ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.55

Б.А. ШАИМКУЛОВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОШИ–ВЕЙЛЯ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

1. *Сформулируем основной результат.* В пространстве $\mathbb{C}[m \times m]$ квадратных матриц под матричной функцией понимаем скалярнозначную функцию

$$h : \mathbb{C}[m \times m] \to \mathbb{C}.$$

Для матричных функций, голоморфных в обобщенном круге из пространства $\mathbb{C}[m\times m]$, известна интегральная формула, доказанная в ([1], гл. 4) и названная представлением Коши. Напомним, что обобщенный круг понимается как множество

$$\tau = \{z \in \mathbb{C}[m \times m] : I - zz^* > 0\},$$

где z^* — матрица, получаемая из z сопряжением элементов и транспонированием, неравенство $H > 0$ обозначает, что эрмитова матрица H положительно определена. Согласно упомянутой интегральной формуле всякую голоморфную в замыкании τ функцию h можно представить в виде интеграла

$$h(z) = c_m \int_\Gamma h(\xi) d\xi / \det{}^m (\xi - z)$$

по остову $\Gamma = \{\xi : \xi\xi^* = I\}$ обобщенного круга τ, где $d\xi = \bigwedge\limits_{i,j} d\xi_{ij}$, а c_m выбрано согласно условию

$$c_m = \int_{zz^*=1} \frac{dz}{\det^m z} = 1.$$

Цель работы состоит в обобщении указанного интегрального представления, которое имеет такую же природу, как и известное интегральное представление Вейля в полиэдрах ([2], [3]). В ([3], п. 16.1) было замечено, что интегральное представление Вейля тесно связано с формулой преобразования для локального вычета Гротендика и может быть получено с помощью этой формулы из представления Коши. Далее применяется эта же схема с использованием полученной ранее [4] специальной конструкции для локального вычета в $\mathbb{C}[m \times m]$.

Для формулировки основного результата введем понятие специального полиэдра в пространстве $\mathbb{C}[m \times m]$. Пусть дано отображение

$$f = f(z) : \mathbb{C}[m \times m] \to \mathbb{C}[m \times m], \tag{1}$$

голоморфное в некоторой области $G \subset \mathbb{C}[m \times m]$. Здесь $z = (z_{ij})$ и $f = (f_{ij}(z))$ — квадратные матрицы порядка m.

Определение 1. Специальным аналитическим полиэдром, ассоциированным с отображением f, назовем прообраз $D_{f,r} = f^{-1}(\tau_r)$ обобщенного круга $\tau_r = \{z : r^2 I - zz^* > 0\}$ радиуса r, если $D_{f,r}$ компактно принадлежит G, т. е. $D_{f,r} \Subset G$.

Таким образом, полиэдр $D_{f,r} = \{z \in G : r^2 I - ff^* > 0\}$.

Известная теорема Хефера [3] утверждает, что для некоторой окрестности U области $D_{f,r}$ существуют такие функции $P^{ij}_{lk}(\xi, z) \in \mathcal{O}(U \times U)$, что при всех $(\xi, z) \in (U \times U)$ справедливы равенства

$$f_{ij}(\xi) - f_{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^{m} (\xi_{kl} - z_{kl}) P^{ij}_{lk}(\xi, z), \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Упорядочим каким-либо образом множество пар (i, j) из $[1, m]^2$. Обозначим через $H(\xi, z)$ определитель матрицы $\|P^{ij}_{kl}(\xi, z)\|$ порядка $m^2 \times m^2$, строки которой нумеруются парами (i, j), а столбцы — парами (k, l).

Теорема 1. *Пусть функция $h(z)$ голоморфна в замыкании области $D_{f,r}$. Тогда для всякой точки $z \in D_{f,r}$ имеет место интегральное представление*

$$h(z) = c_m \int_{\Gamma_{f,r}} h(\xi) H(\xi, z) d\xi / \det{}^m (f(\xi) - f(z)), \tag{2}$$

где $\Gamma_{f,r} = \{\xi \in G : ff^* = r^2 I\}$ — остов области $D_{f,r}$, ориентированный условием $\bigwedge_{i,j} df_{ij} \geq 0$ при выбранном упорядочении пар (i, j).

В случае, когда $f(z) \equiv z$, определитель $H(\xi, z)$ в (2) равен 1 и формула (2) превращается в приведенную выше формулу, доказанную для обобщенного круга ([1], гл. 4).

2. *Введем специальную конструкцию для локального вычета в пространстве матриц.* Здесь приведем одну интегральную интерпретацию для локального вычета Гротендика в пространстве $\mathbb{C}[m \times m]$, которая была введена в [4] и будет применена для доказательства теоремы 1.

Пусть отображение (1) голоморфно в окрестности U_a точки $a \in \mathbb{C}[m \times m]$ и имеет в этой точке изолированный нуль.

Определение 2. Для ростка $h : U_a \to \mathbb{C}$ и отображения (1) введем действие локального вычета в точке a

$$\operatorname{res}_f(h) = c_m \int_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \frac{h dz}{\det^m f},$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, $dz = \bigwedge_{i,j} dz_{ij}$.

Для указанного вычета справедлива следующая формула преобразования.

Пусть отображение $f = (f_1, \dots, f_{m^2})$ имеет в точке $a \in \mathbb{C}^{m^2}$ изолированный нуль и $g = Af$, где $A = (a_{i,j}(z))$ есть $(m^2 \times m^2)$-матрица, элементами которой являются голоморфные функции в окрестности U_a точки a.

Теорема 2 ([4]). *Если голоморфные отображения f и $g = Af$ имеют в точке a изолированный нуль, то для любого $h \in \mathcal{O}_a$ верно равенство*

$$\operatorname{res}_f h = \operatorname{res}_g (h \cdot \det A).$$

3. *Докажем лемму для квадратной матрицы ξ.* Обозначим через $\|\xi\|_s$ ее спектральную норму.

Лемма. *Пусть ξ — такая $m \times m$-матрица, что $\varepsilon^2 I - \xi\xi^* > 0$. Тогда для всех δ, $0 < \delta < \varepsilon - \|\xi\|_s$, в $G_* = G \setminus \{z : \det(f(z) - \xi) = 0\}$ имеет место гомология циклов $\Gamma_{f-\xi,\delta} \sim \Gamma_{f,\varepsilon}$, где*

$$\Gamma_{f-\xi,\delta} = \{z \in G : \delta^2 I - (f(z) - \xi)(f(z) - \xi)^* = 0\}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую (m^2+1)-мерную цепь

$$C = \{z \in G : (\varepsilon - t\|\xi\|_s)^2 I = (f(z) - t\xi)(f(z) - t\xi)^*,\ 0 \le t \le 1\}.$$

Ясно, что для точек C выполняется равенство

$$\|f(z) - t\xi\|_s = \varepsilon - t\|\xi\|_s.$$

Покажем, что цепь C лежит в $\overline{D}_{f,\varepsilon}$. Действительно, если $z^0 \in G \setminus \overline{D}_{f,\varepsilon}$, то $\|f(z^0)\|_s > \varepsilon$, поскольку $\|f\|_s < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon^2 I - ff^* > 0$. Следовательно, $\|f(z^0) - t\xi\|_s \ge \|f(z^0)\|_s - t\|\xi\|_s > \varepsilon - t\|\xi\|_s$. Таким образом, C — компактная цепь. Теперь докажем, что носитель $|C|$ цепи C лежит в G_*. Для этого нужно показать, что для $z \in |C|$ всегда выполняется условие $\det(f(z) - \xi) \ne 0$. Предположим, что $\det(f(z) - \xi) = 0$. Тогда существует ненулевой вектор z^1, для которого $z^1(f(z) - \xi) = 0$ и $z^1(f(z) - t\xi + t\xi - \xi) = 0$. Отсюда

$$(f(z) - t\xi)^*(z^1)^* = (1-t)\xi^*(z^1)^*, \quad z^1(f(z) - t\xi) = (1-t)z^1\xi.$$

Перемножая эти равенства, получим

$$z^1((\varepsilon - t\|\xi\|_s)^2 I - (1-t)^2\xi\xi^*)(z^1)^* = 0.$$

Так как $(\varepsilon - t\|\xi\|_s)^2 I - (1-t)^2\xi\xi^* > 0$, то последнее равенство не выполняется. Следовательно, $\det(f(z) - \xi) \ne 0$. Поэтому $|C| \subset G_*$. Наконец, для любых $\delta < \varepsilon - \|\xi\|_s$ циклы $\Gamma_{f-\xi,\delta}$ принадлежат G_* и имеет место гомология циклов $\Gamma_{f-\xi,\delta} \sim \Gamma_{f-\xi,\varepsilon-\|\xi\|_s} = \partial C - \Gamma_{f,\varepsilon}$, откуда получаем утверждение леммы. $\square$

4. *Докажем теорему* 1. Для $z \in D_{f,r}$ имеем $f(z)f^*(z) < r^2 I$, поэтому согласно лемме цикл $\Gamma_{f,\varepsilon}$ гомологичен в области регулярности подинтегральной формы в (2) циклу

$$\Gamma_{f(\varepsilon)-f(z),\delta} = \{\xi \in G : (f(\xi) - f(z))(f(\xi) - f(z))^* = \delta^2 I\},$$

где $\delta < r - \|f(z)\|_s$.

С другой стороны, $\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta}$ гомологичен сумме $\sum\limits_\nu \Gamma_{\xi^{(\nu)}(z),\delta}$, где

$$\Gamma_{\xi^{(\nu)}(z),\delta} = \{\xi \in U_{\xi^{(\nu)}(t)} : (f(\xi) - f(z))(f(\xi) - f(z))^* = \delta^2 I\}.$$

Здесь $\xi^{(\nu)}(z)$ — нули отображения $f(\xi) - f(z)$, среди которых есть и $\xi = z$.

Следовательно, по формуле Хуа Локена [1] и формуле преобразования локального вычета (теорема 2) имеем

$$h(z) = \int\limits_{(\xi-z)(\xi-z)^*=r^2I} h(\xi)\dot{\xi}/\det{}^m(\xi - z) = \operatorname*{res}_{f(\xi)-f(z)}(h\det\|P^{ij}_{lk}\|) = \sum_\nu \operatorname*{res}_{\xi^\nu(z)\,f(\xi)-f(z)}(h\det\|P^{ij}_{lk}\|).$$

Здесь $\dot{\xi} = \dot{c}_m d\xi$.

Известно [3], что для $\xi^{(\nu)}(z) \ne z$ имеем $\det\|P^{ij}_{lk}\| \in I_{f^{(\nu)}(z)}(f(\xi) - f(z))$. Поэтому из теоремы локальной двойственности получаем

$$\sum_\nu \operatorname*{res}_{\xi^\nu(z)\,f(\xi)-f(z)}(h\det\|P^{ij}_{lk}\|) = \operatorname*{res}_{z\ \ f(\xi)-f(z)}(h\det\|P^{ij}_{lk}\|) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta}} h(\xi)H(\xi,z)\dot{\xi}/\det{}^m(f(\xi) - f(z)) = \int\limits_{\Gamma_{f,r}} h(\xi)H(\xi,z)\dot{\xi}/\det{}^m(f(\xi) - f(z)). \quad \square$$

Так как в интегральной формуле интегрирование ведется по множеству $\Gamma_{f,r}$, то по теореме 6.9 из [2] граница Шилова для $D_{f,r}$ содержится в $\Gamma_{f,r}$. Отсюда получаем

Следствие. Если функция $h(z)$ голоморфна в замыкании области $D_{f,r}$, то она достигает своего максимального значения по модулю на $\Gamma_{f,r}$.

Литература

1. Хуа Локен. *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* – М.: Ин. лит., 1959. – 164 с.
2. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* – Новосибирск: Наука, 1979. – 366 с.
3. Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения.* – Новосибирск: Наука, 1988. – 240 с.
4. Шаимкулов Б.А. *Об одном определении локального вычета* // ДАН РУз. – 2001. – № 10. – С. 10–12.

Национальный университет Узбекистана

Поступила 07.03.2002