\xi,\eta) < 0)$, *то этот максимум (минимум) достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Проинтегрируем тождество

$$\beta L_0(u) \equiv \frac{\partial}{\partial\xi}(\beta u_\eta + \alpha u) - \beta h u = f\beta \tag{7}$$

по отрезку NM прямой $\eta = \mathrm{const}$, принадлежащему области Δ. Тогда получим

$$(\beta u_\eta + \alpha u)\big|_N^M = \int_{NM} \beta h u\, d\xi + \int_{NM} \beta f\, d\xi. \tag{8}$$

В равенстве (8) отрезок NM может принадлежать не только области Δ, но и $\overline{\Delta} \setminus \overline{A_0B_0}$. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$. Допустим, что $Q \notin \overline{A_0B_0}$. Тогда точка $Q \in \Delta \cup B_0C_0$. Из точки Q

проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P. В (8) в качестве отрезка NM возьмем PQ. Тогда получим

$$\beta(Q)u_\eta(Q) = \int_{PQ} \beta hu\, d\xi + \int_{PQ} \beta f\, d\xi - \alpha(Q)u(Q) + \alpha(P)u(P) =$$

$$= \int_{PQ} \beta f\, d\xi + \int_{PQ} \beta h[u - u(Q)]d\xi + u(Q)\int_{PQ} \beta h\, d\xi - \alpha(Q)u(Q) + \alpha(P)u(P) =$$

$$= \int_{PQ} \beta f\, d\xi + \int_{PQ} \beta h[u - u(Q)]d\xi - u(Q)\int_{PQ} \beta c\, d\xi - \alpha(P)[u(Q) - u(P)].$$

Отсюда в силу условия (B_1) из неравенств $f \le 0$ в $\Delta \cup B_0C_0$ и $u(Q) > 0$ следует $u_\eta(Q) < 0$. Но это противоречит тому, что в точке Q максимума функции $u(\xi, \eta)$ производная $u_\eta(Q) \ge 0$.

Замечание 1. Лемма 1 по существу представляет собой результат Агмона, Ниренберга и Проттера [5], который приведен для удобства дальнейшего изложения.

Лемма 2. *Пусть* 1) *коэффициенты уравнения* (6) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (B_2); 2) $f(\xi, \eta) \equiv 0$ *на* $\Delta \cup B_0C_0$; 3) $u(\xi, \eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее условию* $u = 0$ *на характеристике* A_0C_0. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi, \eta)| > 0$, *то этот максимум достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. По условию $u(\xi, \eta)$ непрерывна в $\overline{\Delta}$ и $u_\eta(0, \eta) = 0$ на характеристике A_0C_0. Тогда $u(0, \eta) = \mathrm{const} = u(A_0)$ при всех $0 \le \eta \le l$. Поскольку коэффициент $c(\xi, \eta) \equiv 0$ в Δ, то, не теряя общности, считаем $u = 0$ на A_0C_0, т. к. в противном случае, рассматривая новую функцию $v(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) - u(A_0)$, имели бы, что $v(\xi, \eta)$ в области Δ является регулярным решением уравнения (6)

$$L_0(v) \equiv v_{\xi\eta} + av_\xi + bv_\eta = 0,$$

$v_\eta = u_\eta = 0$ на A_0C_0 и $v = 0$ на $\overline{A_0C_0}$. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi, \eta)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (6) можно предположить, что $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) = u(Q) > 0$ и $|u(\xi, \eta)| \le u(Q)$ в $\overline{\Delta}$. Допустим, что точка $Q \in \Delta \cup B_0C_0$. Тогда, рассуждая аналогично доказательству леммы 1, из (8) получим

$$\beta(Q)u_\eta(Q) + \alpha(Q)u(Q) = \int_{PQ} \beta hu\, d\xi. \tag{9}$$

Оценивая правую часть (9), имеем

$$\beta(Q)u_\eta(Q) \le \int_{PQ} \beta|h|\,|u| d\xi - \alpha(Q)u(Q) \le -u(Q)\Big[\alpha(Q) - \int_{PQ} \beta|h| d\xi\Big].$$

Отсюда в силу условия (B_2) следует $u_\eta(Q) < 0$. Это противоречит тому, что $u_\eta(Q) \ge 0$. Следовательно, наше допущение неверно, и $Q \in \overline{A_0B_0}$.

Замечание 2. Если $h = a_\xi + ab \ge 0$ на множестве $\Delta \cup B_0C_0$, то условие (B_2) равносильно системе неравенств $a(0, \eta) > 0$, $h \ge 0$, $c \equiv 0$ при $0 < \xi < \eta \le l$; если же $h = a_\xi + ab < 0$ на множестве $\Delta \cup B_0C_0$, то условие (B_2) равносильно системе неравенств $2\alpha(\xi, \eta) - \alpha(0, \eta) > 0$, $h < 0$, $c \equiv 0$ при $0 < \xi < \eta \le l$.

Замечание 3. Если в леммах 1 и 2 краевое условие $u_\eta = 0$ на левой характеристике A_0C_0 заменить на $u_\xi = 0$ на правой характеристике C_0B_0, то для выполнения заключения этих лемм нужно заменить условия (B_k), $k = 1, 2$, на следующие условия:

$$b(\xi, l) < 0, \quad h^* = b_\eta + ab - c \geq 0, \quad \int_\eta^l \beta^*(\xi, t) c(\xi, t) dt > 0, \quad 0 \leq \xi < \eta < l; \tag{B_1^*}$$

$$c(\xi, \eta) = 0, \quad \alpha^*(\xi, \eta) + \int_\eta^l \beta^*(\xi, t) |h^*(\xi, t)| dt < 0, \quad 0 \leq \xi < \eta < l, \tag{B_2^*}$$

где $\beta^* = \exp \int a\, d\eta$, $\alpha^* = b\beta^*$. Полученные таким образом утверждения назовем соответственно леммами 1^* и 2^*.

3. Экстремальные свойства решений задачи Моравец в смешанной области

Лемма 3 ([5], [6]). *Пусть* 1) *в области* D_+ *коэффициенты уравнения* (1) *ограничены и* $C(x, y) \leq 0$; 2) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D_+ \cup AB) \wedge C^2(D_+)$, $Lu \equiv F(x, y) \geq 0$ (≤ 0) *в* D_+; 3) $\max\limits_{\overline{D_+}} u(x, y) = u(x_0, 0) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D_+}} u(x, y) = u(x_0, 0) < 0)$, $0 < x_0 < l$. *Тогда*

$$\lim_{y \to 0+0} u_y(x_0, y) = u_y(x_0, 0+0) < 0 \ \ (> 0). \tag{10}$$

Обозначим через Ω достаточно малую окрестность точки B_1, и пусть $\Omega_1 = D_+ \cap \Omega$.

Лемма 4. *Пусть* 1) *выполнены условия* 1) *и* 2) *леммы* 3; 2) *коэффициенты уравнения* (1) *и производные* A_x *и* B_y *непрерывны в* $\overline{\Omega_1}$ *и там удовлетворяют условиям* $2C - A_x - B_y \leq 0$, $B(x, 0) \geq 0$; $B\, dx - A\, dy \geq 0$ *на* $\Gamma \cap \overline{\Omega_1}$; 3) $Ku_x^2 + u_y^2$ *и* $F(x, y)$ *суммируемы в* Ω_1. *Тогда, если* B_1 *является точкой изолированного положительного максимума (отрицательного минимума) функции* $u(x, y)$, *то существует точка* $Q_1 \in (\Gamma \cup A_1B_1) \cap \overline{\Omega_1}$ *такая, что*

$$\delta_s[u(Q_1)] > 0 \quad (\delta_s[u(Q_1)] < 0). \tag{11}$$

Доказательство. Возьмем число $r \in (0, u(B_1))$, настолько близкое к числу $u(B_1)$, чтобы кривая Γ_0, составленная из линии уровня $u(x, y) = r$, целиком лежала в малой окрестности Ω точки B_1 и при всех (x, y), принадлежащих области G, ограниченной кривыми B_1B_2, Γ_0 и отрезком B_0B_1, $u(x, y) \geq r$. Здесь B_0 и B_2 — точки пересечения кривой Γ_0 соответственно с отрезком A_1B_1 и кривой Γ. Существование такой кривой Γ_0 обосновывается аналогично работе [7], причем кривая Γ_0 является кусочно-гладкой. В области G рассмотрим функцию $v(x, y) = u(x, y) - r$, которая является решением уравнения

$$Lv(x, y) \equiv K(y) v_{xx} + v_{yy} + Av_x + Bv_y + Cv = F - Cr \geq 0, \tag{12}$$

$$v(x, y) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0. \tag{13}$$

Предположим, что неравенство (11) не выполняется, т.е.

$$\delta_s[u(x, y)] \leq 0 \ \ \forall (x, y) \in B_0B_1 \cup B_1B_2. \tag{13^*}$$

Интегрируя тождество

$$vLv = (Kvv_x + \tfrac{1}{2}Av^2)_x + (vv_y + \tfrac{1}{2}Bv^2)_y - Kv_x^2 - v_y^2 + v^2(C - \tfrac{1}{2}A_x - \tfrac{1}{2}B_y)$$

по области G с учетом условий (12), (13) и (13^*), получим

$$\int_{B_0B_1} [2v(x, 0)v_y(x, 0) + B(x, 0)v^2(x, 0)]dx + \int_{B_1B_2} v^2(B\, dx - A\, dy) + \\ + \int_{B_1B_2} v(v_y\, dx - Kv_x\, dy) + \iint_G (Kv_x^2 + v_y^2) dx\, dy - \\ - \iint_G [v^2(2C - A_x - B_y) + 2(Cr - F)v] dx\, dy = 0. \tag{14}$$

Отсюда следует $v = 0$, т. е. $u = \text{const}$ в $\overline{G_+}$, а это противоречит тому, что B_1 является точкой изолированного максимума. $\square$

Определение 2. Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию, удовлетворяющую условиям (2) и (3), и дополнительно потребуем, чтобы производная u_η была непрерывной в замкнутой области $\overline{D_-}$, кроме, быть может, отрезка $\overline{A_1B_1}$.

Теорема 1. *Пусть* 1) *коэффициенты уравнения* (1) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x,y) \le 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям леммы* 1; 3) $F(x,y) \ge 0$ (≤ 0) *на* $D_+ \cup D_-$; 4) $u(x,y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (5), *где функция* $\psi(x,y) = 0$ *на характеристике* γ_1; 5) $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) < 0)$. *Тогда* $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y)$ $\big(\min\limits_{\overline{D}} u(x,y)\big)$ *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q) > 0$. В силу внутреннего принципа экстремума для эллиптических уравнений $u(x,y) \ne \text{const}$ не может принимать положительного максимума $u(Q)$ в области D_+. Поэтому значение $u(Q)$ принимается на $\overline{D_-}$ или на $\overline{\Gamma}$. Допустим, что $Q \in \overline{D_-}$. По условию 4) теоремы $Ku_x\,dy - u_y\,dx = 0$ на характеристике γ_1: $\sqrt{(-K)}dy + dx = 0$. Отсюда следует, что вдоль кривой γ_1 производная $u_\eta = 0$. Тогда в этом случае на основании леммы 1 точка $Q \in \overline{A_1B_1}$. Пусть $Q \in A_1B_1$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из гиперболической части области D имеем $u_y(x_0, -0) \ge 0$, что в силу леммы 3 противоречит неравенству (10). Следовательно, $Q \in \overline{\Gamma}$.

Теорема 2. *Пусть* 1) *коэффициенты уравнения* (1) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x,y) \le 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям леммы* 2; 3) $F(x,y) \equiv 0$ *в* D; 4) $u(x,y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (5), *где функция* $\psi(x,y) \equiv 0$. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Поскольку $Ku_x\,dy - u_y\,dx = 0$ на характеристике γ_1, то $u_\eta = 0$ вдоль этой кривой. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1) можно полагать, что $u(Q) > 0$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, получим $Q \in \overline{D_-} \cup \overline{\Gamma}$. Допустим, что $Q \in \overline{D_-}$. Тогда по лемме 2 точка $Q \in \overline{A_1B_1}$. Пусть $Q \in A_1B_1$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из гиперболической части D_- имеем $u_y(x_0, -0) \ge 0$, что на основании леммы 3 противоречит неравенству (10). Значит, $Q \in \overline{\Gamma}$.

Теорема 3. *Пусть* 1) *выполнены условия леммы* 4 *и условие* 2) *теоремы* 1; 2) $u(x,y)$ — *решение однородной задачи* (2)–(5) *из класса регулярных в* D *решений уравнения* (1); 3) $u(0,0) = 0$. *Тогда* $u(x,y) \equiv 0$ *в* $\overline{D}$.

Доказательство. Допустим, что существует точка $(x_1, y_1) \in D$ такая, что $u(x_1, y_1) \ne 0$, $u(x,y) \ne \text{const}$ в D_+. Пусть для определенности $u(x_1, y_1) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q) > 0$, $Q \in \overline{D}$. В силу теоремы 1 точка $Q \in \Gamma \cup B_1$. Пусть $Q \in \Gamma$. В этом случае на основании граничного принципа экстремума для эллиптических уравнений в точке Q имеем неравенство $\delta_s(u) = Ku_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds}\big|_Q > 0$, которое противоречит равенству $\delta_s(u) = 0$ на Γ. Пусть $Q = B_1$. В этом случае B_1 является точкой изолированного положительного глобального максимума функции $u(x,y)$. Тогда линии уровня $u(x,y) = r$ функции $u(x,y)$ в D_+, где $r \in (0, u(Q))$, при r, близких к числу $u(Q)$, будут располагаться концентрично вокруг точки B_1 с концами на кривой $A_1B_1 \cup \Gamma$ [8]. Отсюда следует, что функция $u(x,0)$ в малой окрестности B_1, т. е. на $[b_0, l)$ оси $y = 0$ возрастает. В противном случае существуют такие $x_1, x_2 \in [b_0, l)$, что $x_1 < x_2$ и $u(x_1, 0) = u(x_2, 0)$. Пусть $u(x_1, 0) = u(x_2, 0)$. Рассмотрим линии уровня $u(x,y) = u(x_1, 0)$, $u(x,y) = u(x_2, 0)$. Функция $u(x,0)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ имеет экстремум, который достигается в некоторой точке $(x_0, 0)$, $x_0 \in (x_1, x_2)$.

Линия уровня $u(x,y) = u(x_0,0)$ будет расположена между линиями $u(x_1,y) = u(x_1,0)$ и $u(x,y) = u(x_2,0)$. Это означает, что на линии $u(x,y) = u(x_0,0)$ функция $u(x,y)$ в области D_0 имеет локальный экстремум, чего быть не может. Если $u(x_1,y) > u(x_2,0)$, то существует $x_3 \in [x_2,l)$ такая, что $u(x_1,0) = u(x_3,0)$. Тогда, рассуждая аналогично, снова получим противоречие. Пусть ξ — любая точка из $[b_0,l)$. Из точки $E(\xi,0)$ опустим перпендикуляр с основанием в $Q_2 \in D_-$ и из этой точки проведем характеристику уравнения (1) до пересечения с характеристикой A_1C_1 в точке C_0. Область, ограниченную кривыми A_1C_0, C_0Q_2, Q_2E и EA_1, обозначим через H. На основании леммы 1 можно показать, что $\max\limits_{\overline{H}} u(x,y) > 0$ достигается на отрезке $\overline{A_1E}$ в точке E. Значит, $u_y(\xi,0-0) \geq 0$ при всех $\xi \in [b_0,l)$. В силу леммы 4 в любой достаточно малой окрестности Ω точки B_1 на $\Gamma \cup A_1B_1$ существует точка Q_1 такая, что $\delta_s[u(Q_1)] > 0$. Если $Q_1 \in \overline{\Omega_1} \cap \Gamma$, то получим противоречие с граничным условием $\delta_s[u(Q_1)] = 0$ на Γ. Пусть $Q_1 \in \overline{\Omega_1} \cap A_1B_1$. Тогда на отрезке $[b_0,l)$ существует точка $(\xi_0,0)$ такая, что $u_y(\xi_0,0+0) < 0$, а это противоречит тому, что $u_y(\xi_0,0-0) \geq 0$. Следовательно, $u(x,y) \equiv \mathrm{const}$. С учетом условия 3) $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Теорема 4. *Пусть* 1) *выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 2 *и условия леммы* 4; 2) $C(x,y) \equiv 0$ *в области* D_+. *Тогда* $u(x,y) = \mathrm{const}$ *в* D.

Доказательство. В области D введем вспомогательную функцию $W(x,y) = u(x,y) - u(A_1)$, которая является решением однородной задачи (2)–(5), где $\phi(x,y) \equiv 0$, $\psi(x,y) \equiv 0$, $F(x,y) \equiv 0$, $C(x,y) \equiv 0$, причем $W(A_1) = 0$. Докажем, что $W(x,y) \equiv 0$ в D. Допустим, что $W(x,y) \neq \mathrm{const}$ в области D_+. Тогда $\max\limits_{\overline{D}} |W(x,y)| = |W(Q)| > 0$. В силу теоремы 2 точка $Q \in \Gamma \cup B_1$. Не теряя общности рассуждений, считаем, что $W(Q) > 0$. Далее, рассуждая аналогично доказательству теоремы 3, получим $W(x,y) \equiv 0$ в D. Отсюда следует $u(x,y) \equiv u(A_1)$ в D.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y|y|^n u_{xx} + u_{yy} + a_0|y|^{\frac{n-1}{2}} u_x = 0, \tag{15}$$

где $n > 0$, $a_0 = \mathrm{const}$, которое изучалось многими авторами [8], [9]. В характеристических координатах (ξ,η) уравнение (15) принимает вид

$$u_{\xi\eta} + \frac{p_1}{n-\xi} u_\xi - \frac{p_2}{n-\xi} u_\eta = 0, \tag{16}$$

где

$$p_1 = \frac{n-2a_0}{2(n+2)}, \quad p_2 = \frac{n+2a_0}{2(n+2)}.$$

В случае уравнения (16)

$$a = \frac{p_1}{n-\xi}, \quad b = -\frac{p_2}{n-\xi}, \quad c = 0, \quad \beta = (n-\xi)^{p_2},$$
$$\alpha = p_1(n-\xi)^{p_2-1}, \quad h = \frac{p_1(1-p_2)}{(n-\xi)^2}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что коэффициенты a, b и a_ξ непрерывны в $\overline{\Delta} \setminus \overline{A_0B_0}$ и при $a_0 < n/2$ удовлетворяют условию (B_2). Следовательно, если $a_0 < n/2$, то для уравнения (14) справедлива теорема 2 и все утверждения, вытекающие из этой теоремы. Теорема 4 о единственности решения задачи (2)–(5) для уравнения (14) имеет место при $a_0 \leq 0$. Последнее ограничение вызвано условиями (11).

4. Единственность решения задачи Моравец для уравнения Чаплыгина

Рассмотрим в области D уравнение Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{17}$$

где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$ при $y \in [y_{c_1}, y_m]$, $y_m = \max\{y \mid (x,y) \in \overline{D}\}$, $K(y)$ — достаточно гладкая на $[y_{c_1}, y_m]$ функция. Именно для этого уравнения впервые была поставлена задача (2)–(5) в газовой динамике [11], [2].

В характеристических координатах уравнение (17) имеет вид (6), где

$$a = \frac{1}{8}K'(y)(-K)^{-\frac{3}{2}}, \quad b = -\frac{1}{8}K'(y)(-K)^{-\frac{3}{2}}, \quad c = f \equiv 0,$$

$$\beta = (-K)^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha = a\beta = \frac{1}{8}K'(y)(-K)^{-\frac{5}{4}},$$

$$h = a_\xi + ab = a'_y y'_\xi + ab = \frac{1}{64(-K)^3}[5K'^2 - 4KK''].$$

Если $5K'^2 - 4KK'' \geq 0$ в $D_- \cup C_1B_1$, то коэффициенты уравнения (17) удовлетворяют условию (B_2). Если же $5K'^2 - 4KK'' < 0$ в $D_- \cup C_1B_1$, то при условии

$$2\alpha(\xi,\eta) - \alpha(0,\eta) = \frac{1}{8}K'(y)(-K)^{-\frac{5}{4}}\left[2 - \frac{K'_0(y)}{K'(y)}\left(\frac{K}{K_0}\right)^{\frac{5}{4}}\right] > 0,$$

где $K_0(y) = K(y)\big|_{\xi=0}$, $K'_0(y) = K'(y)\big|_{\xi=0}$, также выполнено условие (B_2) (см. замечание 2).

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Если* $5K'^2 \geq 4KK''$ *или* $5K'^2 < 4KK''$ *и* $2 - \frac{K'_0(y)}{K'(y)}\left(\frac{K}{K_0}\right)^{\frac{5}{4}} > 0$ *при* $y < 0$, *то для уравнения* (17) *справедлива теорема* 2, *в частности, теорема* 4 *о единственности решения задачи* (2)–(5).

Теперь на основании результатов Проттера [12], [13] можно получить другие достаточные условия единственности решения задачи (2)–(5) для уравнения Чаплыгина.

Теорема 6. *Пусть* 1) *выполнено одно из следующих условий*: а) *функция* $F(y) = 2\left(\frac{K}{K'}\right)' + 1 = \frac{1}{K'^2}(3K'^2 - 2KK'') \geq 0$ *при* $y < 0$; б) *существует* $d_1 = \mathrm{const} < 0$, *зависящая от размеров области* D_-, *такая, что* $F(y) \geq d_1$; в) *существует* $d_2 = \mathrm{const} > 0$ *такая, что* $y_m < d_2$, *а функция* $F(y)$ *при* $y < 0$ *может принимать любые конечные значения*; 2) $u(x,y)$ — *решение однородной задачи* (2)–(5) *для уравнения* (17), *при этом* $Ku_x^2 + u_y^2$ *суммируема в малых окрестностях точек* A_1 *и* B_1.

Тогда $u(x,y) \equiv \mathrm{const}$ *в* D.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $v(x,y) = u(x,y) - u(C_1)$, где $u(C_1)$ — значение функции $u(x,y)$ в точке C_1, которая является решением однородной задачи (2)–(5) для уравнения (17), причем $v(C_1) = 0$. Из условия $Kv_x\,dy - v_y\,dx = 0$ на характеристике A_1C_1 что равносильно $v_\eta(0,\eta) = 0$ при $0 < \eta < l$, и $v(C_1) = 0$ вытекает $v(x,y) = 0$ на $\overline{A_1C_1}$. Далее, проведя рассуждения, аналогичные доказательству единственности решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина [12], [13], [8], получим $v(x,y) = 0$ в D. Отсюда следует $u(x,y) \equiv u(C_1)$ в D.

Литература

1. Morawetz C.S. *Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation* // Proc. Roy. Soc. – 1956. – V. 236. – № 1024. – С. 141–144.
2. Берс Л. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* – М.: Ин. лит., 1961. – 208 с.

3. Сабитов К.Б. *О задаче Моравец для уравнений смешанного типа* // Международн. семин. “Дифференциальные уравнения и их приложения”. – Самара, 27–30 июня 1995. – С. 73.
4. Сомова Н.В. *О задаче Неймана–Моравец для уравнения Лаврентьева–Бицадзе* // Международн. семин. “Дифференциальные уравнения и их приложения”. – Самара, 27–30 июня 1995. – С. 78.
5. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.N. *A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type* // Comm. Appl. Math. – 1953. – V. 6. – № 4. – P. 455–470.
6. Сабитов К.Б. *К вопросу о существовании решения задачи Трикоми* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 12. – С. 2092–2101.
7. Сабитов К.Б., Капустин Н.Ю. *О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – С. 60–68.
8. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1985. – 304 с.
9. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
10. Смирнов М.М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.* – М.: Наука, 1966. – 292 с.
11. Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике.* – М.: Наука, 1973. – 712 с.
12. Protter M.H. *Uniqueness theorems for Trikomi problem.* I // J. Rat. Mech. and Anal. – 1953. – V. 2. – № 1. – P. 107–114.
13. Protter M.H. *Uniqueness theorems for Trikomi problem.* II // J. Rat. Mech. and Anal. – 1955. – V. 4. – № 5. – P. 721–733.

Стерлитамакский государственный
педагогический институт

Стерлитамакский филиал
АН Республики Башкортостан

Поступила
12.11.1999