

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной деятельности

Д.К. Нургалиев

« 30 » ноября 2015 г.



**Программа вступительного экзамена на обучение в аспирантуре
по специальной дисциплине соответствующей направленности**

направление подготовки 01.06.01 – Математика и механика

научная направленность

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Казань 2015

1. Вопросы программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности
01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Раздел 1

Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства.

Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства. Теорема Гейне – Бореля о структуре компактных множеств в R_n .

Раздел 2

Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. Локально компактные пространства и их свойства. Компактные расширения локально компактных пространств. Связные пространства и их свойства.

Раздел 3

Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовой прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Измеримые по Борелю функции. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов. Теорема Фату. Произведение мер. Теорема Фубини.

Заряды (обобщенные меры). Теорема Хана, Неопределенный интеграл Лебега. Теорема Радона – Никодима. Понятие σ -конечной меры. Определенный интеграл по σ -конечной мере.

Раздел 5

Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов $L(E, F)$. Сопряженное пространство. Теорема Банаха – Хана для полунорм. Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала. Ортонормированные системы. Ряды

Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе. Вполне непрерывные операторы и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор. Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, непустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Принцип сжатых отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения Фредгольма с малым параметром. Относительно компактные множества, критерий Хаусдорфа и Фреше. Теорема Арчела.

Раздел 6

Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах $L_2(a,b)$ и $C(a,b)$. Случай вырожденного ядра.

Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта – Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

Раздел 8

Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стильтеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

Раздел 9

Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Джексона и их обобщения (периодический и непериодический случаи). Обратные теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Бернштейна и Зигмунда.

Суммы Фурье, Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна – Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Теоремы типа Джексона. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы. Экстремальные задачи теории квадратур. Теорема Банаха – Штейнгауза и ее приложения к конструктивной теории функций.

Раздел 9

Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолиственность, круговое сохранение симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общие понятия о римановых поверхностях.

Раздел 10

Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризирующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвязной и многосвязной областях. Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

Примечание: в качестве вступительного экзамена предлагается сдать один из следующих вариантов (указаны разделы программы): 1-й вариант: разделы 1 – 5, 7, 2-й вариант: разделы 1, 3, 5, 6, 8, 3-й вариант: разделы 1, 3, 6, 9, 10.

2. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2006. – 570 с.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. тт.1-2. – М.: Наука, 1990-1991. – 528 с., 544 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
4. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.
5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 255 с.
6. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
8. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
9. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 332 с.
10. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Вища школа, 1978. – 288 с.
11. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

12. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1954. – 327 с.
13. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
14. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
15. Бурбаки Н. Общая топология (основные структуры). – М.: Наука, 1968.—272 с.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.
