

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной деятельности КФУ

Проф. Д.К. Нурғалиев



20\_\_ г.

**Программа дисциплины**

Б1.В.ДВ.2. Современные численные методы линейной алгебры

Направление подготовки: 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

Направленность (профиль) подготовки: 05.13.01 Системный анализ, управление и обработка информации

Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань  
2014

## **Аннотация**

### **1. Цели освоения дисциплины**

В рамках курса «Современные численные методы линейной алгебры» предполагается рассмотреть такие разделы, как численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений прямыми и итерационными методами, решения частичной и полной проблемы на собственные значения.

### **2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры**

Курс «Современные численные методы линейной алгебры» входит в разряд дисциплин по выбору и опирается на знания из общих курсов математического и функционального анализа, алгебры и геометрии.

### **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) в соответствии с ФГОС ВО программ подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре**

#### **Знать:**

- основные понятия, приемы и методы численных методов линейной алгебры;

#### **Уметь:**

- решать на компьютеры большие системы линейных алгебраических уравнений, используя для этого современные численные методы решений;

#### **Владеть:**

- математическим аппаратом решения задач линейной алгебры с использованием современных пакетов прикладных программ;

#### **Демонстрировать способность и готовность:**

- применять полученные знания в своей профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины формируются компетенции:

#### **универсальные:**

способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1);

#### **общепрофессиональные:**

владение методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности (ОПК-1);

#### **профессиональные:**

способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в профессиональной области, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов (ПК-1);

### **4. Структура и содержание дисциплины (модуля)**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов (лекции 18 ч., практика 18 ч., самостоятельная работа 72 ч.).

<b>№</b>	<b>Раздел Дисциплины</b>	<b>Семестр</b>	<b>Неделя семестра</b>	<b>Виды учебной работы, включая самостоятельную работу аспирантов и трудоем-</b>	<b>Форма промежуточной аттестации (по семестрам)</b>
----------	--------------------------	----------------	------------------------	--	--

				кость (в часах)			
				лекции	практика	самост. работа	
1	Метод исключения Гаусса. Трудоемкость. Условия осуществимости. Выбор ведущего элемента.	4	1-2	2	2	8	
2	LU-разложение матрицы. Разложение Холецкого для симметричных матриц. Схемы треугольной факторизации с выбором ведущего элемента.	4	3-4	2	2	8	
3	QR-разложение матрицы. Метод ортогонализации Грама-Шмидта. Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства.	4	5-7	2	2	8	
4	Прямые методы решения СЛАУ для разреженных, профильных, ленточных матриц. Ускорение солверов и оптимизация оперативной памяти с учетом разреженной структуры матрицы.	4	8	2	2	8	
5	Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости. Методы Якоби, Зейделя, релаксации и их сходимость.	4	9	2	2	8	
6	Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы. Методы минимальных невязок и поправок. Метод наискорейшего спуска. Предобусловленный метод сопряженных градиентов.	4	10	2	2	8	
7	Частичная проблема соб-	4	11-12	2	2	8	

	ственных значений. Степенной метод определения максимального по модулю собственного числа. Сходимость. Определение следующих по порядку собственных чисел. Обратные итерации с постоянным сдвигом.						
8	Полная проблема собственных значений. Метод Якоби. Сходимость.	4	13-14	2	2	8	
9	Решение систем нелинейных уравнений. Двухслойные итерационные методы. Метод Ньютона и его модификации. Приближенное вычисление матрицы производных: аналог метода секущих.	4	15	2	2	8	

## 5. Образовательные технологии

Обучение происходит в форме лекционных и практических занятий, а также самостоятельной работы студентов. Теоретический материал излагается на лекциях, причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции, не может заменить учебник. Его цель – формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике.

Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины «Современные численные методы линейной алгебры» на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

**6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов**

## ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО КУРСУ

### **Тема 1. Метод исключения Гаусса. Трудоемкость. Условия осуществимости. Выбор ведущего элемента.**

Решение тестовых СЛАУ из библиотеки gallery разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и/или с MatLab решением ( $x=A\backslash b$ ,  $x=A\backslash b$ ). Итерационное уточнение решения, программная реализация.

### **Тема 2. LU-разложение матрицы. Разложение Холецкого для симметричных матриц. Схемы треугольной факторизации с выбором ведущего элемента.**

Программирование в MatLab факторизации матрицы с выбором ведущего элемента по столбцу. Решение тестовых систем из библиотеки gallery разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ( $x=L\backslash b$ ,  $x=U\backslash b$ ).

### **Тема 3. QR-разложение матрицы. Метод ортогонализации Грама-Шмидта. Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства.**

Программирование в Матлаб QR-разложения. Тестирование метода. Сравнение прямых методов решения СЛАУ для полных и разреженных матриц.

### **Тема 4. Прямые методы решения СЛАУ для разреженных, профильных, ленточных матриц. Ускорение солверов и оптимизация оперативной памяти с учетом разреженной структуры матрицы.**

Использование в Матлаб формата sparse для разреженных матриц. Реализация прямых методов с учетом разреженной структуры матриц. Тестирование методов решения разреженных СЛАУ.

### **Тема 5. Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости. Методы Якоби, Зейделя, релаксации и их сходимость.**

Программная реализация базовых итерационных методов. Тестирование программ. Подбор итерационных параметров, влияние итерационных параметров на сходимость итераций.

### **Тема 6. Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы. Методы минимальных невязок и поправок. Метод наискорейшего спуска. Предобусловленный метод сопряженных градиентов.**

Понятие предобусловливателя. Реализация методов минимальных поправок и наискорейшего спуска с предобусловливателем. Реализация предобусловленного метода сопряженных градиентов.

### **Тема 7. Частичная проблема собственных значений. Степенной метод определения максимального по модулю собственного числа. Сходимость. Определение следующих по порядку собственных чисел. Обратные итерации с постоянным сдвигом.**

Реализация методов прямых и обратных итераций решения частичной проблемы собственных значений.

### **Тема 8. Полная проблема собственных значений. Метод Якоби. Сходимость.**

Программная реализация метода Якоби. Решение тестовых задач. Понятие о QR-методе (для симметричных матриц).

### **Тема 9. Решение систем нелинейных уравнений. Двухслойные итерационные методы. Метод Ньютона и его модификации. Приближенное вычисление матрицы производных: аналог метода секущих.**

Сведение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач. Реализация метода простой итерации. Реализация метода Ньютона. Реализации различных модификаций метода Ньютона.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА АСПИРАНТОВ (СРА) включает следующие виды работ:

**Тема 1. Метод исключения Гаусса. Трудоемкость. Условия осуществимости. Выбор ведущего элемента.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул метода исключения Гаусса. Подсчет трудоемкости метода. Написание программы метода.

**Тема 2. LU-разложение матрицы. Разложение Холецкого для симметричных матриц. Схемы треугольной факторизации с выбором ведущего элемента.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул треугольных разложений. Написание программ факторизации матрицы с выбором ведущего элемента по столбцу. Решение тестовых систем из библиотеки gallery разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ( $x=L\backslash b$ ,  $x=U\backslash b$ ).

**Тема 3. QR-разложение матрицы. Метод ортогонализации Грама-Шмидта. Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул QR-разложения. Написание программы в Матлаб QR-разложения. Тестирование метода. Сравнение прямых методов решения СЛАУ для полных и разреженных матриц.

**Тема 4. Прямые методы решения СЛАУ для разреженных, профильных, ленточных матриц. Ускорение солверов и оптимизация оперативной памяти с учетом разреженной структуры матрицы.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Формат sparse для разреженных матриц. Написание программ в Матлаб прямых методов с учетом разреженной структуры матриц. Тестирование методов решения разреженных СЛАУ.

**Тема 5. Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости. Методы Якоби, Зейделя, релаксации и их сходимость.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Написание программ базовых итерационных методов. Тестирование программ. Подбор итерационных параметров, влияние итерационных параметров на сходимость итераций.

**Тема 6. Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы. Методы минимальных невязок и поправок. Метод наискорейшего спуска. Предобусловленный метод сопряженных градиентов.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Изучение методов, основанных на минимизации функционала невязки. Понятие предобусловливателя. Написание программ методов минимальных поправок и наискорейшего спуска с предобусловливателем. Написание программы предобусловленного метода со-

пряженных градиентов.

**Тема 7. Частичная проблема собственных значений. Степенной метод определения максимального по модулю собственного числа. Сходимость. Определение следующих по порядку собственных чисел. Обратные итерации с постоянным сдвигом.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Написание программ методов прямых и обратных итераций решения частичной проблемы собственных значений.

**Тема 8. Полная проблема собственных значений. Метод Якоби. Сходимость.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул метода Якоби. Программная реализация метода Якоби. Решение тестовых задач. Понятие о QR-методе (для симметричных матриц).

**Тема 9. Решение систем нелинейных уравнений. Двухслойные итерационные методы. Метод Ньютона и его модификации. Приближенное вычисление матрицы производных: аналог метода секущих.**

Домашнее задание, примерные вопросы:

Изучение литературы по итерационным методам решения нелинейных уравнений. Сведение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач. Реализация метода простой итерации. Реализация метода Ньютона. Реализации различных модификаций метода Ньютона.

**7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

**Основная литература:**

1. Численные методы. Курс лекций : Учебное пособие/ Срочко В.А. - СПб.: Издательство "Лань", 2010. - 208 с. ISBN 978-5-8114-1014-9 e.lanbook.com

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=378](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=378)

2. Лекции по численным методам математической физики: Учебное пособие / М.В. Абакумов, А.В. Гулин; МГУ им. М.В. Ломоносова - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 158 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-006108-5, 500 экз. [www.znaniyum.com](http://www.znaniyum.com) <http://znaniyum.com/go.php?id=364601>

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.:Бином. Лаборатория знаний, 2012. - 636 с.

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=4397](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4397)

4. Глазырина Л. Л. Введение в численные методы: 3. учебное пособие / Л. Л. Глазырина, М. М. Карчевский; Казан. федер. ун-т.?Казань: Казанский университет, 2012.?121 с.

5. Шевцов Г.С., Крюкова О.Г., Мызникова Б.И. Численные методы линейной алгебры. - СПб.: Лань, 2011. - 496 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/1800/>

**Дополнительная литература:**

1. Формалеев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 400 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/48183/>

2. Шевцов Г.С., Крюкова О.Г., Мызникова Б.И. Численные методы линейной алгебры. - СПб.: Лань, 2011. - 496 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/1800/>

3. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. - 240 с. URL:

[http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=4399](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4399)

**8. Программное обеспечение и интернет-ресурсы:**

Портал математических интернет-ресурсов – <http://www.math.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов – <http://www.allmath.com/>

Портал ресурсов по естественно-научным дисциплинам – <http://en.edu.ru/>

Сайт образовательных ресурсов по математике – <http://www.exponenta.ru/>

Справочник по компьютерной математике – <http://www.users.kaluga.ru/math/>

### **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест аспирантов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО аспирантуры (Приказ Минобрнауки РФ от 30.07.2014 № 866).

Автор(ы): Тимербаев М.Р.

Рецензенты:

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики КФУ от 29 августа 2014 года, протокол № 7.