ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.946

В.В. ДУБРОВСКИЙ, Л.В. СМИРНОВА

К ВОПРОСУ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РОБИНА

В предлагаемой статье рассматривается вопрос о возможности восстановления потенциала по неполным спектральным данным в обратной задаче Борга–Левинсона с краевыми условиями третьего рода или, что то же самое, с краевыми условиями Робина. Под обратными задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления оператора по его заданным спектральным характеристикам. Такими характеристиками могут быть спектры (при различных граничных условиях), спектральная функция, данные рассеяния и др. Основная идея приложений обратных задач заключается в следующем: измеряются определенные величины, которые можно измерить, и на основании этого пытаются получить информацию об интересующих физических величинах. Так в обратной задаче рассеяния на потенциале физической величиной, представляющей интерес, является потенциал $q(x)$ уравнения Шрёдингера, а измеряемой величиной — амплитуда рассеяния. К задачам такого типа приводят, в частности, некоторые проблемы квантовой механики, например, определение внутриатомных сил по заданным уровням энергии, т. е. по спектру, который может быть найден экспериментально.

Первые работы в этом направлении появились в 1929 году. Была доказана

Теорема ([1]). *Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ — собственные значения задачи Штурма–Лиувилля*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \le x \le \pi,$$
$$y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная функция. Если $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ то $q(x) \equiv 0$.

Таким образом, можно сказать, что впервые обратная задача была поставлена в [1]. В простейшей постановке она заключается в том, чтобы определить оператор, зная его спектр.

Борг [2] выполнил систематическое исследование обратной задачи для классического оператора Штурма–Лиувилля по спектрам. Он показал, что в общем случае оператор Штурма–Лиувилля однозначно не определяется одним спектром, т. е. результат В.А. Амбарцумяна [1] является скорее исключением из общего правила.

Затем появились результаты исследований, выполненных Левинсоном [3], [4]. Наиболее значимые результаты в теории обратных задач получены для дифференциального оператора Штурма–Лиувилля, для которого достаточно полно решена проблема корректности постановки, а также методов решения обратных задач.

Теоремы о существовании потенциала в обратной задаче спектрального анализа известны лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений [5]–[7] и др. или для степеней оператора Лапласа с потенциалом на прямоугольнике [8]. Кроме этого, многие обратные задачи имеют не единственное решение. Поэтому одной из важных становится проблема единственности восстановления потенциала, в решении которой возникает вопрос о выявлении дополнительных условий, обеспечивающих единственность решения обратной задачи.

В [9] была доказана многомерная теорема Борга–Левинсона для задачи

$$(-\Delta + q)u = \lambda u \ \text{ в } \ \Omega,$$
$$u|_S = 0,$$

где Ω — ограниченная область в R^n $(n \geq 2)$ с границей S класса C^∞. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ — собственные значения задачи, взятые с учетом кратности, m_j – порядок λ_j, а $u_1, u_2, \ldots, u_{m_j}$ — действительнозначные ортонормальные собственные функции, соответствующие λ_j. После введения определенным образом отношения эквивалентности на множествах

$$E_j = \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}, \frac{\partial u_2}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial u_{m_j}}{\partial v} \right) \Big|_S \right\},$$

и обозначения классов эквивалентности через W_j, была доказана

Теорема ([9]). *Пусть q_1, q_2 — действительнозначные функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$ такие, что*

$$\lambda_j(q_1) = \lambda_j(q_2) \quad \text{для всех} \ \ j \geq 1,$$
$$W_j(q_1) = W_j(q_2) \quad \text{для всех} \ \ j \geq 1.$$

Тогда $q_1 = q_2$.

В [10], [11] получены подобные результаты и для других задач.

Факт о том, что в теорему об устойчивости решения обратных задач входят величины, не влияющие на единственность восстановления потенциала, стал ясным после того, как была доказана

Теорема ([12]). *Пусть q_1, q_2 — действительнозначные функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$ такие, что*

$$\lambda_j(q_1) = \lambda_j(q_2) \quad \text{для всех} \ \ j \geq N,$$
$$W_j(q_1) = W_j(q_2) \quad \text{для всех} \ \ j \geq N,$$

где N — достаточно большое натуральное число. Тогда $q_1 = q_2$.

Проблема единственности восстановления потенциала в обратных задачах спектрального анализа при отсутствии *бесконечного* числа спектральных данных впервые изучалась в [13]–[16].

Вопрос о единственности восстановления потенциала в задаче Неймана в случае, если отсутствует *бесконечное* число собственных значений и значений собственных функций на границе заданной области, был поднят в [14], где доказано, что существует подпоследовательность собственных чисел краевой задачи Неймана, не влияющая на единственность восстановления потенциала.

Несколько позднее в [15], [16] было показано, что если Ω — ограниченная область в R^2 с границей S класса C^2, то при определенном асимптотическом разложении собственных значений и при выполнении некоторых условий следует единственность восстановления потенциала в обратных задачах для задач Дирихле и Неймана.

Вернемся к вопросу о возможности восстановления потенциала по неполным спектральным данным в обратной задаче Борга–Левинсона с краевыми условиями Робина.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n \geq 2$, с границей S класса C^∞.

Рассмотрим краевые задачи Робина для действительных функций $q_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $j = 1, 2$, и действительной функции $\delta \in C^\infty(S)$, $\delta(x) \leq 0$,

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + q_j(x) u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial v} - \delta u \right] \Big|_S = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр, v — внутренняя нормаль к S. Под решением этих задач будем понимать функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющие всюду на $\overline{\Omega}$ соответственно каждой из них.

Пусть $\mu_t(q_j)$ — собственные числа оператора $-\Delta + q_j$, перечисленные в порядке возрастания их величин, взятые с учетом кратности, $u_t(q_j)$ — соответствующие им собственные ортонормированные $L_2(\overline{\Omega})$ функции. В случае кратных собственных чисел есть произвол в выборе ортонормированных функций. Введем оператор Дирихле $D : L_2(S) \to L_2(S)$, задаваемый равенством $D(\lambda, q_j)f = V_j|_S$, где $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а функции $v_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, рассматриваемые как элементы из $L_2(\overline{\Omega})$, являются решениями задач Робина

$$-\Delta V(x) + q_j(x)V(x) = \lambda V(x), \quad x \in \Omega,$$
$$\left[\frac{\partial V}{\partial v} - \delta V\right]\Big|_S = \frac{\partial f}{\partial v} - \delta f, \quad \lambda \neq \mu_t(q_j), \quad t = \overline{1, \infty}.$$

Определим функцию рассеяния

$$F(\lambda, \omega, \theta; q_j; \delta) = \int_S \left(D(\lambda, q_j)\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda,\omega}}{\partial v} - \delta\varphi_{\lambda,\omega}\right)\right)(x)\overline{\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda,-\theta}}{\partial v}(x) - \delta\varphi_{\lambda,-\theta}(x)\right)}dS_x,$$

где S_x — элемент площади поверхности, $\varphi_{\lambda,\omega}(x) = \exp(i\sqrt{\lambda}\omega x)$, $\lambda \in C/(-\infty; 0)$, $\omega, \theta \in S^{n-1}$, $\omega x = \sum\limits_{r=1}^{n} \omega_k x_k$.

Можно показать, что

$$F(\lambda, \omega, \theta; q_j) = -\frac{\lambda}{2}(\theta - \omega)^2 \int_\Omega \exp(-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega)x)dx - \int_\Omega \exp(-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega)x)q_j(x)dx -$$
$$- \int_S \delta(x)\exp(-i\sqrt{\lambda}(\theta - \omega)x)dS_x - \int_\Omega q_j(x)(-\Delta + q_j - \lambda)^{-1}(q_j\varphi_{\lambda,\omega})(x)\overline{\varphi_{\lambda,-\theta}(x)}dx.$$

При этом если положить

$$c_N = \left(1 - \frac{|\xi|^2}{4N^2}\right)^{1/2}, \quad \sqrt{l_N} = N + i, \quad \theta_N = c_N\eta + \frac{\xi}{2N}, \quad \omega_N = c_N\eta - \frac{\xi}{2N},$$

где $(\xi, \eta) = 0$, $0 \neq \xi \in R^n$, имеем

$$\lim_{N\to\infty} F(l_N, \theta_N, \omega_N; q_j) = -\frac{|\xi|^2}{2}\int_\Omega \exp(-ix\xi)dx + \int_\Omega \exp(-ix\xi)q_j(x)dx. \tag{2}$$

В [9] утверждается, что формально оператор Дирихле имеет ядро

$$\ker D = \sum_{t=1}^{\infty} u_t(q_j)(x)\overline{u_t(q_j)(y)}(\mu_t(q_j) - \lambda)^{-1}, \quad x, y \in S.$$

Если к тому же $\ker D(\lambda, q_1) - \ker D(\lambda, q_2)$ имеет смысл как оператор в $L_2(S)$, то учитывая, что константы интегрирования равны нулю, получаем

$$\ker D(\lambda, q_1) - \ker D(\lambda, q_2) = \sum_{t=1}^{\infty}(\mu_t(q_2) - \mu_t(q_1))(\mu_t(q_1) - \lambda)^{-1}(\mu_t(q_2) - \lambda)^{-1} \times$$
$$\times u_t(q_1)(x)\overline{u_t(q_1)(y)} + \sum_{t=1}^{\infty}(u_t(q_1)(x)\overline{u_t(q_1)(y)} - u_t(q_2)(x)\overline{u_t(q_2)(y)})(\mu_t(q_2) - \lambda)^{-1}.$$

И тогда для операторной нормы имеем

$$\|\ker D(\lambda,q_1)-\ker D(\lambda,q_2)\|\le\sum_{t=1}^{\infty}|\mu_t(q_2)-\mu_t(q_1)|\,|\mu_t(q_1)-\lambda|^{-1}|\mu_t(q_2)-\lambda|^{-1}\|u_t(q_1)(x)\|^2_{L_2(S)}+$$
$$+\sum_{t=1}^{\infty}\|u_t(q_1)(x)\overline{u_t(q_1)(y)}-u_t(q_2)(x)\overline{u_t(q_2)(y)}\|_{L_2(S\times S)}|\mu_t(q_2)-\lambda|^{-1}\equiv S_1+S_2. \quad (3)$$

Пусть собственные функции задач Робина (1) с потенциалами q_1 и q_2 совпадают на границе S, а собственные значения совпадают, начиная с некоторого номера T. Тогда

$$\|\ker D(\lambda,q_1)-\ker D(\lambda,q_2)\|\le\sum_{t=1}^{T}|\mu_t(q_2)-\mu_t(q_1)|\,|\mu_t(q_1)-\lambda|^{-1}|\mu_t(q_2)-\lambda|^{-1}\|u_t(q_1)(x)\|^2_{L_2(S)}.$$

Положив $\lambda=N^2-1+2Ni$, имеем

$$\lim_{N\to\infty}\|D(\lambda,q_1)-D(\lambda,q_2)\|\left\|\frac{\partial\varphi_{\lambda,\omega}}{\partial\gamma}-\delta\varphi_{\lambda,\omega}\right\|_{L_2(S)}\left\|\frac{\partial\varphi_{\lambda,-\theta}}{\partial\gamma}-\delta\varphi_{\lambda,-\theta}\right\|_{L_2(S)}=0. \quad (4)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{N\to\infty}|F(l_N,\theta_N,\omega_N;q_1)-F(l_N,\theta_N,\omega_N;q_2)|=0$. Из этого заключаем, что преобразования Фурье функций q_1 и q_2 совпадают, а следовательно, и совпадают сами эти функции. В результате справедлива теорема, подобная той, что получена в [12] для задач такого типа, но с краевыми условиями Дирихле.

Теорема 1. *Пусть q_1, q_2 — действительные функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$ такие, что*
1. $\forall t\in N\quad u_t(q_1)|_S=u_t(q_2)|_S$,
2. $\exists T\in N\quad \forall t\ge T\quad \mu_t(q_1)=\mu_t(q_2)$.
Тогда $q_1(x)=q_2(x)$ для любого $x\in\overline{\Omega}$.

Рассмотрим другие условия, при которых выполняется равенство (4). Для этого положим

$$\lambda=N^2-1+2Ni\equiv[\mu_{t_0}]+2Ni. \quad (5)$$

Далее, т. к. $\|u_t(q_j)\|_{L_2(S)}\le C_0|\mu_t(q_j)|^\zeta$, $0<\zeta<\frac{n}{4}$, будем рассматривать только те потенциалы q_1, q_2, где $\mu_t(q_j)=C_1t^{2/n}+o(t^{1/n+\gamma})$, $0<\gamma<1/n$, $C_1>0$, и $\|u_t(q_j)\|_{L_2(S)}\le C_2t^{1/n}$, $C_2>0$, что справедливо для плоских областей.

Вернемся к равенству (3). Пусть

$$p_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^\varepsilon|\mu_t(q_2)-\mu_t(q_1)|<\infty\quad\text{при}\quad\varepsilon>\frac{3n+4}{3n}$$

и

$$q_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^\alpha\|u_t(q_1)(x)\overline{u_t(q_1)(y)}-u_t(q_2)(x)\overline{u_t(q_2)(y)}\|_{L_2(S\times S)}<\infty\quad\text{при}\quad\alpha>\frac{2n+1}{2n}.$$

Тогда, используя тот факт [17], что при $|n-t_k|>Ct_k^\beta>0$, где $\frac{1}{n}<\beta\le1$,

$$|\mu_n(q_j)-\mu_{t_k}(q_j)|\ge\text{const}\cdot\max\{t_k,n\}^{2/n+\beta-1}>0,\quad j=1,2,$$
$$|\mu_n(q_1)-\mu_{t_k}(q_2)|\ge\text{const}\cdot\max\|t_k,n\}^{2/n+\beta-1}>0,$$

получим следующие оценки:

$$S_1t_0^{2/n}\equiv\sum_{|t-t_0|<Ct_0^\beta}+\sum_{|t-t_0|\ge Ct_0^\beta>0}\le\text{const}\left(\frac{p_0t_0^{-\varepsilon}t_0^{4/n}t_0^\beta}{t_0^{2/n}}+\sum_{|t-t_0|\ge Ct_0^\beta>0}\frac{p_0t^{-\varepsilon}t_0^{2/n}}{t^{2\beta}}\right)\le$$
$$\le\text{const}\,p_0\left(\frac{1}{t_0^{\varepsilon-\beta-2/n}}+\frac{1}{t_0^{2\beta+\varepsilon-3}}\right)\to0$$

при $t_0 \to \infty$ и $\max\{\frac{3-\varepsilon}{2};\frac{1}{n}\} < \beta < \min\{1;\varepsilon-\frac{2}{n}\}$. Проведя некоторые рассуждения, можно показать, что такие β всегда существуют.

Аналогично,

$$S_2 t_0^{2/n} \equiv \sum_{|t-t_0|<Ct_0^{\tilde\beta}} + \sum_{|t-t_0|\geq Ct_0^{\tilde\beta}>0} \leq \mathrm{const}\left(\frac{q_0 t_0^{-\alpha} t_0^{\tilde\beta} t_0^{2/n}}{t_0^{1/n}} + \sum_{|t-t_0|\geq Ct_0^{\tilde\beta}>0} \frac{q_0 t^{-\alpha} t_0^{2/n}}{t^{\tilde\beta}}\right) \leq$$

$$\leq \mathrm{const}\, q_0 \left(\frac{1}{t_0^{-1/n+\alpha-\tilde\beta}} + \frac{1}{t_0^{\tilde\beta+\alpha-2}}\right) \to 0$$

при $t_0 \to \infty$ и $\max\{2-\alpha;\frac{1}{n}\} < \widetilde{\beta} < \min\{1;-\frac{1}{n}+\alpha\}$. Такие $\widetilde{\beta}$ также существуют.

Если же $N \to \infty$, то из (5) следует, что $t_0 \to \infty$, т.е. предельное равенство (4) справедливо. В этом случае

$$\lim_{N\to\infty} |F(l_N,\theta_N,\omega_N;q_1) - F(l_N,\theta_N,\omega_N;q_2)| = 0,$$

и, воспользовавшись равенством (2), можем утверждать, что преобразования Фурье для функций q_1 и q_2 совпадают.

Теорема 2. *Пусть в задачах Робина* (1) *потенциалы* q_j, $j=1,2$, *в* $\overline{\Omega}$ *таковы, что выполняются условия*

1. $\mu_t(q_j) = C_1 t^{2/n} + o(t^{1/n+\gamma})$, $0<\gamma<\frac{1}{n}$, $C_1>0$;
2. $\|u_t(q_j)\|_{L_2(S)} \leq C_2 t^{1/n}$, $C_2>0$;
3. $\exists\varepsilon > \frac{3n+4}{3n}$ $\ p_0 = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{\varepsilon}|\mu_t(q_2) = \mu_t(q_1)| < \infty$;
4. $\exists\alpha > \frac{2n+1}{2n}$ $\ q_0 = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{\alpha}\|u_t(q_1)(x)\overline{u_t(q_1)(y)} - u_t(q_2)(x)\overline{u_t(q_2)(y)}\|_{L_2(S\times S)} < \infty$.

Тогда $q_1 = q_2$.

Литература

1. Ambartsumian V. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie* // Zeitschrift für Physik. – 1929. – Bd. 53. – S. 690–695.
2. Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwert aufgabe* // Acta. Math. – 1946. – Bd. 78. – № 1. – S. 1–96.
3. Levinson N. *The inverse Sturm–Liouville problem.* – Math. Tidsskr. B, 1949. – P. 25–30.
4. Levinson N. *On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase* // Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. – 1949. – V. 25. – № 9. – P. 25.
5. Березанский Ю.М. *О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шрёдингера* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1958. – Т. 7. – № 3. – С. 3–62.
6. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма–Лиувилля.* – М.: Наука, 1984. – 240 с.
7. Рамм А.Г. *Многомерные обратные задачи рассеяния.* – М.: Мир, 1994. – 469 с.
8. Дубровский В.В., Великих А.С. *Теорема о существовании решения обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа* // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – № 5. – С. 6–9.
9. Nachman F., Sylvester J., Uhlmann G. *An n-dimensional Borg–Levinson theorem* // J. Math. Phys. – 1988. – V. 115. – P. 595–605.
10. Ramm A.C. *Multidimensional inverse problems and completeness of the products of solutions to PDE* // J. Math. Anal. Appl. – 1988. – V. 134. – P. 211–253.
11. Suzuki T. *Ultrahyperbolic approach to some multidimensional inverse problems.* – Proc. Japan Acad. – 1988. – 64 p.
12. Isozaki H. *Some remarks on the multidimensional Borg–Levinson theorem* // J. Math. Kyoto Univ. – 1991. – V. 31. – № 3. – P. 743–753.
13. Дубровский В.В. *К устойчивости обратных задач спектрального анализа для уравнений математической физики* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1994. – Т. 49. – Вып. 3. – С. 171–172.

14. Дубровский В.В. *К многомерной обратной задаче спектрального анализа* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1994. – Т. 49. – Вып. 3. – С. 229–230.
15. Дубровский В.В. *Теорема о единственности решения обратных задач спектрального анализа* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 421–422.
16. Дубровский В.В. *Об одном неравенстве в обратных задачах спектрального анализа* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 6. – С. 843–844.
17. Дубровский В.В. *К абстрактной формуле Гельфанда–Левитана* // УМН. – 1991. – Т. 46. – № 3. – С. 187–188.

Магнитогорский государственный университет

Поступили
первый вариант 17.09.1999
окончательный вариант 15.10.2001