УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 2 ISSN 1815-6088 (Print)
С. 156–171 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 532.5.013.4

ТЕОРЕМА МАЙЛСА И НОВЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕЙЛОРА – ГОЛДСТЕЙНА

А.А. Гаврильева[1], *Ю.Г. Губарев*[2,3], *М.П. Лебедев*[1,4]

[1]*Институт физико-технических проблем Севера имени В.П. Ларионова СО РАН, г. Якутск, 677891, Россия*

[2]*Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, 630090, Россия*

[3]*Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, г. Новосибирск, 630090, Россия*

[4]*Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, г. Якутск, 677000, Россия*

Аннотация

Прямым методом Ляпунова доказана абсолютная линейная неустойчивость установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести по отношению к плоским возмущениям как в приближении Буссинеска, так и без него. Строго описана область применимости известного необходимого условия линейной неустойчивости стационарных плоско-параллельных сдвиговых течений идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в приближении Буссинеска и без него – теоремы Майлса. Сконструированы аналитические примеры иллюстративного плана.

Ключевые слова: идеальная стратифицированная жидкость, приближение Буссинеска, установившиеся течения, устойчивость, прямой метод Ляпунова, неустойчивость, плоские возмущения, априорная оценка, теорема Майлса, аналитические решения, функции Бесселя, функции Уиттекера

Введение

В статье [1] прямым методом Ляпунова доказана абсолютная линейная неустойчивость установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести относительно плоских возмущений. Построена априорная экспоненциальная оценка снизу, которая свидетельствует о нарастании со временем рассматриваемых возмущений. Получены достаточные условия практической неустойчивости данных стационарных течений по отношению к малым плоским возмущениям.

В работе [2] также прямым методом Ляпунова доказана абсолютная линейная неустойчивость установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости в поле силы тяжести относительно плоских возмущений в приближении Буссинеска. Сконструирована априорная экспоненциальная нижняя оценка, свидетельствующая о росте изучаемых возмущений во времени. Выведены достаточные условия практической неустойчивости настоящих стационарных течений по отношению к малым плоским возмущениям. Указаны границы применимости теоремы Майлса и показан необходимый и достаточный характер данной теоремы.

В настоящей статье строгое описание области применимости теоремы Майлса распространено на задачу линейной устойчивости установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести относительно плоских возмущений без приближения Буссинеска. Кроме того, для уравнений движения идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости в поле силы тяжести, которые линеаризованы в окрестности исследуемых стационарных течений, в приближении Буссинеска и без него найдены новые частные аналитические решения, наглядно демонстрирующие, что подкласс малых плоских возмущений рассматриваемых установившихся течений, который не подпадает под действие теоремы Майлса, не пуст.

1. Постановка задачи (в приближении Буссинеска)

Рассмотрим нестационарные плоские течения невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными неограниченными поверхностями в поле силы тяжести в приближении Буссинеска [2]. В согласии с этим приближением пренебрегают изменениями плотности, когда речь идет об их влиянии на инерцию, но никак не изменениями веса (или плавучести) жидкости [3].

Данные течения характеризуются эволюционными решениями начально-краевой задачи вида [3–6]

$$\begin{gathered}\widehat{\rho}_0 Du=-p_x,\quad \widehat{\rho}_0 Dv=-p_y-\rho g,\quad D\rho=0,\quad u_x+v_y=0\quad \text{в}\quad \tau;\\ v=0\quad \text{на}\quad \partial\tau;\\ u(x,y,0)=u_0(x,y),\quad v(x,y,0)=v_0(x,y),\end{gathered}\tag{1}$$

где $\widehat{\rho}_0\equiv\text{const}>0$ – средняя плотность жидкости, $\rho(x,y,t)$ – ее возмущения; $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ – составляющие поля скорости жидкости; $p(x,y,t)$ – возмущения поля давления; $g\equiv\text{const}>0$ – модуль проекции вектора ускорения свободного падения на ось ординат; $D\equiv\partial/\partial t+u\partial/\partial x+v\partial/\partial y$ – дифференциальный оператор; x, y – декартовы координаты; $\tau\equiv\{(x,y):-\infty<x<+\infty,\quad 0<y<H\}$ – область течения жидкости; $\partial\tau\equiv\{(x,y):-\infty<x<+\infty,\quad y=0,H\}$ – граница области течения; u_0, v_0 – начальные компоненты поля скорости жидкости; t – время; $H\equiv\text{const}$ – ширина зазора между поверхностями. Нижними индексами из независимых переменных здесь и далее обозначаются отвечающие им частные производные искомых функций. Полагается, что начальные составляющие u_0 и v_0 поля скорости жидкости обращают в тождество четвертое соотношение смешанной задачи (1). Более того, считается, что начальная компонента v_0 поля скорости жидкости удовлетворяет пятому равенству этой задачи.

Начально-краевая задача (1) имеет точные стационарные решения в форме

$$\rho=\rho_0(y),\quad u=U(y),\quad v=0,\quad p=P(y)\equiv p_0-g\int\limits_0^y\rho_0(y_1)\,dy_1,\tag{2}$$

где ρ_0, U – произвольные функции координаты y, p_0 – аддитивная постоянная величина, y_1 – переменная интегрирования. Данные решения соответствуют установившимся плоско-параллельным сдвиговым течениям идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твердыми параллельными плоскостями в поле силы тяжести в приближении Буссинеска.

Цель дальнейшего исследования заключается в том, чтобы выяснить, могут ли стационарные решения (2) быть устойчивыми по отношению к малым плоским возмущениям. Для этого проводится линеаризация смешанной задачи (1) около точных стационарных решений (2), приводящая к начально-краевой задаче вида

$$
\begin{gathered}
\widehat{\rho}_0\left(u'_t + Uu'_x + v'\,\frac{dU}{dy}\right) = -p'_x, \quad \widehat{\rho}_0(v'_t + Uv'_x) = -p'_y - \rho' g,\\
\rho'_t + U\rho'_x + v'\,\frac{d\rho_0}{dy} = 0, \quad u'_x + v'_y = 0 \qquad \tau;\\
v' = 0 \quad \text{на} \;\; \partial\tau;\\
u'(x,y,0) = u'_0(x,y), \quad v'(x,y,0) = v'_0(x,y).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Здесь $u'(x,y,t)$, $v'(x,y,t)$, $\rho'(x,y,t)$, $p'(x,y,t)$ – малые плоские возмущения полей скорости u, v, плотности ρ и давления p; u'_0, v'_0 – начальные составляющие возмущенного поля скорости жидкости.

К сожалению, линейного аналога интеграла энергии для смешанной задачи (3), насколько нам известно, пока найти не удалось.

Далее прямым методом Ляпунова [7, 8] будет доказано, что установившиеся течения (2) абсолютно неустойчивы (в теоретическом смысле, на полубесконечных временных интервалах) относительно малых плоских возмущений [2].

При этом нарастающие малые плоские возмущения ищутся в подклассе нестационарных плоских же течений, для которого эти возмущения служат отклонениями траекторий движения жидких частиц от отвечающих настоящим траекториям линий тока установившихся течений (2). Данные возмущения можно описать посредством поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}(x,y,t) = (\xi_1, \xi_2)$, определяемого уравнениями [1, 2]

$$
\xi_{1t} = u' - U\xi_{1x} + \xi_2\,\frac{dU}{dy}, \quad \xi_{2t} = v' - U\xi_{2x}. \tag{4}
$$

Для подкласса (4) малых плоских возмущений (3) линейный аналог интеграла энергии представляет собой функционал в форме

$$
E \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\Big[\widehat{\rho}_0\big(\xi_{1t}^2 + \xi_{2t}^2 - U^2[\xi_{1x}^2 + \xi_{2x}^2]\big) - \frac{d\rho_0}{dy}\,g\xi_2^2\Big]\,dy\,dx = \text{const}. \tag{5}
$$

Знакопостоянством подынтегральное выражение (5) обладает исключительно на состояниях покоя и только при наличии следующего условия на стационарные распределения плотности ρ_0 рассматриваемой жидкости: $d\rho_0/dy \le 0$. Для установившихся же течений (2) знакопостоянства у подынтегрального выражения (5) нет. Следовательно, условия устойчивости стационарных течений (2) по отношению к малым плоским возмущениям (3), (4) не существует. Особо нужно отметить то обстоятельство, что в коэффициентах подынтегрального выражения (5) локальное число Ричардсона

$$
\mathrm{Ri} \equiv -\frac{g}{\widehat{\rho}_0}\frac{d\rho_0}{dy}\left(\frac{dU}{dy}\right)^{-2} \tag{6}
$$

отсутствует. Этот факт свидетельствует о том, что локальное число Ричардсона (6) при формулировке условия устойчивости из энергетических соображений не может быть использовано [9].

Дальше в изучение вводится вспомогательный функционал вида [10]

$$M \equiv \widehat{\rho}_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{H} (\xi_1^2 + \xi_2^2)\, dy\, dx.$$

Для данного функционала из свойства сохранения линейного аналога интеграла энергии (5) со временем может быть получено дифференциальное неравенство

$$\frac{d^2 M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2(\lambda^2 + \alpha)M \geq 0 \tag{7}$$

с параметром λ и постоянной $\alpha \equiv (g/\widehat{\rho}_0) \max\limits_{0 \leq y \leq H} \mid d\rho_0/dy \mid > 0$.

Утверждение 1. *Если параметр $\lambda > 0$, а на наряду с (7) выполнены дополнительные условия*

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) > 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) \geq 2\left(\lambda + \frac{\alpha}{\lambda}\right) M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right),$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{\pi n\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right),$$

$$\frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\pi n\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha}}\right),$$

то с необходимостью будет вытекать априорная экспоненциальная оценка снизу

$$M(t) \geq C\exp(\lambda t), \tag{8}$$

где C – известная положительная постоянная величина [2].

Доказательство утверждения 1 подробно изложено в [1, 10, 11], поэтому в настоящей статье оно не приводится.

Надо заметить, что подкласс (4) решений линеаризованной начально-краевой задачи (3), которые растут во времени в согласии с построенной оценкой (8), с добавочными условиями

$$M(0) > 0, \quad \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\left(\lambda + \frac{\alpha}{\lambda}\right) M(0)$$

при $t = 0$ на поле лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}_0(x, y)$ и их производных по времени $(\boldsymbol{\xi}_t)_0(x, y)$ первого порядка, не есть пустое множество [2].

Итак, соотношение (8) показывает, что согласно определению неустойчивости по Ляпунову [7, 8], как минимум, одно малое плоское возмущение (3), (4) установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений (2) невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости нарастает со временем, при этом не медленнее, чем экспоненциально. Поскольку данное соотношение получено без привлечения любых дополнительных требований ограничительного характера к стационарным течениям (2), то это обстоятельство и говорит об абсолютной теоретической неустойчивости последних относительно рассматриваемых малых плоских возмущений.

Далее осуществляется сравнение установленного результата с известным спектральным результатом о неустойчивости стационарных плоско-параллельных сдвиговых течений (2) идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными бесконечными поверхностями в поле силы тяжести при наличии приближения Буссинеска, полученным ранее методом интегральных соотношений для малых плоских возмущений в виде нормальных волн, – теоремой Майлса [4–6, 12].

2. Теорема Майлса (в приближении Буссинеска)

Эволюционные решения линеаризованной смешанной задачи (3) из подкласса (4) рассматриваются в форме нормальных волн вида

$$\xi_1(x,y,t) \equiv f_1(y) \exp ik(x-ct), \quad \xi_2(x,y,t) \equiv f_2(y) \exp ik(x-ct),$$
$$p'(x,y,t) \equiv f_3(y) \exp ik(x-ct), \tag{9}$$

где f_1, f_2 и f_3 – произвольные функции; i – мнимая единица; $c \equiv c_r + ic_i$ – комплексная постоянная, k, c_r, c_i – вещественные постоянные.

Подстановка выражений (4), (9) в линеаризованную начально-краевую задачу (3) приводит к заключению, что малые плоские возмущения ξ_1, ξ_2 и p' (3), (4) в форме нормальных волн (9) будут удовлетворять линеаризованной смешанной задаче (3), если функции f_1, f_2 и f_3 будут, в свою очередь, служить решениями системы алгебраического и обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widehat{\rho}_0 (c-U)^2 k f_1 = i f_3,$$
$$\widehat{\rho}_0 (c-U)^2 k^2 f_2 = \frac{df_3}{dy} - g\,\frac{d\rho_0}{dy} f_2, \quad ikf_1 + \frac{df_2}{dy} = 0 \tag{10}$$

с граничными условиями

$$f_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, H. \tag{11}$$

Путем исключения функций f_1 и f_3 из системы (10) получаем определяющее соотношение для функции f_2 – уравнение Тейлора – Голдстейна [4, 12]:

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} - \frac{2}{c-U}\,\frac{dU}{dy}\,\frac{df_2}{dy} - \left(k^2 + \frac{1}{(c-U)^2}\,\frac{g}{\widehat{\rho}_0}\,\frac{d\rho_0}{dy}\right) f_2 = 0. \tag{12}$$

Далее замена искомой функции $f(y) \equiv (c-U) f_2$ позволяет записать краевую задачу (11), (12) в следующем окончательном виде:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{1}{c-U}\,\frac{d^2 U}{dy^2} - k^2 - \frac{1}{(c-U)^2}\,\frac{g}{\widehat{\rho}_0}\,\frac{d\rho_0}{dy}\right) f = 0,$$
$$f = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ H. \tag{13}$$

Утверждение 2. *В приближении Буссинеска выполнение неравенства*

$$\mathrm{Ri} \geq \frac{1}{4} \tag{14}$$

для локального числа Ричардсона (6) *в области* τ *течения жидкости представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости точных стационарных решений* (2) *смешанной задачи* (1) *по отношению к одному неполному незамкнутому подклассу малых плоских возмущений* (3), (4) *в форме нормальных волн* (9) [2].

Доказательство. Доказательство проводится методом интегральных соотношений [4–6, 12].

Сначала в уравнении (13) делается замена искомой функции

$$f(y) \equiv (U(y) - c)^{1/2} h(y),$$

потом соотношение, которое получается после замены, умножается на комплексно-сопряженную функцию h^* и наконец в итоговом выражении выделяется его мнимая часть:

$$c_i\left(-\left|\frac{dh}{dy}\right|^2 - k^2 \mid h \mid^2 + \frac{\mid h \mid^2}{\mid U-c \mid^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\left(\frac{1}{4} - \mathrm{Ri}\right)\right) = \mathrm{Im}\left[\frac{d}{dy}\left((U-c)h^* \frac{dh}{dy}\right)\right]. \quad (15)$$

Равенство (15) интегрируется по поперечному сечению зазора между двумя неподвижными непроницаемыми твердыми параллельными плоскостями с применением граничных условий (13), что приводит к соотношению вида

$$c_i \int\limits_0^H \frac{\mid h \mid^2}{\mid U-c \mid^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\left(\frac{1}{4} - \mathrm{Ri}\right) dy = c_i \int\limits_0^H \left(\left|\frac{dh}{dy}\right|^2 + k^2 \mid h \mid^2\right) dy > 0. \quad (16)$$

Из выражения (16) вытекает, что экспоненциально растущие ($c_i > 0$) малые плоские возмущения (3), (4) в форме нормальных волн (9) могут превратить его в тождество в том и лишь в том случае, когда $\mathrm{Ri} < 1/4$ хотя бы в одной точке в пределах области τ течения жидкости.

Однако, как наглядно будет продемонстрировано ниже, соотношение (16) следует из равенства (15) не для всех функций h.

В самом деле, если интеграл по поперечному сечению зазора между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными бесконечными поверхностями от правой части выражения (15) переписать в виде

$$\int\limits_0^H \mathrm{Im}\left(\frac{d}{dy}\left[(U-c)h^* \frac{dh}{dy}\right]\right) dy = \mathrm{Im}\left(\int\limits_0^H d\left[(U-c)h^* \frac{dh}{dy}\right]\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left[(U(H)-c)h^*(H) \lim_{y\to H} \frac{h(y)-h(H)}{y-H} - (U(0)-c)h^*(0) \lim_{y\to 0} \frac{h(y)-h(0)}{y-0}\right], \quad (17)$$

то из него вытекает возможность таких ситуаций, как

$$\mathrm{Im}\left[\lim_{y\to H} \frac{h(y)-h(H)}{y-H}\right] = \pm\infty \quad (18)$$

и/или

$$\mathrm{Im}\left[\lim_{y\to 0} \frac{h(y)-h(0)}{y-0}\right] = \pm\infty, \quad (19)$$

когда функция dh/dy состоит из счетного набора ветвей. Примерами такого рода функций dh/dy являются логарифмические и обратные тригонометрические функции.

Действительно, поскольку в формулировке краевой задачи (13) функции df/dy нет, то отсутствует способ однозначного выбора той или иной ветви и функции df/dy, и функции dh/dy. Следовательно, все ветви функции dh/dy равноправны, и интеграл (17) должен зануляться для всего счетного набора ветвей функции

dh/dy в целом, а это и служит поводом к возникновению неопределенностей типа $0 \cdot (\pm\infty)$.

Из вышеизложенного вытекает, что функции h с производными dh/dy первого порядка, содержащими в себе счетный набор ветвей, под действие теоремы Майлса [4–6, 12] не подпадают. Именно они и будут доставлять контрпримеры к данной теореме.

В результате теорема Майлса [4–6, 12] верна не для всех функций h (15), а только для их частного класса с производными dh/dy, которые состоят из конечного числа ветвей. Это и свидетельствует о том, что: 1) условие теоретической линейной устойчивости (14) носит как достаточный, так и необходимый характер, причем относительно неполного незамкнутого подкласса малых плоских возмущений (3), (4) в форме нормальных волн (9), (16); 2) никаких противоречий между теоремой Майлса [4–6, 12] и абсолютной теоретической линейной неустойчивостью установившихся течений (2), полученной в настоящей статье, нет.

Ниже конструируется пример точных стационарных решений (2) смешанной задачи (1) и наложенных на них малых плоских возмущений (3), (4), (9), (17)–(19), на которые действие критерия (14) теоретической линейной устойчивости не распространяется.

Пример (в приближении Буссинеска)

Рассматривается невязкая стратифицированная несжимаемая жидкость с линейными профилями установившегося поля продольной скорости U и стационарного поля плотности ρ_0:

$$U \equiv by + b_1, \quad b,\, b_1 > 0; \quad \rho_0 \equiv a - \frac{\widehat{\rho_0}}{g}\, y.$$

Здесь b, b_1 и a – постоянные величины.

Тогда локальное число Ричардсона (6) есть $\mathrm{Ri} = 1/b^2$, а краевая задача (13) для уравнения Тейлора – Голдстейна примет следующий вид:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{1}{(c - by - b_1)^2} - k^2\right) f = 0; \quad f = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\, H. \tag{20}$$

Без ограничения общности дифференциальное уравнение (20) может быть записано в форме

$$(c - by - b_1)^2\, \frac{d^2 f}{dy^2} + (1 - k^2 (c - by - b_1)^2) f = 0. \tag{21}$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$f(y) = \sqrt{c - by - b_1}\left[C_1 J_\nu\left(i\frac{k}{b}\,[c - by - b_1]\right) + C_2 Y_\nu\left(i\frac{k}{b}\,[c - by - b_1]\right)\right], \tag{22}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $\nu = (1/2)\sqrt{1 - (2/b)^2}$; $J_\nu(y)$, $Y_\nu(y)$ – трансцендентные функции Бесселя [13].

Для того чтобы найденное общее решение (22) дифференциального уравнения (21) было еще и решением краевой задачи (20) для уравнения Тейлора – Голдстейна на отыскание собственных значений и собственных функций, необходимо выполнение дисперсионного соотношения в форме

$$J_\nu\left(i\frac{k}{b}\,[c - b_1]\right) Y_\nu\left(i\frac{k}{b}\,[c - bH - b_1]\right) = Y_\nu\left(i\frac{k}{b}\,[c - b_1]\right) J_\nu\left(i\frac{k}{b}\,[c - bH - b_1]\right). \tag{23}$$

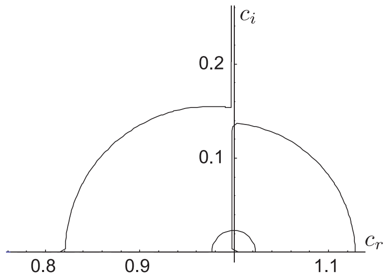

Рис. 1

К сожалению, дисперсионное соотношение (23) слишком сложно, чтобы его корни можно было найти в явном виде аналитическими методами.

Тем не менее, надо отметить, что функции Бесселя (22) обладают счетным набором ветвей [14], а как раз это и может быть причиной для возникновения ситуаций (18), (19). В итоге, у малых плоских возмущений (3), (4), (9), (20)–(22) существует реальная возможность не попасть под действие теоремы Майлса [4–6, 12] и нарастать во времени вне зависимости от того, выполнен критерий (14) теоретической линейной устойчивости либо нет (см. рис. 1, на котором представлено графическое решение [10] дисперсионного соотношения (23) для случая, когда $k = b = b_1 = H \equiv 1$, $\mathrm{Ri} = 1 > 1/4$, так что $c_r \approx 0.9996$, $c_i \approx 0.0235 > 0$).

Таким образом, утверждение 2 доказано. □

3. Постановка задачи (без приближения Буссинеска)

Далее рассматриваются нестационарные плоские течения идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твердыми параллельными плоскостями в поле силы тяжести [1].

Данные течения могут быть охарактеризованы эволюционными решениями смешанной задачи в форме [1, 4–6]

$$\begin{gathered}\rho D u = -p_x, \quad \rho D v = -p_y - \rho g, \quad D\rho = 0, \quad u_x + v_y = 0 \quad \text{в} \ \ \tau; \\ v = 0 \quad \text{на} \ \ \partial\tau; \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad v(x,y,0) = v_0(x,y).\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь $\rho(x,y,t)$ и $p(x,y,t)$ – поля плотности и давления жидкости соответственно.

Начально-краевая задача (24) имеет точные стационарные решения вида

$$\rho = \rho_0(y) > 0, \quad u = U(y), \quad v = 0, \quad p = P(y) \equiv p_0 - g\int\limits_0^y \rho_0(y_1)\,dy_1; \quad p_0 > 0. \tag{25}$$

Эти решения отвечают установившимся плоско-параллельным сдвиговым течениям невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными неограниченными поверхностями в поле силы тяжести.

Цель дальнейшего рассмотрения заключается в том, чтобы разобраться, будут ли стационарные решения (25) устойчивы по отношению к малым плоским возмущениям. Для этого проводится линеаризация смешанной задачи (24) в окрестности точных стационарных решений (25):

$$\rho_0\Big(u'_t + U u'_x + v'\,\frac{dU}{dy}\Big) = -p'_x, \quad \rho_0(v'_t + U v'_x) = -p'_y - \rho' g,$$

$$\begin{gathered}\rho'_t + U\rho'_x + v'\,\frac{d\rho_0}{dy} = 0, \quad u'_x + v'_y = 0 \quad \text{в} \quad \tau; \\ v' = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau; \\ u'(x,y,0) = u'_0(x,y), \quad v'(x,y,0) = v'_0(x,y).\end{gathered} \tag{26}$$

Затем прямым методом Ляпунова доказывается, что установившиеся течения (25) абсолютно неустойчивы в теоретическом смысле относительно малых плоских возмущений [1].

Следуя п. 1 настоящей работы, растущие малые плоские возмущения вновь разыскиваются в подклассе нестационарных плоских течений, описываемых при помощи поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ (4).

В подклассе (4) малых плоских возмущений (26) линейный аналог интеграла энергии служит функционалом в форме

$$E \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\left[\rho_0(\xi_{1t}^2 + \xi_{2t}^2 - U^2[\xi_{1x}^2 + \xi_{2x}^2]) - \frac{d\rho_0}{dy}\,g\xi_2^2\right]dy\,dx = \text{const}. \tag{27}$$

Знакопостоянством подынтегральное выражение (27) обладает опять только на состояниях покоя и лишь при выполнении такого условия на стационарные распределения плотности ρ_0 изучаемой жидкости, как $d\rho_0/dy \le 0$. Для установившихся же течений (25) знакопостоянства у подынтегрального выражения (27) нет. Следовательно, условия устойчивости стационарных течений (25) по отношению к малым плоским возмущениям не существует. Особо нужно подчеркнуть то, что в коэффициентах подынтегрального выражения (27) локальное число Ричардсона

$$\text{Ri} \equiv -\frac{g}{\rho_0}\,\frac{d\rho_0}{dy}\left(\frac{dU}{dy}\right)^{-2} \tag{28}$$

снова отсутствует. Этот факт говорит о том, что локальное число Ричардсона (28) опять не может быть использовано при формулировке условия устойчивости из энергетический соображений.

Далее в рассмотрение вводится вспомогательный функционал вида [10]

$$M \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\rho_0(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,dy\,dx.$$

Для данного функционала, используя свойство неизменности линейного аналога интеграла энергии (27) со временем, также можно получить дифференциальное неравенство (7), но на этот раз с постоянной величиной $\alpha \equiv g \max\limits_{0\le y\le H}|(d\rho_0/dy)\rho_0^{-1}| > 0$.

Аналогично, если при параметре $\lambda > 0$ добавить к соотношению (7) дополнительные условия утверждения 1, то из настоящего соотношения, в согласии с данными условиями, опять будет вытекать требуемая априорная экспоненциальная по времени нижняя оценка (8). Это обстоятельство снова свидетельствует об абсолютной теоретической неустойчивости установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений (25) идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости относительно малых плоских возмущений (4), (26).

Далее полученный результат сопоставляется с известным спектральным результатом о неустойчивости стационарных плоско-параллельных сдвиговых течений

(25) невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости в зазоре между двумя неподвижными непроницаемыми твердыми параллельными плоскостями в поле силы тяжести, который был обнаружен ранее методом интегральных соотношений для малых плоских возмущений в форме нормальных волн, – теоремой типа Майлса [4–6, 12].

4. Теорема типа Майлса (без приближения Буссинеска)

Исследуются эволюционные решения линеаризованной смешанной задачи (26) в виде нормальных волн (4), (9). Выполняя выкладки по аналогии с формулами (10)-(13), нетрудно получить краевую задачу для уравнения типа Тейлора – Голдстейна [5, 6] на нахождение собственных значений и собственных функций:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dy}\left(\rho_0\,\frac{df}{dy}\right)+\left(\frac{d}{dy}\left(\rho_0\,\frac{dU}{dy}\right)\frac{1}{c-U}-\rho_0 k^2-\frac{d\rho_0}{dy}\,\frac{g}{(c-U)^2}\right)f=0,\\ f=0\quad\text{при}\quad y=0,\,H.\end{gathered}\tag{29}$$

Утверждение 3. *Неравенство*

$$\mathrm{Ri}\geq\frac{1}{4}\tag{30}$$

для локального числа Ричардсона (28) *внутри области* τ *течения жидкости является необходимым и достаточным условием устойчивости точных стационарных решений* (25) *начально-краевой задачи* (24) *по отношению к одному неполному незамкнутому подклассу малых плоских возмущений* (4), (26) *в виде нормальных волн* (9).

Доказательство. Доказательство также проводится методом интегральных соотношений [4–6, 12].

В самом деле, сначала в уравнении (29) осуществляется замена искомой функции

$$f(y)\equiv(U(y)-c)^{1/2}h(y),$$

затем оно умножается на комплексно-сопряженную функцию h^* и наконец выделяется его мнимая часть:

$$c_i\rho_0\left(-\left|\frac{dh}{dy}\right|^2-k^2|h|^2+\frac{|h|^2}{|U-c|^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\mathrm{Ri}\right)\right)=\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dy}\left(\rho_0(U-c)h^*\,\frac{dh}{dy}\right)\right].\tag{31}$$

Интегрируя равенство (31) по поперечному сечению зазора между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными бесконечными поверхностями с применением граничных условий (29), несложно установить соотношение в форме

$$c_i\int\limits_0^H\frac{\rho_0|h|^2}{|U-c|^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\left(\frac{1}{4}-\mathrm{Ri}\right)dy=c_i\int\limits_0^H\left(\rho_0\left|\frac{dh}{dy}\right|^2+\rho_0k^2|h|^2\right)dy>0.\tag{32}$$

Из равенства (32) вытекает, что экспоненциально нарастающие ($c_i>0$) малые плоские возмущения (4), (26) в виде нормальных волн (9) могут обратить его в тождество в том и только в том случае, когда $\mathrm{Ri}<1/4$ даже всего лишь в одной точке области τ течения жидкости.

К сожалению, как будет показано дальше, соотношение (32) следует из равенства (31) не для всех функций h.

Действительно, если интеграл по поперечному сечению зазора между двумя неподвижными непроницаемыми твердыми параллельными плоскостями от правой части выражения (31) написать в форме

$$\int\limits_0^H \mathrm{Im}\left(\frac{d}{dy}\left[\rho_0(U-c)h^*\frac{dh}{dy}\right]\right)dy = \mathrm{Im}\left(\int\limits_0^H d\left[\rho_0(U-c)h^*\frac{dh}{dy}\right]\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\Bigg[\rho_0(H)(U(H)-c)h^*(H)\lim_{y\to H}\frac{h(y)-h(H)}{y-H} -$$

$$-\rho_0(0)(U(0)-c)h^*(0)\lim_{y\to 0}\frac{h(y)-h(0)}{y-0}\Bigg], \qquad (33)$$

то из него будет вытекать возможность таких ситуаций, как

$$\mathrm{Im}\left[\lim_{y\to H}\frac{h(y)-h(H)}{y-H}\right] = \pm\infty \qquad (34)$$

и/или

$$\mathrm{Im}\left[\lim_{y\to 0}\frac{h(y)-h(0)}{y-0}\right] = \pm\infty, \qquad (35)$$

когда функцию dh/dy составляет счетный набор ветвей.

В самом деле, так как в постановку краевой задачи (29) функция df/dy не входит, нет способа однозначно выбрать ту или иную ветвь и данной функции, и функции dh/dy. Следовательно, все ветви функции dh/dy равноправны, так что интеграл (33) должен обнуляться для всего счетного набора ветвей функции dh/dy в совокупности. Этот факт и представляет собой основание для порождения неопределенностей вида $0\cdot(\pm\infty)$.

Из вышеизложенного вытекает, что функции h с производными dh/dy первого порядка, состоящими из счетного набора ветвей, под действие теоремы типа Майлса (30) не подпадают. Они-то и будут составлять контрпримеры к настоящей теореме.

Таким образом, теорема типа Майлса [4–6, 12] верна не для всех функций h (31), а только для их частного класса с производными dh/dy, которые содержат в себе конечное число ветвей. Данное обстоятельство говорит за то, что: 1) условие теоретической линейной устойчивости (30) по своей природе и достаточно, и необходимо, при этом относительно неполного незамкнутого подкласса малых плоских возмущений (4), (26) в форме нормальных волн (9), (32); 2) никаких противоречий между теоремой типа Майлса [4–6, 12] и абсолютной теоретической линейной неустойчивостью стационарных течений (25), полученной в настоящей статье, не существует.

Далее строится пример точных стационарных решений (25) смешанной задачи (24) и наложенных на эти решения малых плоских возмущений (4), (9), (26), (33)–(35), на которые, в свою очередь, действие критерия (30) теоретической линейной устойчивости не распространяется.

Пример (без приближения Буссинеска)

Рассматривается идеальная неоднородная по плотности несжимаемая жидкость с линейным профилем установившегося поля продольной скорости U и экспоненциальным профилем стационарного поля плотности ρ_0:

$$U \equiv by + b_1, \quad b,\, b_1 > 0; \quad \rho_0 \equiv b\exp(-my), \quad m \equiv \mathrm{const} > 0.$$

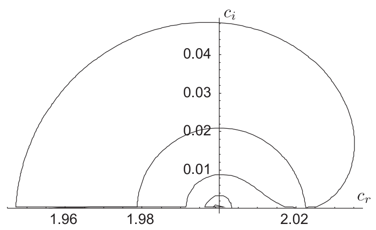

Рис. 2

В таком случае локальное число Ричардсона (28) превратится в $\mathrm{Ri} = mg/b^2$, а краевая задача (29) для уравнения типа Тейлора – Голдстейна после замены искомой функции $f(y)$ на новую $q(y)$ по формуле $f(y) = \exp(my/2)q(y)$ предстанет в виде

$$\frac{d^2q}{dy^2} + \left(-\frac{mb}{c-by-b_1} - \left(k^2 + \frac{m^2}{4}\right) + \frac{mg}{(c-by-b_1)^2}\right)q = 0,$$
$$q = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\, H. \tag{36}$$

Без ограничения общности дифференциальное уравнение (36) может быть переписано в форме

$$(c-by-b_1)^2\frac{d^2q}{dy^2} + \left(-mb(c-by-b_1) - \left(k^2+\frac{m^2}{4}\right)(c-by-b_1)^2 + mg\right)q = 0. \tag{37}$$

Общее решение уравнения (37) имеет вид

$$q(y) = C_3 M_{m^*/k^*,\nu}(k^*(-c+by+b_1)) + C_4 W_{m^*/k^*,\nu}(k^*(-c+by+b_1)), \tag{38}$$

где $m^* \equiv m/b$, $g^* \equiv g/b$, $\nu = \sqrt{-m^*g^* + 1/4}$, $k^* \equiv \sqrt{m^{*2} + 4k^2/b^2}$; C_3, C_4 – произвольные постоянные, а $M_{m^*/k^*,\nu}(y)$, $W_{m^*/k^*,\nu}(y)$ – трансцендентные функции Уиттекера [15].

Для того чтобы найденное общее решение (38) дифференциального уравнения (37) было еще и решением краевой задачи (36) для уравнения типа Тейлора – Голдстейна на отыскание собственных значений и собственных функций, требуется выполнение дисперсионного соотношения в форме:

$$M_{m^*/k^*,\nu}(k^*(-c+b_1))W_{m^*/k^*,\nu}(k^*(-c+bH+b_1)) =$$
$$= W_{m^*/k^*,\nu}(k^*(-c+b_1))M_{m^*/k^*,\nu}(k^*(-c+bH+b_1)). \tag{39}$$

К сожалению, для дисперсионного соотношения (39) также не удается найти корни в явном виде аналитическими методами.

Однако надо заметить, что функции Уиттекера (38) обладают счетным набором ветвей, за счет чего как раз и могут возникать ситуации (34), (35). Таким образом, для малых плоских возмущений (4), (9), (26), (36)–(38) условия теоремы типа Майлса [4–6, 12] могут не иметь место, и эти возмущения могут расти во времени независимо от того, выполнен критерий (30) теоретической линейной устойчивости или нет (см. рис. 2, на котором показано графическое решение [10] дисперсионного соотношения (39) при $m = 0.1$, $g = 10$, $k = b = b_1 = H \equiv 1$, $\mathrm{Ri} = 1 > 1/4$, так что $c_r \approx 1.9787$, $c_i \approx 0.0002 > 0$).

Доказательство утверждения 3 завершено. □

Заключение

В настоящей работе изучена задача линейной устойчивости установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений невязкой стратифицированной несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твердыми параллельными бесконечными поверхностями в поле силы тяжести как при наличии приближения Буссинеска, так и без него.

Прямым методом Ляпунова доказано, что эти течения абсолютно неустойчивы в теоретическом смысле по отношению к малым плоским возмущениям. Четко очерчены границы области использования теоремы Майлса и обнаружено, что по своему характеру данная теорема служит и достаточным, и необходимым утверждением, причем относительно некоторых неполных незамкнутых подклассов рассматриваемых возмущений. Следовательно, результаты, полученные методом интегральных соотношений для задач линейной устойчивости стационарных плоско-параллельных сдвиговых течений идеальной неоднородной по плотности несжимаемой жидкости, нуждаются в строгом описании изучаемых частных классов малых плоских возмущений, поскольку иначе они могут оказаться ошибочными.

Сконструированы аналитические примеры иллюстративного плана рассматриваемых установившихся течений и наложенных на них малых плоских возмущений, для которых теорема Майлса не верна и которые могут нарастать со временем вне зависимости от того, верен критерий теоретической линейной устойчивости или нет, при этом как в приближении Буссинеска, так и без него.

Построены дисперсионные соотношения (23), (39), включающие в себя комплекснозначные трансцендентные функции Бесселя и Уиттекера. К сожалению, ни аналитические, ни численные методы решения данных дисперсионных соотношений пока не созданы. Поэтому проблема отыскания корней дисперсионных соотношений (23), (39) остается открытой.

Литература

1. *Гаврильева А.А., Губарев Ю.Г.* Устойчивость установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений идеальной стратифицированной жидкости в поле силы тяжести // Вестн. Северо-Восточного федерального ун-та им. М.К. Аммосова. – 2012. – Т. 9, № 3. – С. 15–21.
2. *Gavrilieva A.A., Gubarev Yu.G., Lebedev M.P.* Rapid approach to resolving the adequacy problem of mathematical modeling of physical phenomena by the example of solving one problem of hydrodynamic instability // Int. J. Theor. Math. Phys. – 2013. – V. 3, No 4. – P. 123–129.
3. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. – М.: Мир, 1969. – 267 с.
4. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. – 1991. – Т. 25. – С. 3–89.
5. *Miles J.W.* On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. – 1961. – V. 10, No 4. – P. 496–508.
6. *Howard L.N.* Note on a paper of John Miles // J. Fluid Mech. – 1961. – V. 10, No 4. – P. 509–512.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 472 с.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 208 с.
9. *Владимиров В.А.* Об интегралах плоских движений идеальной несжимаемой неоднородной по плотности жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1987. – № 3. – С. 16–20.

10. *Губарев Ю.Г.* Прямой метод Ляпунова. Устойчивость состояний покоя и стационарных течений жидкостей и газов. – Saarbrücken: Palmarium Acad. Publ., 2012. – 192 с.

11. *Губарев Ю.Г.* Критерий линейной устойчивости установившихся винтовых магнитогидродинамических течений идеальной жидкости // Теплофизика и аэромеханика. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 429–441.

12. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 288 с.

13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 749 с.

15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.

Поступила в редакцию
14.03.16

Гаврильева Анна Андреевна, младший научный сотрудник отдела физикохимии материалов и технологий

Институт физико-технических проблем Севера имени В.П. Ларионова СО РАН
ул. Октябрьская, д. 1 , г. Якутск, 677891, Россия
E-mail: *gav-ann@yandex.ru*

Губарев Юрий Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вихревых движений жидкости и газа отдела физической гидродинамики; доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета и кафедры физики сплошных сред физического факультета

Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева СО РАН
пр. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет
ул. Пирогова, д. 2, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: *gubarev@hydro.nsc.ru*

Лебедев Михаил Петрович, доктор технических наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом физикохимии материалов и технологий; заведующий кафедрой машиноведения

Институт физико-технических проблем Севера имени В.П. Ларионова СО РАН
ул. Октябрьская, д. 1 , г. Якутск, 677891, Россия
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия
E-mail: *m.p.lebedev@prez.ysn.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2016, vol. 158, no. 2, pp. 156–171

The Miles Theorem and New Particular Solutions to the Taylor–Goldstein Equation

A.A. Gavrilieva[a*], *Yu.G. Gubarev*[b,c**], *M.P. Lebedev*[a,d***]

[a]*Larionov Institute of Physical and Technical Problems of the North, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Yakutsk, 677891 Russia*
[b]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*
[c]*Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, 630090 Russia*
[d]*Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677000 Russia*
E-mail: **gav-ann@yandex.ru*, ***gubarev@hydro.nsc.ru*, ****m.p.lebedev@prez.ysn.ru*

Received March 14, 2016

Abstract

The linear stability problem of steady-state plane-parallel shear flows of a continuously stratified inviscid incompressible fluid in the gravity field between two immovable impermeable solid planes is studied in and without the Boussinesq approximation. Using the Lyapunov direct method, it is proved that these flows are absolutely unstable in the theoretical sense with respect to small plane perturbations. The applicability domain boundaries of the known necessary condition of the linear instability of steady-state plane-parallel shear flows of a continuously stratified inviscid incompressible fluid in the gravity field is strictly determined in the Boussinesq approximation and without it (Miles theorem). It is found that this theorem is, by its character, both sufficient and necessary statement with respect to some uncompleted unclosed subclasses of studied perturbations. The analytical examples are constructed with the view of illustrations of the mentioned stationary flows and small plane perturbations imposed on these flows. These perturbations are not under the Miles theorem and they increase with time irrespective of the validity of the theoretical linear stability criterion in and without the Boussinesq approximation. Therefore, the results derived earlier by other authors with the help of the method of integral relations for the linear stability problems of steady-state plane-parallel shear flows of a continuously stratified inviscid incompressible fluid demand strict description for the studied partial classes of small plane perturbations as otherwise they can be mistaken.

Keywords: ideal stratified fluid, Boussinesq approximation, stationary plane-parallel shear flows, stability, Lyapunov direct method, instability, small plane perturbations, a priori estimate, Miles theorem, analytical solutions, Bessel functions, Whittaker functions

References

1. Gavrilieva A.A., Gubarev Yu.G. Stability of steady plane-parallel shear flow of ideal stratified fluid in a gravity field. *Vestn. Sev.-Vost. Fed. Univ. im. M.K. Ammosova*, 2012, vol. 9, no. 3, pp. 15–21. (In Russian)
2. Gavrilieva A.A., Gubarev Yu.G., Lebedev M.P. Rapid approach to resolving the adequacy problem of mathematical modeling of physical phenomena by the example of solving one problem of hydrodynamic instability. *Int. J. Theor. Math. Phys.*, 2013, vol. 3, no. 4, pp. 123–129.
3. Phillips O.M. Dynamics of the Upper Ocean. Moscow, Mir, 1969. 267 p. (In Russian)

4. Kozyrev O.R., Stepanyants Yu.A. Method of integral relations in the linear theory of hydrodynamical stability. *Itogi Nauki Tekh. VINITI. Ser.: Mekh. Zhidk. Gaza*, 1991, vol. 25, pp. 3–89. (In Russian)

5. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 10, no. 4, pp. 496–508.

6. Howard L.N. Note on a paper of John Miles. *J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 10, no. 4, pp. 509–512.

7. Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion. Moscow, GITTL, 1950. 472 p. (In Russian)

8. Chetaev N.G. Stability of Motion. Moscow, GITTL, 1955. 208 p. (In Russian)

9. Vladimirov V.A. Integrals of two-dimensional motions of a perfect incompressible fluid of nonuniform density. *Fluid Dyn.*, 1987, vol. 22, no. 3, pp. 340–343.

10. Gubarev Yu.G. Lyapunov's Direct Method. The Stability of the State of Rest and Stationary Flows of Liquids and Gases. Saarbrücken, Palmarium Acad. Publ., 2012. 192 p. (In Russian)

11. Gubarev Yu.G. Linear stability criterion for steady screw magnetohydrodynamic flows of ideal fluid. *Thermophys. Aeromech.*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 407–418.

12. Drazin F. Introduction to the Theory of Hydrodynamic Stability. Moscow, FIZMATLIT, 2005. 288 p. (In Russian)

13. Beitman G., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. *T. 2: Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny* [Vol. 2: Bessel's functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynominals]. Moscow, Nauka, 1974. 296 p. (In Russian)

14. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow, Nauka, 1973. 749 p. (In Russian)

15. Beitman G., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. *T. 1: Gipergeometricheskaya funktsiya, funktsii Lezhandra* [Vol. 1: Hypergeometrical Function, Legendre Function]. Moscow, Nauka, 1973. 296 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования***: *Гаврильева А.А., Губарев Ю.Г., Лебедев М.П.* Теорема Майлса и новые частные решения уравнения Тейлора – Голдстейна // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 156–171. ⟩

⟨ ***For citation***: Gavrilieva A.A., Gubarev Yu.G., Lebedev M.P. The Miles theorem and new particular solutions to the Taylor–Goldstein equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 156–171. (In Russian) ⟩