ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 519.853

И.И. ЕРЕМИН

О КВАДРАТИЧНЫХ И ПОЛНОКВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Объектом изучения является задача

$$\max\{-x^TQ_0x+(c_0,x)\mid x^TQ_jx+(a_j,x)\le b_j,\ j=1,\dots,m\}, \tag{1}$$

в которой $\{x,c_0\}\subset \mathbf{R}^n$, $\{Q_k\}_{k=0}^m$ — матрицы размерности $n\times n$. Матрицу Q_0 будем предполагать положительно определенной, матрицы $\{Q_j\}_{j=1}^m$ — неотрицательно определенными. Если все Q_j, $j=1,\dots,m$, — нулевые матрицы, то (1) является общей задачей квадратичного программирования

$$\max\{(c_0,x)-x^TQ_0x\mid Ax\le b\}, \tag{2}$$

где A — матрица со строками a_j, b — вектор с координатами b_j, $j=1,\dots,m$. Если в (2) вместо Q_0 взять αQ_0, $\alpha>0$, то получим задачу

$$\max\{(c_0,x)-\alpha x^TQ_0x\mid Ax\le b\}, \tag{3}$$

которая регуляризирует (по Тихонову) задачу линейного программирования

$$L:\max\{(c_0,x)\mid Ax\le b\}.$$

Ниже будут рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к теории задач вида (1), в первую очередь, вопросы двойственности, регуляризации, несобственности.

1. Двойственность

Если $F(x,u)=f_0(x)-\sum\limits_{j=1}^m u_jf_j(x)$ — функция Лагранжа, поставленная в соответствие задаче математического программирования

$$P:\max\{f_0(x)\mid f_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,m\} \tag{4}$$

с дифференцируемыми функциями $\{f_k(x)\}_{k=0}^m$, то двойственной к P ([1], § 23) является

$$P^*:\min\{F(x,u)\mid \bigtriangledown_xF(x,u)=0,\ u\ge 0\}. \tag{5}$$

Формирование такой двойственности основано на универсальной схеме, в силу которой в качестве двойственной к P выступает задача $\min\limits_{u\ge0}\max\limits_{(x)}F(x,u)$, что в случае дифференцируемости функций $f_k(x)$, $k=0,1,\dots,m$, приводит к выписанной задаче P^*.

Если (4) — задача выпуклого программирования (ВП), то справедливо

Утверждение 1 ([1], теорема 24.3). *Пусть задача выпуклого программирования P удовлетворяет условиям*

1^0. *P разрешима,*

2^0. *функции $\{f_k(x)\}_{k=0}^m$ дифференцируемы,*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96–01–00116 и 96–15–96247).

3^0. *существует допустимый для P вектор p такой, что $f_j(p) < 0$ для нелинейных $f_j(x)$ (условие регулярности).*

Тогда P^* разрешима, при этом $\operatorname{opt} P = \operatorname{opt} P^*$.

Далее функции $\{f_k(x)\}_{k=0}^m$ будут иметь вид, соответствующий задаче (1), т. е. $f_0(x) = (c_0, x) - x^T Q_0 x$, $f_j(x) = x^T Q_j x + (a_j, x) - b_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Лемма 1. *Задача P^*, определенная согласно* (5) *для $F(x,u) = f_0(x) - (u, F(x))$, $F(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, может быть эквивалентно преобразована к виду*

$$\min\{(b,u) + \tfrac{1}{4}(c_0 - A^T u)^T Q_u^{-1}(c_0 - A^T u) \mid u \geq 0\}, \tag{1*}$$

где $Q_u := Q_0 + \sum\limits_{j=1}^m u_j Q_j$.

Доказательство. Элементарные преобразования функции Лагранжа $F(x,u) = (c_0,x) - x^T Q_0 x - \sum\limits_{j=1}^m u_j [x^T Q_j x + (a_j, x) - b_j]$ дают

$$F(x,u) = (b,u) + (c_0 - A_0^T u, x) - x^T Q_u x. \tag{6}$$

Так как $\bigtriangledown_x F(x,u) = -2Q_u x + (c_0 - A^T u) = 0$, то $x = \frac{1}{2} Q_u^{-1}(c_0 - A^T u)$. Подставляя найденное значение для x в соотношение (6), получаем тот вид минимизируемой функции, который и фигурирует в двойственной задаче $(1)^*$. $\square$

Замечание 1. Если в исходной задаче (1) имеется требование $x \geq 0$, то $(1)^*$ принимает вид

$$\min_{u \geq 0}\{(b,u) + \tfrac{1}{4}(c - A^T u)_+^T Q_u^{-1}(c - A^T u)_+\}; \tag{7}$$

здесь $(\cdot)_+$ означает положительную срезку вектора, стоящего внутри скобки.

Замечание 2. Если положить $Q_0 = \alpha E$, $\alpha > 0$ (E — единичная матрица), $Q_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, то задача (1) примет вид

$$\max\{(c_0, x) - \alpha\|x\|^2 \mid Ax \leq b\}, \tag{8}$$

а задача $(1)^*$ — вид

$$\min_{u \geq 0}\{(b,u) + \tfrac{1}{4\alpha}\|c_0 - A^T u\|^2\}. \tag{8*}$$

Действительно, как в случае задач (8) и $(8)^*$, так и в более общей ситуации задач (1) и $(1)^*$, справедлив и обратный переход, связанный с формированием двойственных задач, т. е. $((1)^*)^*$ и $((8)^*)^*$. Здесь справедлива взаимная двойственность, т. е. $((1)^*)^* \equiv (1)$ и, в частности, $((8)^*)^* \equiv (8)$. Во избежание громоздких преобразований ограничимся проверкой второго соотношения.

Лемма 2. *Задача $((8)^*)^*$, двойственная к $(8)^*$, совпадает с задачей* (8).

Доказательство. Перепишем задачу $(8)^*$ в виде

$$\min_{u \geq 0}\{(b,u) + \tfrac{1}{4\alpha}\|y\|^2 \mid y = c_0 - A^T u\}$$

и поставим ей в соответствие функцию Лагранжа

$$F(u, y; x, v) := (b,u) + \tfrac{1}{4\alpha}\|y\|^2 + (c_0 - A^T u - y, x) - (v, u),$$

в которой u и y — свободные переменные, а x и $v \geq 0$ — множители Лагранжа, соотнесенные ограничениям $y = c_0 - A^T u$ и $u \geq 0$ соответственно. Задача $((8)^*)^*$, двойственная к $(8)^*$, запишется в виде

$$\max\{F(\cdot) \mid \bigtriangledown_{[u,y]} F(\cdot) = 0,\ v \geq 0\}.$$

Нужно показать, что она может быть преобразована в задачу (8).

Сделаем преобразования функции $F(\cdot)$ и уравнения $\bigtriangledown_{[u,y]}F(\cdot)=0$:

$$F(\cdot)=\tfrac{1}{4\alpha}\|y\|^2-(Ax-b+v,u)-(c_0-y,x),$$
$$\bigtriangledown_u F(\cdot)=-(Ax-b+v)=0,\quad \bigtriangledown_y F(\cdot)=\tfrac{1}{2\alpha}y-x=0.$$

С учетом этих соотношений получаем

$$F(\cdot)=(c_0,x)-\alpha\|x\|^2,$$

а сама задача $((8)^*)^*$ примет вид

$$\max\{(c_0,x)-\alpha\|x\|^2 \mid Ax-b=-v\le 0\},$$

т. е. вид задачи (8). □

Теорема 1 (двойственности). *Пусть в задаче* (1) Q_0 *— положительно определенная, а* $\{Q_j\}_{j=1}^k$ *— неотрицательно определенные матрицы. Если для ограничений задачи* (1) *выполнено условие регулярности* (*пусть в форме* 3^0), *то задачи* (1) *и* $(1)^*$ *разрешимы, при этом* $\mathrm{opt}(1)=\mathrm{opt}(1)^*$.

Доказательство. Из совместности системы ограничений задачи (1) и ограниченности лебеговых множеств $\{x \mid f_0(x)\ge\alpha\}$, где $f_0(x)=(c_0,x)-x^TQ_0x$, вытекает разрешимость этой задачи. В силу общей теоремы двойственности, сформулированной выше как утверждение 1, разрешима и задача (5), соотнесенная к (1), причем $\mathrm{opt}(1)=\mathrm{opt}(5)$. Но так как переход от задачи (5) к задаче $(1)^*$ был эквивалентным (хотя и сопровождавшимся исключением из записи задачи переменной x), то равенство $\mathrm{opt}(1)=\mathrm{opt}(1)^*$ соблюдается. □

Замечание 3. Применительно к частной ситуации (8)–$(8)^*$ сформулированной теореме можно придать такую редакцию:

если $M=\{x \mid Ax\le b\}\ne\emptyset$, *то задачи* (8) *и* $(8)^*$ *разрешимы, при этом* $\mathrm{opt}(8)=\mathrm{opt}(8)^*$.

Замечание 4. Если в (8) есть требование $x\ge 0$, то $(8)^*$ принимает вид

$$\min\{(b,u)+\tfrac{1}{4\alpha}\|(c-A^Tu)_+\|^2 \mid u\ge 0\}.$$

2. Взаимная сопряженность методов регуляризации и квадратичных штрафных функций для задач линейного программирования

В этом пункте свяжем с задачей линейного программирования (ЛП) вида

$$L:\max\{(c,x)\mid Ax\le b,\ x\ge 0\} \tag{9}$$

задачу регуляризации (по Тихонову)

$$L_{\mathrm{reg}}:\max\{(c,x)-\alpha\|x\|^2 \mid Ax\le b, x\ge 0\} \tag{10}$$

и задачу, реализующую квадратичный метод штрафных функций,

$$L_{\mathrm{pen}}:\max\{(c,x)-R\|(Ax-b)_+\|^2 \mid\ x\ge 0\},\quad R>0. \tag{11}$$

Приведем хорошо известные факты (см., напр., [2]):

если v_0 *— двойственная оценка неравенства* $(c,x)\ge\alpha_0$ $(:=\mathrm{opt}\,L)$ *в задаче* $\min\{\|x\|^2 \mid Ax\le b,\ x\ge 0,\ (c,x)\ge\alpha_0\}$, *то при* $\alpha^{-1}>|v_0|$

$$\arg(10)=\arg\min\{\|x\|^2 \mid x\in\mathrm{Arg}\,L\}; \tag{12}$$

если L *разрешима и* $\widetilde{u}\in\mathrm{Arg}\,L^*$, *то*

$$0\le\mathrm{opt}\,L_{\mathrm{pen}}-\mathrm{opt}\,L\le\tfrac{1}{4R}\|\widetilde{u}\|^2. \tag{13}$$

Запишем задачу, двойственную к (10), имея в виду схему перехода от (1) к $(1)^*$,

$$\min\{(b,u) + \tfrac{1}{4\alpha}\|(c - A^T u)_+\|^2 \mid u \geq 0\}. \tag{10^*}$$

С другой стороны, задача, двойственная к которой совпадает с L_{pen}, будет

$$(L^*)_{\mathrm{reg}} : \min\{(b,u) + \tfrac{1}{4R}\|u\|^2 \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0\}. \tag{14}$$

Задача $(10)^*$, полученная по схеме перехода $(1) \to (1)^*$, как раз и дает задачу (11), что легко проверяется. Обсуждаемые задачи свяжем схемой

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "(\mathrm{reg})"'] \arrow[dr, "(\mathrm{pen})"] & \\
L_{\mathrm{reg}} \arrow[d, shift right, "(*)"'] & & L_{\mathrm{pen}} \arrow[d, shift right] \\
(10)^* \equiv (L^*)_{\mathrm{pen}} \arrow[u, shift right] & & (L^*)_{\mathrm{reg}} \equiv (14) \arrow[u, shift right, "(*)"']
\end{tikzcd}$$

Схема 1.

Приведенная схема фиксирует следующие факты.

1) Двойственная задача $(10)^*$ к задаче регуляризации L_{reg} реализует квадратичный метод штрафных функций для L^* — двойственной к L (и обратно).
2) Двойственная к задаче $(L^*)_{\mathrm{reg}}$, т. е. к задаче, регуляризирующей L^*, реализует квадратичный метод штрафных функций для L (и обратно).

Приведенные факты как раз и выражают смысл того, что метод регуляризации и квадратичный метод штрафных функций находятся в соотношении *взаимной сопряженности.* Это обстоятельство было вскрыто в работе автора [3] (см. формулы (8) и (9) этой работы). С учетом соотношения (12) (также принадлежащего автору) отсюда следует утверждение, смысл которого в следующем: хотя квадратичный метод штрафных функций решает задачу L приближенно, тем не менее двойственная к нему задача решает задачу L^* точно. Строгой формулировкой этого результата автор в то время не располагал (о нем автору сообщил в 1995 г. А.И. Голиков).

Теперь приведем строгую формулировку этого факта, положив в основу задачу

$$\max\{(c,x) - R(Ax-b)_+^T Q(Ax-b)_+ \mid x \geq 0\}, \tag{15}$$

соотнесенную задаче L в соответствии с квадратичным методом штрафных функций; здесь $R > 0$ — штрафной параметр, Q — положительно определенная матрица. В соответствии со схемой двойственности $(1) \to (1)^*$ задача (15) будет двойственной к

$$\min\{(b,u) + \tfrac{1}{4R} u^T Q^{-1} u \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0\}, \tag{16}$$

т. е. $(16)^* \equiv (15)$. Последняя выступает как задача регуляризации (по Тихонову) задачи L^* при стабилизаторе $u^T Q^{-1} u$. Теорема 1 в рассматриваемой ситуации принимает следующую простую формулировку.

Утверждение 2. *Если* $M := \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$, *то задачи* (15) *и* (16) *разрешимы, при этом* $\mathrm{opt}(15) = \mathrm{opt}(16)$.

Замечание 5. В нашем случае соотношения (12) и (13) принимают вид

$$\arg(16) = \arg\min\{u^T Q^{-1} u \mid x \in \operatorname{Arg} L^*\} \tag{17}$$

при $4R > |v_0|$ (т. е. при $R > |v_0|/4$), где v_0 — двойственная оценка неравенства $(b, u) \leq \beta$ в задаче

$$\min\{u^T Q^{-1} u \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0,\ (b, u) \leq \beta\},$$

где $\beta := \mathrm{opt}\ L^*$.

Если задача L разрешима и $\widetilde{u} \in \operatorname{Arg} L^*$, то

$$0 \leq \mathrm{opt}(15) - \mathrm{opt}\, L \leq \tfrac{1}{4R} \widetilde{u}^T Q^{-1} \widetilde{u}. \tag{18}$$

Теорема 2. *Если в квадратичном методе штрафных функций* (15) *параметр* R *выбран в соответствии с замечанием* 5, *т. е.* $R > \frac{1}{4}|v_0|$, *то*

$$0 \leq \mathrm{opt}(15) - \mathrm{opt}\, L = \tfrac{1}{4R} \widetilde{u}^T Q^{-1} \widetilde{u},$$

где $\widetilde{u}$ — ***нормальное*** *решение* (*в смысле* $\arg\min\{u^T Q^{-1} u \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0\}$) *задачи* L^*.

Доказательство. С одной стороны, согласно (17) $\mathrm{opt}(16) = (b, \widetilde{u}) + \frac{1}{4R} \widetilde{u}^T Q^{-1} \widetilde{u} = \mathrm{opt}\, L + \frac{1}{4R} \widetilde{u}^T Q^{-1} \widetilde{u}$; с другой — в соответствии с утверждением 2 $\mathrm{opt}(15) = \mathrm{opt}(16)$, т. е.

$$0 \leq \mathrm{opt}(15) - \mathrm{opt}\, L = (b, \widetilde{u}) - \mathrm{opt}\, L + \tfrac{1}{4R} \widetilde{u}^T Q^{-1} \widetilde{u} = \tfrac{1}{4R} \widetilde{u}^T Q^{-1} \widetilde{u},$$

что и требовалось. □

3. Несобственные задачи квадратичного программирования

Метод тихоновской регуляризации и метод квадратичных штрафных функций допускают соединение в рамках одной задачи, соотнесенной задаче L, пусть в постановке (9). Построим задачи

$$P : \max_{x \geq 0} \{(c, x) - \tfrac{1}{4r} x^T Q x - R(Ax - b)_+^T S (Ax - b)_+\}, \tag{19}$$

$$P^* : \min\{(b, u) + \tfrac{1}{4R} u^T S^{-1} u + r(c - A^T u)_+^T Q^{-1} (c - A^T u)_+\}; \tag{20}$$

здесь Q и S — положительно определенные матрицы, R и r — положительные параметры. Задачи P и P^* являются взаимно двойственными в смысле того правила формирования двойственности, которое было реализовано в п. 1, в частности, формирование задачи $(1)^*$ из (1) и (16) из (15). Конечно, сказанное требует обоснования, хотя и носит чисто выкладочный характер. В силу определенной громоздкости этих выкладок обоснование опускаем.

Для анализа связей между задачами P и L, а также P^* и L^*, выпишем отдельно задачи

$$\max\{(c, x) - \tfrac{1}{4r} x^T Q x \mid x \in M\}, \tag{21}$$

$$\min\{(b, u) + \tfrac{1}{4R} u^T S^{-1} u \mid u \in M^*\}, \tag{22}$$

где $M = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\}$, $M^* = \{u \geq 0 \mid A^T u \geq c\}$. Двойственными к ним будут

$$\min_{u \geq 0} \{(b, u) + r(c - A^T u)_+^T Q^{-1} (c - A^T u)_+\}, \tag*{$(21)^*$}$$

$$\max_{x \geq 0} \{(c, x) - R(Ax - b)_+^T S (Ax - b)_+\}. \tag*{$(22)^*$}$$

Переход от задач (21) и (22) к P и P^* связан с применением к первым техники квадратичного метода штрафных функций, для которого имеют место оценки уклонения. А именно, если, например, речь идет о задаче

$$\max\{f(x) \mid Ax \le b, x \ge 0\} \tag{23}$$

и ее редукции к задаче

$$\max_{x\ge 0}\{f(x) - R(Ax-b)_+^T S(Ax-b)_+\}, \tag{24}$$

то в ситуации разрешимости (23) справедлива оценка

$$0 \le \mathrm{opt}(24) - \mathrm{opt}(23) \le \tfrac{1}{4R}\|\overline{u}\|^2,$$

где $\overline{u} \in \mathrm{Arg}(23)^*$ (напр., [2], теорема 5.2). Применительно к ситуации задачи (21) эта оценка запишется в виде

$$0 \le \mathrm{opt}\,P - \mathrm{opt}(21) \le \tfrac{1}{4R}\|\overline{u}_r\|^2,$$

где $\overline{u}_r \in \mathrm{Arg}(21)^*$. В соответствии с (17) при достаточно большом $r > 0$

$$\arg(21) = \arg\min\{x^T Q x \mid x \in \mathrm{Arg}\,L\} \ (=: \widetilde{x}),$$

следовательно,

$$\mathrm{opt}(21) = (c, \widetilde{x}) - \tfrac{1}{4r}\widetilde{x}^T Q \widetilde{x}.$$

Используя это соотношение, получаем

$$|\,\mathrm{opt}\,P - \mathrm{opt}\,L| \le |\,\mathrm{opt}\,P - \mathrm{opt}(21)| + \tfrac{1}{4r}\widetilde{x}^T Q\widetilde{x} \le \tfrac{1}{4R}\|\overline{u}_r\|^2 + \tfrac{1}{4r}\widetilde{x}^T Q\widetilde{x}. \tag{25}$$

Аналогично

$$|\,\mathrm{opt}\,P^* - \mathrm{opt}\,L^*| \le \tfrac{1}{4r}\|\overline{x}_R\|^2 + \tfrac{1}{4R}\widetilde{u}^T S^{-1}\widetilde{u}, \tag{26}$$

где $\overline{x}_R \in \mathrm{Arg}(22)^*$, $\widetilde{u} \in \mathrm{Arg}\min\{u^T S^{-1} u \mid u \in \mathrm{Arg}\,L^*\}$. Подводит итоги по совокупности свойств, связывающих задачи (19) и (20), т. е. P и P^*,

Теорема 3. 1^0. *P и P^* взаимно двойственны, в частности,* $P^* \xrightarrow{(*)} (P^*)^* \equiv P$.

2^0. *P и P^* разрешимы независимо от разрешимости или неразрешимости L.*

3^0. $\mathrm{opt}\,P = \mathrm{opt}\,P^*$.

4^0. *Если E — общее значение левых частей в соотношениях* (25) *и* (26), *то*

$$E \le \min\{\tfrac{1}{4R}\|\overline{u}_r\|^2 + \tfrac{1}{4r}\widetilde{x}^T Q\widetilde{x},\ \tfrac{1}{4r}\|\overline{x}_R\|^2 + \tfrac{1}{4R}\widetilde{u}^T S^{-1}\widetilde{u}\}$$

(*смысл $\overline{u}_r$ и $\overline{x}_R$ разъяснен выше*).

Сделаем пояснения к каждому пункту сформулированной выше теоремы.

1. Чтобы получить вид задачи P^* как двойственной к P, вначале P следует переписать в виде

$$\max\{(c,x) - \tfrac{1}{4r}x^T Q x - R y^T Q y \mid Ax - b \le y,\ y \ge 0,\ x \ge 0\};$$

далее построить для нее функцию Лагранжа

$$F(x,y;u,v,w) = (c,x) - \tfrac{1}{4r}x^T Q x - R y^T Q y - (u, Ax-b-y) + (v,x) + (w,y),$$

через которую и строится двойственная задача в форме

$$\min\{F(x,y;u,v,w) \mid \nabla_{[x,y]}F(x,y;u,v,w) = 0,\ [u,v,w] \ge 0\}.$$

Последняя же путем эквивалентных преобразований приводится к виду P^*. По аналогичной схеме проверяется и обратный переход, а именно, $P^* \xrightarrow{(*)} (P^*)^* \equiv P$.

2. Разрешимость задач P и P^* будет следовать из проверки хотя бы того факта, что каждое из лебеговых множеств $f(x) \geq \alpha$, $f^*(u) \leq \beta$ выпукло и ограничено (может быть и пустым); здесь $f(x)$ — максимизируемая функция в задаче P, $f^*(u)$ — минимизируемая функция в задаче P^*, α и β — действительные числа.
3. Свойство 3^0 вытекает из утверждения 1.
4. Оценка для E составляет содержание неравенств (25) и (26).

Литература

1. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. *Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.* Учебн. пособие. – М.: Наука, 1976. – 192 с.
2. Еремин И.И. *Несобственные задачи квадратичного программирования и вопросы регуляризации* // Параметрич. оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач матем. программирования. – Свердловск, 1985. – С. 47–50.
3. Еремин И.И. *Противоречивые модели оптимального планирования.* – М.: Наука, 1988. – 160 с.

Институт математики и механики
Уральского Отделения
Российской Академии Наук

Поступила
15.09.1998