Известия вузов. Математика
2012, № 11, с. 72–78

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение, представленное Д.Х. Муштари

Ф.Ф. СУЛТАНБЕКОВ

$(3,3)$-ОДНОРОДНЫЕ КВАНТОВЫЕ ЛОГИКИ С 18 АТОМАМИ. I

Аннотация. Квантовая логика называется (m,n)-*однородной*, если любой ее атом содержится ровно в m максимальных, относительно включения, ортогональных множествах атомов (*блоках*), и каждый блок содержит ровно n атомов. Атомы обозначим натуральными числами и для блока $\{i,j,k\}$ используем аббревиатуру i-j-k. Любая $(3,3)$-однородная логика содержит следующие семь *исходных* блоков: 1-2-3, 1-4-5, 1-6-7, 2-8-9, 2-10-11, 3-12-13, 3-14-15. Для 18-атомной логики имеет значение расположение остальных атомов 16, 17, 18. Мы рассматриваем случай, когда они образуют петлю размера 4 в одном из слоев из начальных блоков, например, l_4: 3-14-15, 15-16-17, 17-18-13, 13-12-3. Оказывается, с точностью до изоморфизма существует 5 таких логик. Для них описаны чистые состояния и группы автоморфизмов.

Ключевые слова: квантовая логика, однородная квантовая логика, $(3,3)$-однородная логика, атом, блок, чистое состояние, группа автоморфизмов.

УДК: 512

Введение

0.1. Пусть $(E,\leq)$ — упорядоченное множество с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1. Отображение $^{\theta}): E \to E$ называется *ортодополнением*, если для любых элементов $x,y \in E$

$$1)\ \ x^{\theta\theta}=x, \quad 2)\ \ x\leq y \Rightarrow y^{\theta}\leq x^{\theta}, \quad 3)\ \ x\vee x^{\theta}=1;$$

при этом тройку $(E,\leq,^{\theta}))$ называют *упорядоченным множеством с ортодополнением.* Минимальные ненулевые элементы E называются *атомами.* Если для каждого $x\in E$ существует атом $a\in E$ такой, что $a\leq x$, то E называется *атомным.*

Элементы $x,y\in E$ называются *ортогональными* $(x\perp y)$, если $x\leq y^{\theta}$. Упорядоченное множество с ортодополнением $(E,\leq\ ^{\theta}))$ называется *квантовой логикой*, если для любых $x,y\in E$:

$$\text{(i)}\ \ x\perp y \Rightarrow \exists\, x\vee y\in E; \quad \text{(ii)}\ \ x\leq y\Rightarrow \exists\, z\in E\ (z\perp x,\ y=x\vee z),$$

при этом аксиома (ii) называется *ортомодулярным законом*, а элемент z — *ортогональным остатком.* Можно показать ([1], с. 53), что ортогональный остаток z в аксиоме (ii) единственен и $z=y\wedge x^{\theta}$. Квантовая логика, являющаяся также решеткой, называется

Поступила 22.05.2012

ортомодулярной решеткой. Квантовые логики, полные относительно точных верхних граней ортогональных последовательностей, рассмотрены в [2]. Приведем несколько примеров квантовых логик.

Ассоциативным кольцом с единицей называется алгебраическая система $\mathbb{A}$ с двумя ассоциативными бинарными операциями $+$, $\cdot$ такая, что $(\mathbb{A}, +)$ является коммутативной группой (единица которой обозначается 0), а умножение $\cdot$ двусторонне дистрибутивно относительно сложения: $(x+y)z = xz + yz$, $x(y+z) = xy + xz$ для любых $x, y, z \in \mathbb{A}$. В $\mathbb{A}$ есть элемент 1, удовлетворяющий условию $x1 = 1x = x$ для любого $x \in \mathbb{A}$. В множестве всех идемпотентов $E(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} : x^2 = x\}$ введем отношение порядка $x \leq y \Leftrightarrow xy = yx = x$ и ортодополнение $x^\theta = 1 - x$. Тогда $E(\mathbb{A})$ является квантовой логикой, которая называется *квантовой логикой идемпотентов ассоциативного кольца с единицей* ([1], с. 56). В частности, взяв в качестве $\mathbb{A} = B(H)$ кольцо всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H получим *логику косых проекторов* $E(B(H))$. Подлогикой логики $E(B(H))$ является ортомодулярнная решетка *ортогональных* проекторов в гильбертовом пространстве H.

Другим важным примером квантовой логики является *конкретная* логика. Пусть Ω — множество, $\Omega^\forall$ — булева алгебра всех подмножеств множества Ω. *Конкретной логикой* на множестве Ω называется часть Σ семейства $\Omega^\forall$ удовлетворяющая условиям: 1) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$; 2) $A, B \in \Sigma, A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$. Порядком и ортодополнением в Σ являются включение и дополнение $A^\theta = A^c$.

Пусть k, s — натуральные числа, X — множество, $\operatorname{card} X = ks$. Тогда семейство множеств $X(k,s) \equiv \{A \subset X : \operatorname{card} A \text{ кратно } k\}$ является конкретной логикой в X (полное исследование этих логик было осуществлено автором в [3]).

Максимальная по включению булева подалгебра квантовой логики называется *блоком.* Очевидно, что E есть объединение своих блоков. Для конечных квантовых логик, удобнее считать блоком максимальное, относительно включения, семейство попарно ортогональных атомов. Изображая атомы кружочками, а блоки, их содержащие, линиями без изломов мы приходим к изображению квантовой логики в виде гиперграфа (диаграммы Гричи [4]). Важное значение имеет понятие *петли размера n* в квантовой логике E (общее определение можно найти в [5]). Приведем его в терминах гиперграфов: это подграф представляющий собой n-угольник, сторонами которого являются блоки, а в вершинах находятся атомы. Лемма о петлях Гричи [4], ([5], с. 43) утверждает, что согласованное семейство булевых алгебр можно наделить структурой квантовой логики (соответственно структурой ортомодулярной решетки) тогда и только тогда, когда в нем нет петель порядка 3 (соответственно нет петель порядка 3 и 4).

0.2. Пусть m, n — натуральные числа. Квантовая логика E называется (m,n)-*однородной*, если любой ее атом содержится ровно в m блоках, и каждый блок E содержит ровно n атомов. Например, конкретные логики вида $X(k,s)$, упомянутые выше, являются примерами однородных логик с параметрами $m = \frac{1}{2} C^k_{k(s-1)} C^k_{k(s-2)} \ldots C^k_{2k}$ и $n = s$. $(3,3)$-Однородные логики возникают также в конечных релятивных квантовых логиках [6].

Пусть A — множество всех атомов однородной логики E, B — множество всех ее блоков. В такой логике $m \operatorname{card} A = n \operatorname{card} B$ и на ней вседа существует состояние, равное $1/n$ на любом атоме. Необходимым же условием существования двузначнного состояния f на E является: $\operatorname{card} A/n = \operatorname{card} B/m = \operatorname{card}[f^{-1}(1) \cap A]$ ([7], [1], с. 109). Но даже в классе $(2,3)$-однородных логик существуют примеры логик без двузначных состояний (такой пример с 96 атомами построен автором в ([1], с. 110)). В [8] было показано, что $(3,3)$-однородные логики с 15 и 17 атомами единственны, а для 16 атомов такая логика не существует. В случае же 18 атомов такие логики существуют в достаточно большом разнообразии [9]. Ортомодулярные решетки L с заданными свойствами для $S(L)$ и $\mathrm{Aut}(L)$ были исследованы в ряде работ М. Навары, П. Птака, В. Рогалевича и Е. Кохлера.

Будем обозначать атомы $(3,3)$-однородной логики E натуральными числами и для блока $\{i,j,k\}$ использовать аббревиатуру i-j-k. Любая $(3,3)$-однородная логика содержит следующие семь *исходных* блоков $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$:

1-2-3, 1-4-5, 1-6-7, 2-8-9, 2-10-11, 3-12-13, 3-14-15.

Пары исходных блоков $\{B_2, B_3\}$, $\{B_4, B_5\}$, $\{B_6, B_7\}$ назовем первым, вторым, третьим *слоем* соответственно. Для 18-атомной логики играет роль расположение остальных трех атомов 16, 17, 18. В данной работе мы рассматриваем случай нахождения этих атомов в петле размера 4 в одном из слоев из начальных блоков, например, в третьем слое l_4: 3-14-15, 15-16-17, 17-18-13, 13-12-3. Обозначим $B_8 = 13$-17-18, $B_9 = 15$-16-17. Третий блок, выходящий из атома 17, соединит атом из первого слоя с атомом второго слоя. Можно считать, что это блок $B_{10} = 4$-8-17. Итак, к этим 10 блокам надо построить еще 8 блоков.

1. Построение $(3,3)$-однородных логик

1.1. Для атома 4 возможны соединения с атомами 10, 11, 12, 14. Пусть $B_{11} = 4$-10-12. В этом случае для атома 8 возможны для соединения в блок атомы 6, 7, 14. На этом этапе построения атомы 6 и 7 равноправны; пусть $B_{12} = 8$-6-14. Теперь для блока B_{13} из атома 12 возможны четыре варианта: 12-16-6, 12-16-9, 12-16-7, 12-9-7. Но только первый вариант из них приводит к успеху, $B_{14} = 5$-11-16. На рис. 1 слева изображен этап после построения блока B_{14}, а справа — полный гиперграф этой логики с петлей размера 8; ее мы обозначили $L_7(18)$.

1.2. В случае блока $B_{11} = 4$-10-14 для атома 8 возможны для соединения в блок атомы 6, 7, 12. Пусть $B_{12} = 8$-6-12. Теперь для блока B_{13} из атома 12 возможны четыре варианта: 12-5-11, 12-5-16, 12-10-16, 12-11-16. Первый и четвертый вариант не приводят к успеху. Во втором случае $B_{13} = 5$-12-16 и он приводит к блоку $B_{14} = 7$-10-13. На рис. 2 слева изображен гиперграф этой логики с петлей размера 9; ее мы обозначили $L_3(18)$.

В третьем варианте блок $B_{13} = 10$-12-16 приводит к $B_{14} = 6$-11-18. На рис. 2 справа изображен гиперграф этой логики с петлей размера 7; ее мы обозначили $L_4(18)$.

1.3. В этом пункте мы рассмотрим блоки $B_{11} = 4$-11-14, $B_{12} = 6$-8-12. Тогда для построения блока из атома 12 пригодны 5, 10, 11, 16, т. е. 4 варианта. Но лишь вариант $B_{13} = 11$-12-16 приводит к двум логикам: $M_7(18)$ и $N_7(18)$. Приведем списки их остальных пяти блоков $B_{14}, \ldots, B_{18}$:

$$M_7(18): \ \text{5-9-16, 5-10-18, 6-14-18, 7-9-13, 7-10-15,}$$
$$N_7(18): \ \text{5-9-18, 5-10-15, 6-14-18, 7-9-16, 7-10-13.}$$

Логика $M_7(18)$ имеет петлю размера 8: 1-3-2, 2-8-9, 9-7-13, 13-18-17, 17-15-16, 16-12-11, 11-14-4, 4-5-1. Логика $N_7(18)$ имеет петлю размера 7: 1-3-2, 2-11-10, 10-5-15, 15-16-17, 17-4-8, 8-12-6, 6-7-1. Наконец, в случае блока $B_{11} = 4$-11-12 мы получаем логики изоморфные уже построенным выше.

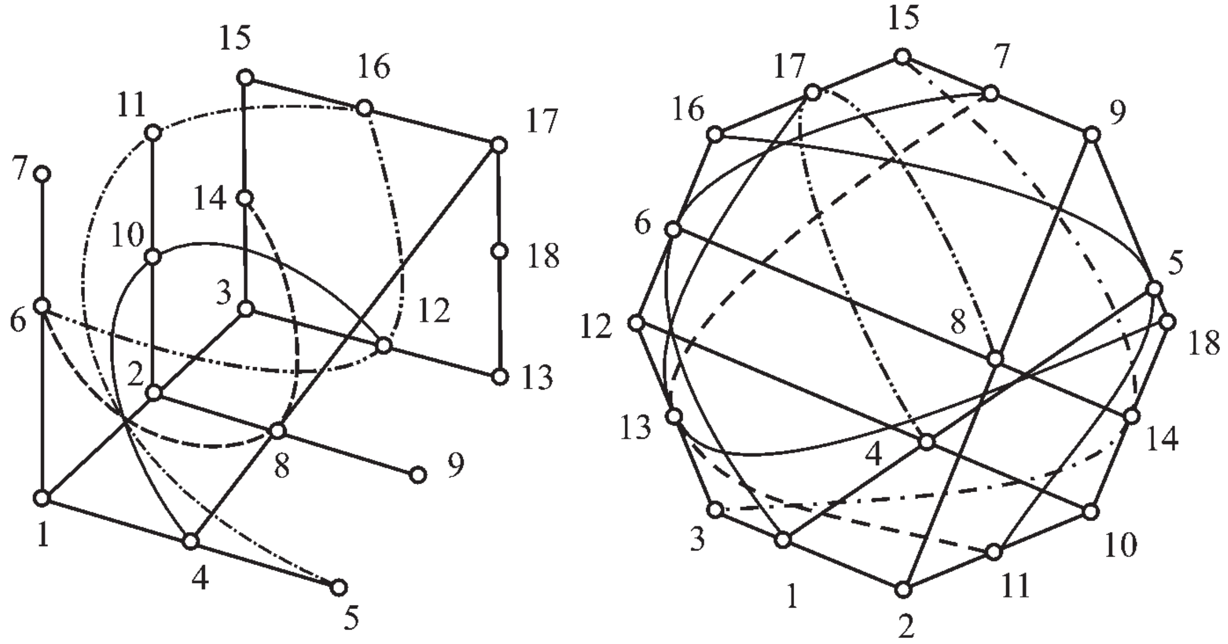

Рис. 1. Гиперграфы логики $L_7(18)$

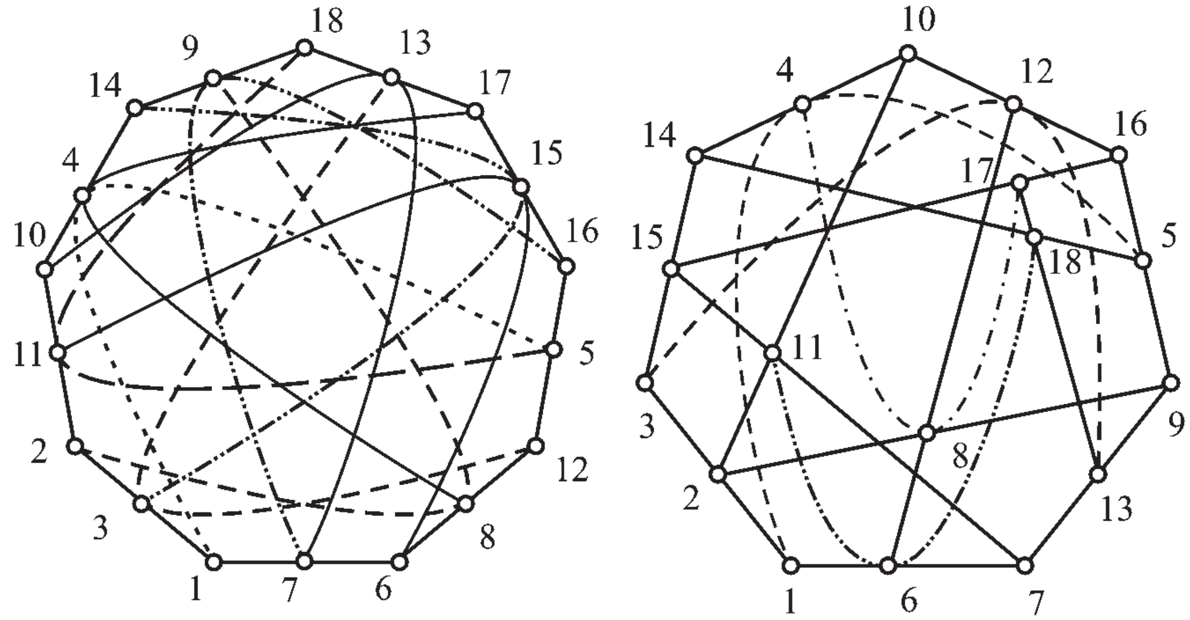

Рис. 2. Гиперграфы логики $L_3(18)$ (слева) и логики $L_4(18)$ (справа)

2. Автоморфизмы (3, 3)-однородных логик

2.1. После построения логик в разделе 1 мы хотели бы убедится в том, что они не изоморфны друг другу. При этом достаточно указать какой-нибудь инвариантное при изоморфизме свойство, которым обладает одна из логик и не обладает другая. Такими инвариантами, например, являются число чистых состояний на квантовой логике или число элементов в группе ее автоморфизмов.

Квантовые логики E и F *изоморфны*, если существует биекция $f : E \to F$ такая, что для любых $x, y \in E$ выполнены условия

$$1)\ \ x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y), \quad 2)\ \ f(x^\theta) = f(x)^\theta.$$

Изоморфизм сохраняет ортогональность и если $x \perp y$, то $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. Так как в конечной логике E любой элемент E есть точная верхняя грань $\perp$-множества, состоящего из атомов, то автоморфизм логики E можно отождествить с биекцией $\sigma : A \to A$ такой, что для любых $a, b \in A$ и $C \in B$ выполняются требования

$$1)\ \ a \perp b \Leftrightarrow \sigma(a) \perp \sigma(b), \quad 2)\ \ \sigma(C) \in B,$$

где $\sigma(C) = \{\sigma(a) : a \in C\}$. Так как множество A конечно, то автоморфизмы логики E описываются в виде списка циклов перестановок атомов множества A.

Пусть $a \in A$. Множество $a^\perp = \{b \in A : b \perp a\}$ назовем *ортозвездой* атома a. Очевидно, что $\sigma(a^\perp) = (\sigma(a))^\perp$. Для $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим

$$R_k^m = \{a \in A : \exists X \subset A\ (\operatorname{card} X = k)\ \forall b \in X\ (\operatorname{card}(a^\perp \cap b^\perp) = m)\}.$$

При каждом фиксированном m эти множества образуют разбиение семейства атомов A. Приведем простую лемму ([8]; [1], с. 123).

Лемма. *Пусть биекция $\sigma : A \to A$ является автоморфизмом логики E. Тогда $\sigma : R_k^m \to R_k^m$ для всех k при каждом фиксированном m.*

Образовав множества вида $R_k^m \cap R_n^s$, получим более мелкое разбиение множества всех атомов $A = \cup R_j$, $R_i \cap R_j = \varnothing$ $(i \ne j)$, которое назовем *основным*. При этом по прежнему автоморфизм действует из R_i в R_i. Введем функции *плотности* ортозвезды $p_m(a^\perp)$ $(m = 0, 1, 2, 3)$, равной числу ее m-элементных пересечений с остальными ортозвездами. Тогда множество $R_k^m = \{a \in A : p_m(a^\perp) = k\}$. Заметим, что численные значения функций плотности ортозвезд являются инвариантами при изоморфизме логик.

Теорема 1. *Группа автоморфизмов* $\operatorname{Aut}(L_7(18)) = \{I, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, *где инволютивные автоморфизмы α, β коммутируют и задаются перестановками атомов*:

$$\alpha : (1, 17)\,(2, 18)\,(3, 13)\,(4)\,(5, 8)\,(6, 16)\,(7, 15)\,(9)\,(10)(11, 14)\,(12);$$
$$\beta : (1, 14)\,(2, 8)\,(3, 6)\,(4, 10)\,(5, 18)\,(7, 15)\,(9)\,(11, 17)\,(12)\,(13, 16).$$

Теорема 2. *Группа автоморфизмов* $\operatorname{Aut}(L_3(18))$ *состоит из* 18 *элементов. Она имеет два образующих автоморфизма ρ и σ, которые задаются перестановками атомов*:

$$\rho : (1, 2, 10, 14, 18, 17, 16, 12, 6)\,(3, 11, 4, 9, 13, 15, 5, 8, 7);$$
$$\sigma : (1)\,(2, 6)\,(3, 7)\,(4, 5)\,(8, 11)\,(9, 15)\,(10, 12)\,(13)\,(14, 16)\,(17, 18).$$

Теорема 3. *Группы автоморфизмов* $(3, 3)$*-однородных логик* $L_4(18)$, $M_7(18)$, $N_7(18)$ *тривиальны* (*т. е. состоят лишь из тождественного автоморфизма* I).

Основная теорема. *Существуют ровно пять неизоморфных* $(3, 3)$*-однородных квантовых логик, содержащих* 18 *атомов и имеющих петлю* l_4:

$$L_3(18), \quad L_4(18), \quad L_7(18), \quad M_7(18), \quad N_7(18).$$

3. Состояния на (3, 3)-однородных логиках

Пусть E — квантовая логика. Отображение $s : E \to [0,1]$ называется *состоянием*, если $s(1) = 1$ и оно *аддитивно*: $\forall x, y \in E$ $(x \perp y \Rightarrow s(x \vee y) = s(x) + s(y))$. Множество всех состояний на логике E обозначим $S(E)$; это выпуклое множество в векторном пространстве всех отображений $f : E \to \mathbb{R}$. Крайние точки этого выпуклого множества называются *чистыми* состояниями. Состояние s называется *двузначным*, если $s(x) \in \{0, 1\}$ для любого $x \in E$; множество всех двузначных состояний обозначим $S_2(E)$. Часть $S \subset S_2(E)$ называется *полной*, если $\forall s \in S$ $(s(x) \le s(y) \Leftrightarrow x \le y)$ для любых $x, y \in E$. Важность двузначных состояний вытекает из следующего утверждения: квантовая логика E изоморфна некоторой конкретной логике тогда и только тогда, когда E обладает полным множеством двузначных состояний. Для атомных $\perp$-полных квантовых логик E этот критерий сводится к проверке следующего утверждения (см., например, в [1], с. 97):

$$\forall a, b \in A \ (a \not\perp b \Rightarrow \exists\, s \in S_2(E) \ (s(a) = s(b) = 1)).$$

В случае (3, 3)-однородных логик E выпуклое множество $S(E)$ находится из решения системы линейных уравнений $s(i) + s(j) + s(k) = 1$, где i-j-k пробегает все блоки E. Это многогранник в конечномерном вещественном пространстве; его вершины описывают крайние точки $S(E)$.

Теорема 4. *Множество состояний $S(L_3(18))$ есть треугольник, $S(L_4(18))$ есть трапеция (имеют 3 и 4 чистых состояния). Множеством $S(E)$ для $E = L_7(18)$, $M_7(18)$, $N_7(18)$ является 7-гранник (все они имеют по 7 чистых состояний). Все эти пять логик имеют двузначные состояния, но не изоморфны конкретной логике.*

Литература

[1] Султанбеков Ф.Ф. *Булевы алгебры и квантовые логики* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2007).

[2] Pták P., Pulmannová S. *Orthomodular structures as quantum logics* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1991).

[3] Султанбеков Ф.Ф. *Заряды и автоморфизмы одного класса конечных логик множеств*, Конструктивная теория функций и функц. анализ (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1992), вып. 8, с. 57–68.

[4] Greechie R.J. *Orthomodular lattices admiting no states*, J. Comb. Theory, Ser. A, **10** (2), 119–132 (1971).

[5] Kalmbach G. *Orthomodular lattices* (Academic Press, London, 1983).

[6] Harding J. *Decompositions in quantum logic*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (5), 1839–1862 (1996).

[7] Овчинников П.Г. *Об однородных конечных логиках Гричи, допускающих двузначное состояние*, Теор. функц., прилож. и смежные вопросы (Казанск. гос. ун-т, Казань, 1999), с. 167–168.

[8] Sultanbekov F.F. *Automorphism groups of small* (3, 3)*-homogeneous logics*, Int. J. Theor. Phys. **49** (12), 3271–3278 (2010).

[9] Султанбеков Ф.Ф. *О* (3, 3)*-однородных квантовых логиках с* 18 *атомами*, Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского (Изд-во "Казанск. матем. об-во", Казань, 2011), т. 43, с. 333–335.

Ф.Ф. Султанбеков

доцент, кафедра математического анализа,

Институт математики и механики,

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Foat.Sultanbekov@ksu.ru

F.F. Sultanbekov

A $(3,3)$-homogeneous quantum logic with 18 atoms. I

Abstract. A quantum logic is called (m,n)-homogeneous if any its atom is contained exactly in m maximal (with respect to inclusion) orthogonal sets of atoms (we call them *blocks*), and every block contains exactly n elements. We enumerate atoms by natural numbers. For each block $\{i,j,k\}$ we use the abbreviation i-j-k. Every such logic has the following 7 *initial* blocks $B_1,\ldots,B_7$: 1-2-3, 1-4-5, 1-6-7, 2-8-9, 2-10-11, 3-12-13, and 3-14-15. For an 18-atom logic the arrangements of the rest atoms 16, 17, and 18 is important. We consider the case when they form a loop of order 4 in one of layers composed of initial blocks, for example, l_4: 3-14-15, 15-16-17, 17-18-13, and 13-12-3. We prove that there exist (up to isomorphism) only 5 such logics, and describe pure states and automorphism groups for them.

Keywords: quantum logic, homogeneous quantum logic, $(3,3)$-homogeneous logic, atom, block, pure state, automorphism group.

F.F. Sultanbekov

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Foat.Sultanbekov@ksu.ru