

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра геометрии

**ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО КУРСУ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
И ТОПОЛОГИИ**

Часть 1

Казань
2006

Казань
2006

Печатается по решению
заседания кафедры геометрии
Казанского государственного университета
Протокол № 6 от 16.05.2006 г.

Авторы
М.А.Малахальцев, В.Е.Фомин

Задачи и упражнения по курсу дифференциальной геометрии и топологии. Часть 1.– Казань: КГУ, 2006. – 64 с.

Данная работа содержит задачи и упражнения для проведения практических занятий по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» со студентами механико-математического факультета Казанского университета.

авторы
2006

©Казанский государственный
университет, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Следование 1.1. Пусть M – метрическое пространство	3
Содержание	3
Список обозначений	4
1. Метрические пространства	5
2. Определение топологического пространства	11
Открытые и замкнутые подмножества	11
3. База и предбаза топологии. Непрерывные отображения топологических пространств	18
4. Индуцированная топология. Топология произведения	24
5. Фактор-пространство и фактор-топология	30
6. Аксиомы отдельности топологических пространств	35
7. Связность топологических пространств	39
8. Компактные и локально компактные топологические пространства	43
9. Топологические многообразия	48
10. Элементы гомотопической топологии	52
Ответы	59
Список литературы	64

если $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, является метрикой на $M = \mathbb{R}^n$.

Пример 1.2. Пусть M – произвольное множество. Дистанция метрика на M определяется следующим образом: для любых $x, y \in M$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases} \quad (1.8)$$

Следование 1.2. Пусть (M, d) – метрическое пространство, $x_0 \in M, \varepsilon > 0$ – положительное число. Открытым ε -шаром радиуса ε с центром x_0 или ε -окрестностью точки x_0 называют множество

$$\delta(x_0, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}. \quad (1.9)$$

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ:

- \mathbb{N} — множество натуральных чисел,
 \mathbb{Z} — множество целых чисел,
 \mathbb{Q} — множество рациональных чисел,
 \mathbb{R} — множество действительных чисел,
 \mathbb{C} — множество комплексных чисел,
 \mathbb{R}^n — n -мерное вещественное арифметическое пространство,
 \mathbb{C}^n — n -мерное комплексное арифметическое пространство,
 \mathbb{B}^n — n -мерный шар,
 \mathbb{S}^n — n -мерная сфера,
 \mathbb{RP}^n — n -мерное вещественное проективное пространство,
 \mathbb{T}^n — n -мерный тор.

Символом * снабжены номера задач повышенной трудности.

1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1.1. Пусть M — множество. *Метрикой* на M называется отображение $d : (x, y) \in M \times M \rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам:

$$1) \forall x, y \in M \quad d(x, y) \geq 0, \quad (1.1)$$

$$2) d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad (1.2)$$

$$3) \forall x, y \in M \quad d(x, y) = d(y, x), \quad (1.3)$$

$$4) \forall x, y, z \in M \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \quad (1.4)$$

При этом $d(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x, y , а M — *метрическим пространством* и обозначается (M, d) .

Пример 1.1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Тогда

$$1) d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{евклидова метрика}) \quad (1.5)$$

$$2) d_0(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i - y^i|, \quad (1.6)$$

$$3) d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i|, \quad (1.7)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, являются метриками на $M = \mathbb{R}^n$.

Пример 1.2. Пусть M — произвольное множество. *Дискретная метрика* на M определяется следующим образом: для любых $x, y \in M$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad (1.8)$$

Определение 1.2. Пусть (M, d) — метрическое пространство, $x_0 \in M, \varepsilon > 0$ — положительное число. Открытым шаром радиуса ε с центром x_0 (или шаровой ε -окрестностью точки x_0) называется множество

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}. \quad (1.9)$$

Определение 1.3. Пусть (M, d) — метрическое пространство, $N \subset M$ — подмножество и для любых $x, y \in N$ положим $\tilde{d}(x, y) = d(x, y)$. Тогда \tilde{d} — метрика на N и метрическое пространство (N, \tilde{d}) называется *подпространством* пространства (M, d) , а \tilde{d} — *индуцированной метрикой* на подмножестве N .

При этом для любой точки $x_0 \in N$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем $\tilde{B}(x_0, \varepsilon) = B(x_0, \varepsilon) \cap N$, где $\tilde{B}(x_0, \varepsilon)$ — открытый шар в (N, \tilde{d}) .

Определение 1.4. Диаметром подмножества N метрического пространства (M, d) называется число

$$\text{diam } N = \sup_{x, y \in N} d(x, y). \quad (1.10)$$

Определение 1.5. Пусть N — подмножество метрического пространства (M, d) . Точка $x \in N$ называется *внутренней точкой* множества N , если существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что $B(x, \varepsilon) \subset N$. Множество всех внутренних точек множества N называется *внутренностью* множества N и обозначается $\overset{\circ}{N}$. Множество N называется *открытым*, если $\overset{\circ}{N} = N$. Совокупность τ всех открытых множеств метрического пространства (M, d) называется *топологией* метрического пространства (M, d) .

Топология τ метрического пространства (M, d) обладает свойствами:

$$1) \emptyset \in \tau, M \in \tau, \quad (1.11)$$

$$2) \text{Если } U_i \in \tau, i \in I, \text{ то } \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau, \quad (1.12)$$

$$3) \text{Если } U_i \in \tau, i = \overline{1, n}, \text{ то } \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau. \quad (1.13)$$

Замечание 1.1. В свойстве (1.12) множество индексов I произвольно.

Определение 1.6. Пусть N — подмножество метрического пространства (M, d) . Точка $x_0 \in M$ называется *точкой прикосновения* множества N , если для любого $\varepsilon > 0$ $B(x_0, \varepsilon) \cap N \neq \emptyset$.

Множество всех точек прикосновения множества N называется *замыканием* множества N и обозначается \overline{N} . Множество N называется *замкнутым*, если $\overline{N} = N$.

Операция замыкания выражается через операцию взятия внутренности следующим образом: для любого $N \subset M$

$$\overline{N} = \left(\overset{\circ}{N^c} \right)^c, \quad (1.14)$$

где

$$N^c = M \setminus N \quad (1.15)$$

есть дополнение множества N . Отсюда следует, что если множество N замкнуто, то N^c открыто и обратно.

Замкнутые множества обладают свойствами:

$$1) \emptyset \text{ и } M \text{ замкнуты,} \quad (1.16)$$

$$2) \text{Если } B_i, i \in I, \text{ замкнуты, то } \bigcap_{i \in I} B_i \text{ замкнуто,} \quad (1.17)$$

$$3) \text{Если } B_i, i = \overline{1, n}, \text{ замкнуты, то } \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ замкнуто.} \quad (1.18)$$

Определение 1.7. Точка x_0 метрического пространства (M, d) называется *граничной точкой* множества $N \subset M$, если $x_0 \in \overline{N} \cap \overline{N^c}$. Множество всех граничных точек множества N называется *границей* множества N и обозначается $\text{Fr } N$.

Таким образом,

$$\text{Fr } N = \overline{N} \cap \overline{N^c}. \quad (1.19)$$

Задачи:

1.1. Что представляют собой ε -окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ в метриках (1.5)–(1.8)? Изобразить эти окрестности на рисунке. Тот же вопрос для \mathbb{R}^3 .

1.2. Показать, что метрики (1.5)–(1.7) плоскости \mathbb{R}^2 индуцируют на оси абсцисс $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ одну и ту же метрику.

1.3. Показать, что в определении 1.5 аксиома 1 следует из аксиом 2, 3, 4.

1.4. Показать, что аксиомы 1-4 определения 1.5 эквивалентны аксиомам

$$2') d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad (1.20)$$

$$4') \forall x, y, z \in M \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \quad (1.21)$$

1.5. Пусть $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — неубывающая функция такая, что:

$$1) f(x) = 0 \iff x = 0,$$

$$2) \forall x_1, x_2 \in [0, \infty) \quad f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

Доказать, что если d — метрика на множестве M , то $\tilde{d} = f \circ d$ — также метрика на M .

1.6. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Доказать, что

$$1) \tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

$$2) \tilde{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\},$$

$$3) \tilde{d}(x, y) = \arctg(d(x, y))$$

также метрики на M .

1.7. Пусть M — множество клеток шахматной доски 8×8 . Расстояние $d(x, y)$ между двумя клетками x, y шахматной доски определим как минимальное число ходов шахматной фигуры K , которое нужно совершить, чтобы попасть из x в y . Показать, что d — метрика на M . Как выглядит ε -окрестность точки в (M, d) , чemu равен диаметр $\text{diam } M$, если: а) K есть король, б) K — конь, в) K — ферзь, г) K — ладья?

1.8. Доказать следующие свойства шаровых окрестностей метрического пространства:

$$a) \forall x, y, x \neq y \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ такое, что } B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset,$$

$$b) \forall y \in B(x, \varepsilon) \quad \exists r > 0 \text{ такое, что } B(y, r) \subset B(x, \varepsilon),$$

$$b) \text{diam } B(x, \varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

Привести примеры, когда $\text{diam } B(x, \varepsilon) = 2\varepsilon$ и $\text{diam } B(x, \varepsilon) < 2\varepsilon$.

1.9. Показать, что на плоскости \mathbb{R}^2 топологии, порождаемые метриками d, d_0, d_1 ((1.5), (1.6), (1.7)), совпадают, а в топологии дискретной метрики (1.8) всякое множество является открытым.

1.10. Доказать, что в метрическом пространстве (M, d) замкнутый шар

$$Z(x_0, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x_0, x) \leq \varepsilon\} \quad (1.22)$$

является замкнутым множеством.

1.11. Привести пример метрического пространства, в котором замыкание открытого шара $B(x, \varepsilon)$ не совпадает с замкнутым шаром $Z(x, \varepsilon)$.

1.12. Назовём сферой радиуса $\varepsilon \geq 0$ с центром x_0 в метрическом пространстве (M, d) множество

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, x_0) = \varepsilon\} \quad (1.23)$$

Привести пример метрического пространства, в котором границы открытого $B(x_0, \varepsilon)$ и замкнутого $Z(x_0, \varepsilon)$ шаров не совпадают со сферой $S(x_0, \varepsilon)$.

1.13. Доказать, что в метрическом пространстве всякое одноточечное множество замкнуто.

1.14. Пусть \mathbb{R}^2 — метрическое пространство со стандартной метрикой d (1.5). Как выглядит ε -окрестность точки (x_0, y_0) в подпространстве $N \subset \mathbb{R}^2$, если

a) $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ — первый квадрант в плоскости \mathbb{R}^2 ?

b) $N = B(0, r)$ — открытый шар радиуса $r > 0$ в \mathbb{R}^2 ?

1.15. Привести пример метрического пространства, в котором существуют шары $B(x, \varepsilon_1), B(y, \varepsilon_2)$ такие, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $B(x, \varepsilon_1) \supset B(y, \varepsilon_2)$.

1.16. Пусть $C^0[a, b]$ — множество непрерывных вещественных функций на сегменте $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\forall f, g \in C^0[a, b] \quad d_0(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad (1.24)$$

$C^n[a, b]$ — множество n раз ($n \in \mathbb{N}$) непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций и

$$\forall f, g \in C^n[a, b] \quad d_n(f, g) = \sum_{k=0}^n \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{d^k f}{dt^k}(t) - \frac{d^k g}{dt^k}(t) \right|, \quad (1.25)$$

$L[a, b]$ - множество непрерывных на $[a, b]$ функций и

$$\forall f, g \in L[a, b], \quad d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt. \quad (1.26)$$

Доказать, что $(C^0[a, b], d_0), (C^n[a, b], d_n), (L[a, b], d)$ — метрические пространства.

1.17. Пусть в предыдущей задаче $a = 0, b = 2$ и для любого $t \in [0, 2]$ положим $f(t) = t, g(t) = t^2$. Найти $d(f, g), d_n(f, g)$ для $n = 0, 1, 2, 3$. Что представляют из себя ε -окрестности точек f, g в метрических пространствах $L[a, b], C^n[a, b], n = 0, 1, 2, 3$?

1.18. Пусть \mathbb{Q} — множество всех рациональных чисел, p — простое число. Скажем, что $q \in \mathbb{Q}$ не делится на p , если $q = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n не делятся на p .

а) Показать, что если для любых $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$

$$d(q_1, q_2) = \begin{cases} p^{-m}, & \text{если } q_1 \neq q_2, q_2 - q_1 = p^m q \\ & \text{и } q \text{ не делится на } p, \\ 0, & \text{если } q_1 = q_2, \end{cases} \quad (1.27)$$

то (\mathbb{Q}, d) — метрическое пространство.

б) Показать, что для любых $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$

$$d(q_1, q_2) \leq \max\{d(q_1, q_3), d(q_2, q_3)\}.$$

в) Показать, что в метрическом пространстве (\mathbb{Q}, d) все треугольники равнобедренные.

г) Описать ε -окрестность точки $q_0 \in \mathbb{Q}$.

д) Для любого натурального числа n найти $q_n \neq 0$, лежащее в $\frac{1}{n}$ -окрестности нуля.

1.19. Пусть (M, d) — метрическое пространство, $F_1, F_2 \subset M$ — два подмножества в M . Положим

$$\tilde{d}(F_1, F_2) = \inf_{x_1 \in F_1, x_2 \in F_2} d(x_1, x_2). \quad (1.28)$$

а) Показать, что функция \tilde{d} не удовлетворяет аксиомам (1.2), (1.4) метрического пространства, но удовлетворяет аксиомам (1.1), (1.3).

б) Привести пример метрического пространства (M, d) и двух замкнутых множеств F_1, F_2 в нём таких, что $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ и $\tilde{d}(F_1, F_2) = 0$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА

Определение 2.1. Пусть X — множество. Семейство τ подмножеств множества X называется *топологией* на X , если выполняются следующие аксиомы:

1) Семейство τ включает в себя пустое множество и все множество X :

$$\emptyset \in \tau, X \in \tau, \quad (2.1)$$

2) Если $U_i \in \tau, i \in I$, где I — произвольное множество индексов, то и

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau, \quad (2.2)$$

3) Если $U_i \in \tau, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}$, то и

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau. \quad (2.3)$$

При этом множество X называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ) , а множества $U \in \tau$ называются *открытыми* множествами.

Пример 2.1. Всякое метрическое пространство (M, d) , как следует из свойств (1.1)–(1.3), является топологическим пространством.

Пример 2.2. Пусть X — множество и $\tau = \kappa(X)$ — множество всех подмножеств множества X . Тогда τ — топология на X , называемая *дискретной*, а (X, τ) называется *дискретным топологическим пространством*.

Пример 2.3. Пусть X — множество, а $\tau = \{\emptyset, X\}$. Тогда τ — топология на X , называемая *антидискретной*, а (X, τ) называется *антидискретным топологическим пространством*.

Определение 2.2. Пусть (X, τ) — топологическое пространство и A — подмножество X . *Окрестностью множества A* называется любое открытое множество $U \in \tau$, содержащее A и обозначаемое $U(A)$. В частности, если $x_0 \in X$, то $U(\{x_0\})$ называется *окрестностью точки x_0* и обозначается просто $U(x_0)$.

Определение 2.3. Подмножество N топологического пространства (X, τ) называется *замкнутым*, если его дополнение N^c открыто.

Определение 2.4. Пусть Y — подмножество топологического пространства (X, τ) . Точка $x_0 \in Y$ называется *внутренней точкой множества Y* , если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки такая, что $U(x_0) \subset Y$. Точка $y_0 \in X$ называется *точкой прикосновения множества Y* , если любая окрестность $V(y_0)$ этой точки пересекается с множеством Y : $V(y_0) \cap Y \neq \emptyset$.

Определения и обозначения внутренности, замыкания и границы множества Y топологического пространства не отличаются от соответствующих определений в метрическом пространстве (см. определения 1.5, 1.6, 1.7 из параграфа 1). Также верны формула (1.14) и свойства (1.16) - (1.18) замкнутых множеств. Кроме того, имеют место следующие свойства:

$$\overset{\circ}{A} \subset A, \quad \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}, \quad \overset{\circ}{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}, \quad \overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad (2.4)$$

$$A \subset \overline{A}, \quad \overline{A} = \overline{\overline{A}}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (2.5)$$

Подмножество топологического пространства открыто (соответственно, замкнуто) тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью (соответственно, замыканием).

Задачи:

2.1. Пусть $X = \{a, b\}$ — множество из двух точек. Описать все топологии на X , а также внутренности, замыкания и границы подмножеств в этих топологиях.

2.2. Пусть $X = \{a, b, c\}$ — трёхточечное множество. Найти все топологии на X .

2.3.* Составить программу на ЭВМ по нахождению всех топологий на множестве X из n точек¹.

2.4. Если τ_1, τ_2 — две топологии на множестве X , то будут ли:
а) $\tau_1 \cap \tau_2$, б) $\tau_1 \cup \tau_2$ также топологиями на X ?

2.5. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, $U \in \tau$, а Q — произвольное подмножество X . Доказать, что

$$U \cap Q \neq \emptyset \iff U \cap \overline{Q} \neq \emptyset. \quad (2.6)$$

2.6. Q — произвольное подмножество топологического пространства (X, τ) , $U \in \tau$. Доказать, что

$$U \cap \overline{Q} \subset \overline{U \cap Q}. \quad (2.7)$$

2.7. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство произвольных подмножеств топологического пространства. Доказать, что

$$a) \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}, \quad (2.8)$$

$$b) \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \quad (2.9)$$

$$v) \quad (\bigcup_{i \in I} A_i)^\circ \supset \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}, \quad (2.10)$$

$$r) \quad (\bigcap_{i \in I} A_i)^\circ \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}, \quad (2.11)$$

причём, если I конечно, то (2.8), (2.11) обращаются в равенства:

$$d) \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad (2.12)$$

$$e) \quad (\bigcap_{i=1}^n A_i)^\circ = \bigcap_{i=1}^n \overset{\circ}{A_i}. \quad (2.13)$$

Привести примеры, когда в (2.8), (2.11) имеют место строгие включения (при I бесконечном).

¹Как нам сообщили из Елабужского педагогического университета, при $n = 4$ на множестве X 355 топологий, при $n = 5$ — 6942 топологии, при $n = 6$ — 209527 топологий, при $n = 7$ — 9535241 топология.

2.8. Доказать следующие тождества:

а) $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, (2.14)

б) $\overline{A} = A \cup \text{Fr } A$, (2.15)

в) $\overset{\circ}{A} = A \setminus \text{Fr } A$, (2.16)

г) $A = \overset{\circ}{A} \cup (A \cap \text{Fr } A)$. (2.17)

2.9. Доказать, что

а) Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A \subset A$,

б) Множество A открыто тогда и только тогда, когда $\text{Fr } A \cap A = \emptyset$,

в) Если U открыто, то $\text{Fr Fr } U = \text{Fr } U$. Верно ли обратное?

г) Если B замкнуто, то $\text{Fr Fr } B = \text{Fr } B$. Верно ли обратное?

2.10. Доказать следующие свойства оператора Fr : для любых множеств A, B из топологического пространства (X, τ)

а) $\text{Fr } A = \text{Fr}(X \setminus A)$, (2.18)

б) $\text{Fr}(\text{Fr } A) \subset \text{Fr } A$, (2.19)

в) $\text{Fr}(A \cup B) \subset (\text{Fr } A) \cup (\text{Fr } B) \subset \text{Fr}(A \cup B) \cup A \cup B$, (2.20)

г) $\text{Fr}(\text{Fr}(\text{Fr } A)) = \text{Fr}(\text{Fr } A)$ (2.21)

Привести примеры, показывающие, что включения (2.19), (2.20) не сводятся к равенствам.

2.11. Пусть x_0 — фиксированная точка на вещественной прямой \mathbb{R} , τ — семейство всевозможных интервалов (α, β) (конечных и бесконечных), содержащих точку x_0 , а также \emptyset . Проверить, что τ — топология на \mathbb{R} . Для множеств $A = (-1, 1)$, $B = \{1, 2, 3\}$ и точки $x_0 = 2$ найти $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}, \overline{A}, \overline{B}, \text{Fr } A, \text{Fr } B$.

2.12. Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется *всюду плотным* в X , если $\overline{A} = X$. Доказать, что

а) Пересечение двух всюду плотных множеств, одно из которых открыто, всюду плотно.

б) В \mathbb{R} со стандартной топологией есть два всюду плотных множества, пересечение которых пусто.

в) В антидискретном пространстве любое непустое множество всюду плотно.

г) В дискретном топологическом пространстве (X, τ) всюду плотным множеством является только X .

2.13. Пусть B — непустое подмножество множества X . На X задана топология $\tau = \{\emptyset, X, B\}$. Доказать, что множество $A \subset X$ всюду плотно в X тогда и только тогда, когда $A \cap B \neq \emptyset$.

2.14. В каком топологическом пространстве (X, τ) всюду плотным множеством является только само X ?

2.15. Доказать, что если (X, τ) — непустое топологическое пространство, то для любого открытого множества $U \subset X$ его граница $\text{Fr } U$ не может быть всюду плотной в X .

2.16. Доказать, что граница множества A всюду плотна в топологическом пространстве (X, τ) тогда и только тогда, когда A и A^c всюду плотны в X .

2.17. Если U открыто, а B замкнуто в топологическом пространстве (X, τ) , то $U \setminus B$ открыто, а $B \setminus U$ замкнуто в X . Доказать.

2.18. Пусть U — открытое множество на вещественной прямой \mathbb{R} со стандартной топологией. Привести примеры, когда $U \subset \overset{\circ}{U}$ (строгое включение) и когда $U = \overset{\circ}{U}$.

2.19.* Пусть U, V — открытые множества и $U \cap V = \emptyset$. Доказать, что $\overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} = \emptyset$. Указание: Использовать результат задачи 2.6.

2.20.* Если U — открытое, а Q — произвольное множество, то $\overset{\circ}{U \cap V} = \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{Q}$. Указание: Использовать результат задачи 2.6.

2.21. Пусть X — множество. Назовём подмножество $U \subset X$ открытым, если U^c — либо конечное множество, либо совпадает с X . Доказать, что множество всех таких открытых подмножеств образует топологию на X (*топология Зарисского*).

2.22. Две топологии τ_1, τ_2 на одном множестве X называются *сравнимыми*, если либо $\tau_1 \subset \tau_2$ (говорят, что τ_1 слабее τ_2 , или τ_2 сильнее τ_1 , или τ_2 *мажорирует* τ_1), либо $\tau_1 \supset \tau_2$. Доказать, что на множестве вещественных чисел \mathbb{R} топология Зарисского слабее стандартной топологии, определяемой метрикой $d(x, y) = |x - y|$.

2.23. Доказать, что топология Зарисского на множестве X тогда и только тогда дискретна, когда X — конечно.

2.24. Доказать, что топология Зарисского на множестве X тогда и только тогда антидискретна, когда X либо пусто, либо состоит из одной точки.

2.25. Если в пространстве X с топологией Зарисского есть множество A , отличное от \emptyset и X и такое, что A открыто и замкнуто одновременно, то X — конечно. Доказать.

2.26. Доказать, что если в пространстве X с топологией Зарисского пересечение любого семейства открытых множеств открыто, то X конечно.

2.27.* В алгебраической геометрии топологией Зарисского на множестве \mathbb{C}^n называется топология, в которой множество B замкнуто, если оно либо совпадает со всем пространством \mathbb{C}^n , либо является решением системы полиномиальных уравнений.

а) Доказать, что так определённое семейство действительно является семейством замкнутых множеств некоторой топологии.

б) Доказать, что на \mathbb{C} эта топология совпадает с топологией Зарисского в смысле определения задачи 2.21.

в) Будут ли в этой топологии открытыми множества

$$\{(z^1, \dots, z^n) \mid z^1 \neq 0\}, \quad \{(z^1, \dots, z^n) \mid |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 < 1\}?$$

г) Доказать, что эта топология слабее стандартной на $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

2.28. Точка x_0 топологического пространства (X, τ) называется *пределной точкой* множества $A \subset X$, если любая окрестность $U(x_0)$ этой точки содержит точки множества A , отличные от x_0 . Множество всех предельных точек множества A называется

производным множеством от A и обозначается A' . Доказать следующие свойства операции взятия производной от множества: для любых подмножеств $A \subset X, B \subset X$

$$a) (A \cup B)' = A' \cup B', \quad (2.22)$$

$$b) (A \cap B)' \subset A' \cap B' \quad (2.23)$$

$$b) (A \setminus B)' \supset A' \setminus B', \quad (2.24)$$

$$g) A' \subset \overline{A}. \quad (2.25)$$

2.29. Доказать, что если $\{A_i\}_{i \in I}$ — произвольное семейство подмножеств топологического пространства (X, τ) , то верно включение

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)' \supset \bigcup_{i \in I} A'_i, \quad (2.26)$$

обращающееся в равенство, если I конечно. Привести пример, показывающий, что в (2.26) равенства может не быть.

2.30. Можно ли утверждать, что в любом топологическом пространстве (X, τ) : а) $\emptyset' = \emptyset$, б) $X' = X$?

2.31. Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства (X, τ) . Чему равно A' — производное множество от A , если: а) X антидискретно, б) X дискретно?

2.32. Пусть $X = \{a, b\}$ — пространство из двух точек с топологией $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Найти $\{a\}', \{b\}', X'$.

2.33. На вещественной прямой \mathbb{R} со стандартной топологией привести примеры таких множеств A , что: а) $A \subset A'$, б) $A' \subset A$, в) $A' = A$, г) $A \not\subset A'$ и одновременно $A' \not\subset A$.

2.34. Привести примеры топологических пространств (X, τ) и множеств $A \subset X$ таких, что:

$$a) A' = (A')',$$

$$b) A' \not\subset (A')' \text{ и одновременно } (A')' \not\subset A',$$

$$b) \text{ имеет место строгое включение } A' \subset (A')',$$

$$g) \text{ имеет место строгое включение } (A')' \subset A'.$$

2.35. Пусть A – подмножество топологического пространства (X, τ) . Точка $x_0 \in A$ называется *изолированной точкой множества A* , если существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $U(x_0) \cap A = \{x_0\}$. Доказать, что:

- точка $x \in A$ изолирована тогда и только тогда, когда $x \in A \setminus A'$,
- замыкание \bar{A} множества A состоит из всех предельных и изолированных точек множества A ,
- пространство (X, τ) дискретно тогда и только тогда, когда любая точка $x \in X$ – изолированная точка множества X .

2.36. Доказать, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

3. БАЗА И ПРЕДБАЗА ТОПОЛОГИИ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 3.1. Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Множество открытых подмножеств $\beta \subset \tau$ называется *базой топологии τ* , если любое открытое множество $U \in \tau$ представимо в виде объединения множеств из β .

Замечание 3.1. Поскольку объединение пустого семейства подмножеств множества X пусто

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset, \quad (3.1)$$

то удобно принять соглашение, что

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X. \quad (3.2)$$

При этом остаются верными формулы де Моргана

$$\bigcup_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c, \quad \bigcap_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c, \quad (3.3)$$

а формулировки многих утверждений становятся компактнее. В дальнейшем слова «конечное пересечение» будут подразумеваться, что число элементов в пересечении может быть и пустым.

Для того чтобы семейство $\beta = \{B_i\}_{i \in I}$ подмножеств множества X было базой некоторой топологии на X , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (внутренний критерий базы):

- $\bigcup_{i \in I} B_i = X$,
- для любых $i, j \in I$ и любой точки $x \in B_i \cap B_j$ существует $k \in I$ такое, что $x \in B_k \subset B_i \cap B_j$.

Определение 3.2. Множество π открытых подмножеств топологического пространства (X, τ) называется *предбазой топологии τ* , если всевозможные конечные пересечения элементов множества π образуют базу топологии τ , то есть

$$\beta = \left\{ B = \bigcap_{i \in I} A_i \mid A_i \in \pi, I \text{ – конечно} \right\}. \quad (3.4)$$

Пример 3.1. На вещественной прямой \mathbb{R} со стандартной топологией базу образует множество всех открытых конечных интервалов

$$\beta = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 < \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}, \quad (3.5)$$

а в качестве предбазы можно взять множество

$$\pi = \{(-\infty, \alpha_2), (\alpha_1, +\infty) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (3.6)$$

Определение 3.3. Отображение $f : X \rightarrow Y$ двух топологических пространств $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ называется *непрерывным*, если для любого открытого множества $V \in \tau_Y$ его прообраз $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Множество всех непрерывных отображений из X в Y обозначается через $C(X, Y)$.

Свойства непрерывного отображения, равносильные определению 3.3:

- Если π_Y – предбаза топологии τ_Y , то для любого $V \in \pi_Y$ верно, что $f^{-1}(V) \in \tau_X$.
- Для любого $A \subset X$ выполняется включение

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}. \quad (3.7)$$

- 3) Для любого замкнутого множества $B \subset Y$ множество $f^{-1}(B)$ замкнуто в X .
 4) Для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $V(f(x))$ множество $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x в X .

Определение 3.4. Биективное отображение $f : X \rightarrow Y$ двух топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f и $f^{-1} : Y \rightarrow X$ — непрерывные отображения. Два топологических пространства называются *гомеоморфными*, если между ними существует гомеоморфизм.

Задачи:

3.1. Пусть \mathcal{L} — прямая линия на плоскости, π — множество всех прямых, параллельных \mathcal{L} . Найти базу β и топологию τ на плоскости, для которых π — предбаза.

3.2. Пусть x_0 — фиксированная точка плоскости, π — множество всех прямых, проходящих через x_0 . Найти базу β и топологию τ на плоскости, для которых π — предбаза.

3.3. На множестве вещественных чисел \mathbb{R} задана предбаза $\pi = \{(-\infty, \alpha_1], (\alpha_2, +\infty) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ топологии τ . Найти базу β топологии τ . Сравнить топологию τ со стандартной топологией τ_{st} на \mathbb{R} , доказать, что $\tau \supset \tau_{st}$.

3.4. Если на множестве X задано семейство подмножеств π , то наименее слабая топология на X , в которой все элементы из π открыты, есть топология, для которой π является предбазой. Доказать.

3.5. Найти наименее слабую топологию на множестве вещественных чисел \mathbb{R} , в которой:

- а) Все сегменты $[\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ — открыты,
- б) Все интервалы (α_1, α_2) (конечные и бесконечные) замкнуты,
- в) Все конечные интервалы (α_1, α_2) , $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ — замкнуты,
- г) Все одноточечные множества $\{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — замкнуты.

3.6. Привести примеры предбазы и базы топологии Зарисского (см. задачу 2.21).

3.7. Пусть $\beta = \{[a, b]\}$ — семейство всех конечных полуинтервалов на вещественной прямой \mathbb{R} .

- а) Доказать, что β — база некоторой топологии τ на \mathbb{R} . Эта топология называется *топологией Зоргенфрея*, а (\mathbb{R}, τ) — *прямой Зоргенфрея*.
- б) Проверить, что в топологии Зоргенфрея все полуинтервалы вида $[a, b)$ одновременно открыты и замкнуты.
- в) Доказать, что топология Зоргенфрея сильнее стандартной топологии на \mathbb{R} .
- г) Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если в нём существует счётное всюду плотное подмножество. Доказать, что прямая Зоргенфрея является сепарабельным пространством.

3.8. Пусть $\mathbb{R}_+^2 = \{(x^1, x^2) \mid x^2 \geq 0\}$ — верхняя полуплоскость плоскости \mathbb{R}^2 , β — семейство открытых кругов $B((x^1, x^2), r)$, $0 < r < x^2$ и открытых кругов, «касающихся» границы $x^2 = 0$, дополненных точкой касания: $B((x^1, x^2), x^2) \cup \{(x^1, 0)\}$.

- а) Показать, что β — база некоторой топологии τ . Эта топология называется *топологией Немыцкого*, а пространство (\mathbb{R}_+^2, τ) — *плоскостью Немыцкого*.
- б) Доказать, что плоскость Немыцкого сепарабельна (см. задачу 3.7, г).
- в) Доказать, что плоскость Немыцкого не имеет счётной базы.

3.9. Пусть $C(\mathbb{R})$ — множество непрерывных функций на \mathbb{R} . Для любой функции $f \in C(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$V(f, \varepsilon) = \{g \in C(\mathbb{R}) \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t) - f(t)| < \varepsilon\}, \quad (3.8)$$

и для любых $f \in C(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ положим

$$\begin{aligned} W(f, t_1, \dots, t_m, \varepsilon) &= \\ &= \{g \in C(\mathbb{R}) \mid |g(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon, \forall i = \overline{1, m}\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

- а) Показать, что семейство $\beta = \{V(f, \varepsilon) \mid f \in C(\mathbb{R}), \varepsilon > 0\}$ есть база некоторой топологии на $C(\mathbb{R})$. Эта топология называется *топологией равномерной сходимости*.
- б) Показать, что семейство $\beta = \{W(f, t_1, \dots, t_m, \varepsilon) \mid f \in C(\mathbb{R}), t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$ есть база некоторой топологии на $C(\mathbb{R})$. Эта топология называется *топологией поточечной сходимости*.
- в) Показать, что топология поточечной сходимости слабее топологии равномерной сходимости.
- г) Показать, что топология равномерной сходимости не имеет счётной базы.
- д) Показать, что в топологии равномерной сходимости множество ограниченных и множество неограниченных функций одновременно открыты и замкнуты.

3.10. Пусть $\mathbb{R}_{st}, \mathbb{R}_d, \mathbb{R}_{ad}$ — множество вещественных чисел \mathbb{R} , наделённое соответственно стандартной, дискретной и антидискретной топологиями. Описать множества непрерывных функций $C(\mathbb{R}_d, \mathbb{R}_{st}), C(\mathbb{R}_{ad}, \mathbb{R}_{st}), C(\mathbb{R}_{st}, \mathbb{R}_d), C(\mathbb{R}_{st}, \mathbb{R}_{ad})$.

3.11. (X, τ) — топологическое пространство, $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{st}$ — отображение. Доказать, что f непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ множества $\{x \in X \mid f(x) > c\}$ и $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ открыты в X .

3.12. Если $f : X \rightarrow Y$ — непрерывная сюръекция топологических пространств и множество A всюду плотно в X , то $f(A)$ всюду плотно в Y . Доказать.

3.13. Доказать, что непрерывность отображения $f : X \rightarrow Y$ эквивалентна каждому из следующих условий:

$$\text{а)} \forall B \subset Y \quad \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B), \quad (3.10)$$

$$\text{б)} \forall B \subset Y \quad f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}. \quad (3.11)$$

3.14. Показать, что для непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ и произвольного множества $C \subset X$, вообще говоря, не име-

ют места включения между множествами $\overset{\circ}{f(C)}$ и $f(\overset{\circ}{C})$, то есть $\overset{\circ}{f(C)} \not\subset f(\overset{\circ}{C})$ и $f(\overset{\circ}{C}) \not\subset \overset{\circ}{f(C)}$. Привести примеры (в том числе для случая $X = Y$).

3.15. Доказать, что всякое непрерывное отображение бесконечного множества с топологией Зарисского в числовую прямую \mathbb{R}_{st} является постоянным отображением.

3.16. Может ли образом замкнутого множества при непрерывном отображении быть открытое и незамкнутое множество?

3.17. Пусть F — произвольное непустое подмножество метрического пространства (X, d) . Для любой точки $x \in X$ положим

$$f(x) = \inf_{y \in F} d(x, y) \quad (3.12)$$

число, называемое *расстоянием от x до F* . Доказать, что

- а) Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{st}$ непрерывна,
б) $\overline{F} = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

3.18. Привести пример непрерывного сюръективного отображения $f : X \rightarrow Y$ и множества B , всюду плотного в Y , таких, что множество $f^{-1}(B)$ не является всюду плотным в X .

3.19. Среди печатных прописных букв русского алфавита найти гомеоморфные между собой.

3.20. Гомеоморфны ли греческая буква α и латинская буква Q ?

3.21. Гомеоморфны ли следующие топологические пространства X и Y , и если нет, то какой топологический инвариант их различает?

- а) X — круговой цилиндр в \mathbb{R}_{st}^3 , Y — кольцо в \mathbb{R}_{st}^2 ,
б) X — выпуклый многогранник в \mathbb{R}_{st}^3 , Y — шар радиуса 1 в \mathbb{R}_{st}^3 ,
в) X — сфера S^2 , Y — двумерный тор T^2 ,
г) X — плоскость \mathbb{R}_{st}^2 , Y — цилиндр в \mathbb{R}_{st}^3 .

3.22. Доказать, что всякое метрическое пространство гомеоморфно метрическому пространству конечного диаметра.

4. ИНДУЦИРОВАННАЯ ТОПОЛОГИЯ. ТОПОЛОГИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Определение 4.1. Пусть (X, τ_X) – топологическое пространство и Y – подмножество X . Тогда $\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau_X\}$ – топология на Y , называемая *индуцированной топологией*, а (Y, τ_Y) – топологическое пространство, называемое *подпространством* пространства (X, τ_X) . При этом множество $U \cap Y$ называют *следом множества U на подпространстве Y* .

Свойства индуцированной топологии:

- 1) Если π_X – предбаза топологии в X , то $\pi_Y = \{U \cap Y \mid U \in \pi_X\}$ – предбаза индуцированной топологии в $Y \subset X$.
- 2) Если β_X – база топологии в X , то $\beta_Y = \{U \cap Y \mid U \in \beta_X\}$ – база индуцированной топологии в $Y \subset X$.
- 3) Всякое замкнутое множество C в подпространстве Y имеет вид $C = B \cap Y$, где B замкнуто в X .
- 4) Для любого $A \subset Y$ выполняется равенство

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y. \quad (4.1)$$

- 5) Любое открытое множество в подпространстве Y будет открытым и в пространстве X тогда и только тогда, когда Y открыто в X .
- 6) Отображение включения $i : Y \rightarrow X$ непрерывно.
- 7) Если $Z \subset Y \subset X$, то топология на Z , индуцированная топологией пространства X , совпадает с топологией на Z , индуцированной топологией подпространства Y .
- 8) Отображение $f : Z \rightarrow Y$ топологического пространства Z в подпространство Y топологического пространства X непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $i \circ f : Z \rightarrow X$.

Определение 4.2. Пусть $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ – семейство топологических пространств, а $X = \prod_{i \in I} X_i$ – декартово произведение семейства множеств $\{X_i\}_{i \in I}$. *Топологией произведения* (или *топологией Тихонова*) на X называется топология τ , предбаза которой состоит из всех множеств вида

$$U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i, \quad i_0 \in I, \quad U_{i_0} \in \tau_{i_0}. \quad (4.2)$$

При этом (X, τ) называется *произведением топологических пространств* $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$.

Свойства произведения топологических пространств:

- 1) Если π_i – предбаза топологии τ_i на X_i , $i \in I$, то все множества вида

$$U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i, \quad i_0 \in I, \quad U_{i_0} \in \pi_{i_0} \quad (4.3)$$

образуют предбазу топологии произведения.

- 2) Если β_i – база топологии τ_i на X_i , $i \in I$, то все множества вида

$$U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} X_i, \quad (4.4)$$

где $U_{i_l} \in \beta_{i_l}$, $l = \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_k \in I$, образуют базу топологии произведения.

- 3) Для любого $i_0 \in I$ проекция

$$\text{pr}_{i_0} : x = (x_i)_{i \in I} \in X \longrightarrow x_{i_0} \in X_{i_0} \quad (4.5)$$

есть непрерывное и открытое (то есть образ любого открытого множества открыт) отображение.

- 4) Пусть $f : Y \rightarrow X = \prod_{i \in I} X_i$ есть отображение топологического пространства Y в произведение топологических пространств, и для любого $i \in I$ положим $f_i = \text{pr}_i \circ f$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $i \in I$ отображение $f_i : Y \rightarrow X_i$ непрерывно.

Задачи:

4.1. На плоскости \mathbb{R}^2 предбазу топологии образует множество всех прямых, параллельных фиксированной прямой \mathcal{L} (см. задачу 3.1). Пусть Y – произвольная прямая на \mathbb{R}^2 . Найти индуцированную топологию на Y .

4.2. На плоскости \mathbb{R}^2 предбазу топологии образует множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку x_0 (см. задачу 3.2). Пусть Y – произвольная прямая на \mathbb{R}^2 . Найти индуцированную топологию на Y .

4.3. \mathbb{R} – множество вещественных чисел со стандартной топологией, $Y = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$. Найти индуцированную топологию на Y .

4.4. Найти $\overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{\bar{A}}$, $\overset{\circ}{\bar{A}}^Y$, $\overset{\circ}{\bar{A}}^{\mathbb{R}}$, $\text{Fr}_Y A$, $\text{Fr}_{\mathbb{R}} A$ для множества $A = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k} \right\} \right)$, где Y и \mathbb{R} взяты из задачи 4.3.

4.5. Пусть $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ – подмножество в \mathbb{R}^2 , а $A = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^1 \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x^2 < 1\}$ – подмножество в Y (сделать рисунок). Найти замыкание, внутренность и границу множества A в стандартной топологии на \mathbb{R}^2 и в топологии подпространства Y .

4.6. Пусть U – открытый круг $x^2 + y^2 < 1$ без точки $(0, 0)$ в плоскости \mathbb{R}^2 . Пусть $C = \left\{ \left(\frac{e^t}{1+e^t} \cos t, \frac{e^t}{1+e^t} \sin t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. Найти замыкание C в стандартной топологии на \mathbb{R}^2 и в топологии подпространства U .

4.7. Доказать, что если $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение топологических пространств, а $A \subset X$ и $B \subset Y$ – подпространства, причём $f(A) \subset B$, то отображение $\tilde{f} : A \rightarrow B$, определяемое по правилу: $\forall x \in A \quad \tilde{f}(x) = f(x)$, также непрерывно.

4.8. Пусть $X = A \cup B$ – объединение либо двух открытых, либо двух замкнутых подмножеств топологического пространства X . Доказать, что отображение $f : X \rightarrow Y$ топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны

ограничения $f|_A : A \rightarrow Y$ и $f|_B : B \rightarrow Y$. Показать, что без условия одновременной открытости либо замкнутости множеств A и B это утверждение, вообще говоря, неверно.

4.9. Доказать, что подмножество A топологического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда семейство всех замкнутых подмножеств в подпространстве A состоит из подмножеств множества A , замкнутых в X .

4.10. Доказать, что топология Зарисского индуцирует на любом подмножестве топологического пространства вновь топологию Зарисского.

4.11. Покажите на примере, что свойство (4.1) индуцированной топологии, вообще говоря, не переносится на внутренность множества: существует $A \subset Y$ такое, что $\overset{\circ}{A} \neq \overset{\circ}{A} \cap Y$. Докажите, что для любого A имеет место включение $\overset{\circ}{A} \supset \overset{\circ}{A} \cap Y$.

4.12. Пусть Y – подпространство топологического пространства X и A – подмножество в Y . Обозначим $\text{Fr}_Y A$ – границу множества A в Y . Привести пример, когда $\text{Fr}_Y A \neq (\text{Fr}_X A) \cap Y$. Докажите, что для любого A имеет место включение $\text{Fr}_Y A \subset (\text{Fr}_X A) \cap Y$.

4.13. Пусть множество A всюду плотно в топологическом пространстве X . Доказать, что для любого открытого множества U множество $A \cap U$ всюду плотно в подпространстве U . Указание: использовать результат задачи 2.6.

4.14. Докажите, что если $A \subset B \subset X$ и A всюду плотно в B , а B всюду плотно в X , то A всюду плотно в X .

4.15. Изобразить на рисунке множество $A = A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^2$, где

- $A_1 = (-1, 0) \cup (1, 2]$, $A_2 = (0, 1) \cup [2, 3]$,
- $A_1 = \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, $A_2 = \mathbb{R} \setminus \{x_2\}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

4.16. Доказать, что для любых $A_i, B_i \subset X_i, i \in I$

$$\prod_{i \in I} (A_i \cap B_i) = \left(\prod_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\prod_{i \in I} B_i \right). \quad (4.6)$$

Привести пример, показывающий, что если в (4.6) пересечение \prod заменить на объединение \bigcup , то равенства, вообще говоря, может и не быть.

4.17. Доказать, что круговой цилиндр в \mathbb{R}_{st}^3 гомеоморфен топологическому произведению окружности и прямой.

4.18. Доказать, что тор в \mathbb{R}_{st}^3 гомеоморфен топологическому произведению двух окружностей.

4.19. Доказать, что лист Мёбиуса не гомеоморфен топологическому произведению окружности и прямой.

4.20. Пусть \mathbb{R}^2 – плоскость со стандартной топологией произведения вещественных прямых, $\Delta = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^1 = x^2\}$ – диагональ в \mathbb{R}^2 . Доказать, что Δ замкнута в \mathbb{R}^2 .

4.21. Доказать, что если для любого $i \in I$ пространство X_i антидискретно, то $X = \prod_{i \in I} X_i$ также антидискретно.

4.22. Доказать, что если для любого $i \in I$ пространство X_i дискретно и I конечно, то $X = \prod_{i \in I} X_i$ тоже дискретно. Если же I бесконечно, то X не обязательно дискретно, привести пример.

4.23. Пусть $X = \prod_{i \in I} X_i$ – произведение топологических пространств и для любого $i \in I$ имеет место включение $A_i \subset X_i$. Доказать, что

$$\prod_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i \in I} A_i}, \quad (4.7)$$

$$\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} \overline{A_i}. \quad (4.8)$$

Однако обратное включение в (4.8) при I бесконечном, вообще говоря, не верно (привести пример).

б) Если I конечно, то

$$\prod_{i=1}^n \overline{A_i} = \prod_{i=1}^n \overline{A_i} \quad (4.9)$$

в) Если для любого $i \in I$ множество A_i замкнуто в X_i , то $\prod_{i \in I} A_i$ замкнуто в X . Верно и обратное, если $\prod_{i \in I} A_i$ непусто и замкнуто в X , то для любого $i \in I$ множество A_i замкнуто в X_i .

г) Если для любого $i \in I$ множество A_i всюду плотно в X_i , то $\prod_{i \in I} A_i$ всюду плотно в X . Обратно, если $\prod_{i \in I} A_i$ всюду плотно в X и $X \neq \emptyset$, то для любого $i \in I$ множество A_i всюду плотно в X_i .

4.24. Будет ли произведение топологий Зарисского топологией Зарисского?

4.25. Пусть $X \times X$ – произведение двух экземпляров прямой Зоргенфрея (см. задачу 3.7, а)), называемое *плоскостью Зоргенфрея*. Доказать, что любая прямая $L = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid ax_1 + bx_2 + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, ab > 0\}$ есть дискретное подпространство в $X \times X$.

4.26. Доказать, что если A, B – подмножества топологических пространств X, Y соответственно, то

$$\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr } A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \text{Fr } B). \quad (4.10)$$

4.27. Если X – топологическое пространство, а $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ – диагональ в $X \times X$, то отображение $f : x \in X \rightarrow (x, x) \in \Delta$ непрерывно. Доказать.

4.28. Доказать, что если $f : X \rightarrow Y$ – отображение топологических пространств, а $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ – график отображения f , то f непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $h : x \in X \rightarrow (x, f(x)) \in \Gamma_f$ есть гомеоморфизм.

4.29. Доказать, что метрика $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{st}$ метрического пространства (M, d) есть непрерывное отображение.

4.30.* Пусть $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ и $\forall i \in I \quad X_i = [0, 1] \subset \mathbb{R}_{st}$, а $X = \prod_{i \in I} X_i = I^I$ – топологическое произведение. Обозначим через A – подмножество в X , состоящее из всех таких точек $(x_i)_{i \in I}$, у которых одна компонента равна 1, а все остальные равны 0. Показать, что:

а) подпространство A дискретно,

б) у множества A есть только одна предельная точка x , и для любой окрестности $U(x)$ этой точки множество $A \setminus U(x)$ конечно.

4.31. Пусть $X = \prod_{i \in I} X_i$ – произведение семейства топологических пространств $(X_i, \tau_i), i \in I$, наделённое топологией τ_0 с базой

$$\beta_0 = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \tau_i, i \in I \right\}. \quad (4.11)$$

Такая топология τ_0 называется ящичной. Доказать, что:

- а) ящичная топология сильнее топологии произведения,
- б) для любого $i_0 \in I$ проекция $\text{pr}_{i_0} : (x_i)_{i \in I} \in X \rightarrow x_{i_0} \in X_{i_0}$ есть непрерывное и открытое отображение,
- в) если Y – топологическое пространство и отображение $f : Y \rightarrow X$ непрерывно, то для любого $i \in I$ отображение $f_i = \text{pr}_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ также непрерывно. Однако обратное, вообще говоря, неверно, привести пример.

4.32. Пусть $\mathbb{R}_0^\infty = \{(x_i)_{i=1,\infty} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, \infty}\}$ – произведение счётного семейства $\{\mathbb{R}_i = \mathbb{R}\}_{i=\overline{1,\infty}}$ вещественных прямых \mathbb{R}_{st} , наделённое ящичной топологией (см. задачу 4.31). Обозначим $A = \{x \in \mathbb{R}_0^\infty \mid \text{последовательность } x = (x_i)_{i=\overline{1,\infty}} \text{ ограничена}\}$. Доказать, что множество A одновременно открыто и замкнуто в \mathbb{R}_0^∞ .

5. ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВО И ФАКТОР-ТОПОЛОГИЯ

Определение 5.1. Отношением эквивалентности на множестве A называется подмножество $\mathcal{R} \subset A \times A$ такое, что:

$$\forall a \in A \quad (a, a) \in \mathcal{R} \quad (\text{рефлексивность}) \quad (5.1)$$

$$(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R} \quad (\text{симметричность}) \quad (5.2)$$

$$(a, b) \in \mathcal{R}, (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R} \quad (\text{транзитивность}) \quad (5.3)$$

Вместо $(a, b) \in \mathcal{R}$ часто пишут $a \equiv b \pmod{\mathcal{R}}$ или просто $a \sim b$.

Определение 5.2. Классом эквивалентности элемента $a \in A$ называется подмножество $[a]$ в A :

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}. \quad (5.4)$$

Для любых двух элементов $a, b \in A$ либо $[a] \cap [b] = \emptyset$, либо $[a] = [b]$. Таким образом,

$$A = \bigsqcup_{a \in A} [a], \quad (5.5)$$

то есть задание на множестве A отношения эквивалентности определяет разбиение (5.5) этого множества на попарно непересекающиеся подмножества. Верно и обратное: если $\{B_i\}_{i \in I}$ – семейство попарно непересекающихся непустых подмножеств множества A и $A = \bigsqcup_{i \in I} B_i$, то на A существует единственное отношение эквивалентности \mathcal{R} , классами которого являются множества $B_i, i \in I$.

Определение 5.3. Фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности \mathcal{R} называется множество классов эквивалентности элементов из A , которое обозначается

$$A/\mathcal{R} = \{[a] \mid a \in A\} \quad (5.6)$$

или просто A/\sim . Отображение

$$\pi : a \in A \rightarrow [a] \in A/\sim \quad (5.7)$$

называется канонической проекцией.

Определение 5.4. Пусть (X, τ) – топологическое пространство и \mathcal{R} – отношение эквивалентности на X . Наисильнейшая топология τ_0 на фактор-множестве X/\mathcal{R} , для которой каноническая проекция $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ непрерывна, называется фактор-топологией, а топологическое пространство $(X/\mathcal{R}, \tau_0)$ – фактор-пространством пространства X по отношению \mathcal{R} .

Множество $U \subset X/\mathcal{R}$ открыто в фактор-топологии тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U)$ открыто в X . Отображение $f : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ фактор-пространства X/\mathcal{R} в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $f \circ \pi : X \rightarrow Y$.

Пример 5.1. Пусть X — топологическое пространство, Y — подмножество в X . Разбиение $X = (\bigsqcup_{x \in X \setminus Y} \{x\}) \sqcup Y$ определяет отношение эквивалентности \mathcal{R} на X . Фактор-пространство X/\mathcal{R} в дальнейшем обозначается X/Y .

Пример 5.2. Конусом над топологическим пространством X называется фактор-пространство

$$(5.8) \quad CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}.$$

Пример 5.3. Надстройкой над топологическим пространством X называется фактор-пространство

$$\Sigma X = X \times [0, 1]/((X \times \{0\}) \sqcup (X \times \{1\})) \quad (5.9)$$

Задачи:

5.1. Докажем аксиому 1) определения $\Delta 1$ отношения эквивалентности: по аксиоме 2) $a \sim b$ влечет $b \sim a$, тогда по аксиоме 3) $a \sim a$. Верно ли это рассуждение?

5.2. Пусть \mathcal{R} — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Какими геометрическими свойствами обладает \mathcal{R} , если оно задаёт отношение эквивалентности на \mathbb{R}^2 ?

5.3. Будет ли данное подмножество $\mathcal{R} \subset A \times A$ отношением эквивалентности на множестве A :

- а) $A = [0, 1]$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- б) $A = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$,
- в) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x-1, x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$,
- г) $A \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = A \times A$.

5.4. Выяснить, какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности:

- а) $A = \mathbb{R}^n$, $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2|$,
- б) $A = \mathbb{R}^n$, $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2 + \dots + \lambda^k a_k$, где $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, k}$ — фиксированные векторы, $\lambda^i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$,
- в) $A = \mathbb{R}^n$, $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2 + \dots + \lambda^k a_k$, где $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, k}$ — фиксированные векторы, $\lambda^i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, k}$,

- г) $A = \mathbb{R}^n$; $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow$ скалярное произведение $\langle x_1, x_2 \rangle \geq 0$,
- д) A — произвольное множество, $f : A \rightarrow B$ — некоторое отображение; $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$,
- е) $A = \mathbb{R}^+$; $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = 2^m x_2$, $m \in \mathbb{Z}$,
- ж) (A, \leq) — некоторое частично упорядоченное множество (то есть выполняются аксиомы: 1) для любого $a \in A$ $a \leq a$, 2) $a \leq b$, $b \leq a$ тогда и только тогда, когда $a = b$, 3) $a \leq b$, $b \leq c$ влечет $a \leq c$, но не обязательно любые два элемента сравнимы); $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow a_1 \leq a_2$ или $a_2 \leq a_1$.

В тех случаях, когда \mathcal{R} есть отношение эквивалентности, описать фактор-множество A/\mathcal{R} .

5.5. Пусть $\mathcal{R}' \subset A \times A$ — некоторое подмножество. Показать, что существует единственное минимальное (по включению) отношение эквивалентности $\mathcal{R} \subset A \times A$ такое, что $\mathcal{R} \supset \mathcal{R}'$. Говорят, что \mathcal{R} — отношение эквивалентности, порожденное \mathcal{R}' .

5.6. Доказать, что фактор-пространства A/\sim в задаче 5.4 (а, б, в, е) гомеоморфны соответственно: а) \mathbb{R}_+^0 , б) \mathbb{R}^{n-k} , в) $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k$, где $\mathbb{T}^k = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ — k -мерный тор, е) \mathbb{S}^1 .

5.7. Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$ — подмножество. Пусть \mathcal{R} — отношение эквивалентности на X , порожденное множеством $\mathcal{R}' = Y \times Y \subset X \times X$ (см. задачу 5.5). Доказать, что тогда X/Y — фактор-пространство X по \mathcal{R} .

5.8. Доказать, что фактор-пространство $I^n/\partial I^n$ единичного куба $I^n = \{(t^1, \dots, t^n) \mid t^k \in [0, 1], k = \overline{1, n}\}$ по его границе $\partial I^n = \{(t^1, \dots, t^n) \in I^n \mid \exists k = \overline{1, n} : t^k = 1 \text{ или } t^k = 0\} \subset I^n$ гомеоморфно \mathbb{S}^n .

5.9. Доказать, что фактор-пространство $\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^n$ единичного шара $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ по $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{B}^n \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{B}^n$ гомеоморфно \mathbb{S}^n .

5.10. Доказать, что конус $C\mathbb{S}^{n-1}$ гомеоморфен \mathbb{B}^n .

5.11. Доказать, что:

- а) Надстройка $\Sigma\mathbb{S}^n$ гомеоморфна \mathbb{S}^{n+1} ,
- б) Надстройка $\Sigma\mathbb{B}^n$ гомеоморфна \mathbb{B}^{n+1} .

5.12. Пусть X, Y — топологические пространства, $A \subset X$ — подпространство, $f : A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Пусть \mathcal{R} — отношение эквивалентности на $X \sqcup Y$, порожденное множеством $\mathcal{R}' = \{(a, f(a)) \in (X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y) \mid a \in A\}$ (см. задачу 5.5). Фактор-пространство $(X \sqcup Y)/\mathcal{R}$ называется *пространством, полученным приклеиванием X к Y по f* и обозначается $X \cup_f Y$.

Букет $X \cup_{x_0} Y$ двух топологических пространств с отмеченными точками (X, x_0) и (Y, y_0) есть фактор-пространство $X \cup_f Y$, где $f(x_0) = y_0$. Доказать, что

- S^{n+1}/S^n гомеоморфно букету двух сфер S^{n+1} .
- Пусть Q_1, Q_2, Q_3 — три большие окружности на S^2 , плоскости которых взаимно перпендикулярны. Тогда $S^2/Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ гомеоморфно букету из восьми сфер.

5.13. Доказать, что S^3 гомеоморфно пространству, склеенному (см. задачу 5.12) из двух полноториев по некоторому гомеоморфизму тора.

5.14. Доказать, что S^n гомеоморфно пространству, полученному приклеиванием (см. задачу 5.12) шара B^n к точке $\{pt\}$ по отображению $f : S^{n-1} = \text{Fr } B^n \rightarrow \{pt\}$.

5.15. Введём на S^n отношение эквивалентности $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = \varepsilon x_2, \varepsilon = \pm 1$. Доказать, что S^n/\sim гомеоморфно проективному пространству \mathbb{RP}^n .

5.16. Введем на \mathbb{R}^n отношение эквивалентности:

$$(x^1, \dots, x^n) \sim (y^1, \dots, y^n) \Leftrightarrow x^1 = \varepsilon_1 y^1, \dots, x^n = \varepsilon_n y^n,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, n}$. Доказать, что фактор-пространство B^n/\sim гомеоморфно CB^{n-1} .

5.17. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывное отображение топологических пространств. Цилиндр отображения f — это топологическое пространство $\text{Cyl}(f)$, полученное приклеиванием (см. задачу 5.12) цилиндра $X \times [0, 1]$ к Y по отображению $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$. Конус отображения f — это топологическое пространство $\text{Con}(f)$, полученное приклеиванием конуса CX к Y по тому же отображению.

Пусть $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ — каноническая проекция (см. задачу 5.15). Доказать, что $\text{Con}(\pi)$ гомеоморфен \mathbb{RP}^{n+1} .

5.18. Отношение эквивалентности \mathcal{R} в топологическом пространстве X называется *открытым* (соответственно *замкнутым*), если для любого открытого (замкнутого) подмножества $A \subset X$ множество $\hat{A} = \{x \in X \mid \exists a \in A : x \sim a\}$ (*насыщение A по \mathcal{R}*) открыто (замкнуто). Доказать, что отношение эквивалентности открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда каноническая проекция $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ — открытое (замкнутое) отображение.

5.19. Пусть $X = \mathbb{R}^1 \setminus A$, где

$$A = \{\dots, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}.$$

Пусть \mathcal{R} — отношение эквивалентности на X , при котором классами эквивалентности являются $\{0\}$, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\{x, \frac{1}{x}\}, x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Доказать, что \mathcal{R} не открыто и не замкнуто.

6. АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 6.1. (Аксиома T1). Топологическое пространство X называется *достижимым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют окрестности $U(x), U(y)$ такие, что $y \notin U(x), x \notin U(y)$.

Определение 6.2. (Аксиома T2). Топологическое пространство X называется *отделенным* (или *хаусдорфовым*), если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют дизъюнктные окрестности $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Определение 6.3. Топологическое пространство называется *регулярным*, если оно достижимо и выполняется условие (аксиома T3): для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $B \subset X$, $x \notin B$ существуют дизъюнктные окрестности $U(x) \cap U(B) = \emptyset$.

Определение 6.4. Топологическое пространство называется *нормальным*, если оно достижимо и выполняется условие (аксиома T4): для любых двух замкнутых дизъюнктных множеств $B_1, B_2 \subset X, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ существуют дизъюнктные окрестности $U(B_1) \cap U(B_2) = \emptyset$.

Задачи:

6.1. Доказать, что топологическое пространство (X, τ) достижимо тогда и только тогда, когда:

- а) для любой точки $x \in X$ множество $\{x\}$ замкнуто,
- б) $\bigcap_{x \in V \in \tau} V = \{x\}$.

6.2. Доказать, что конечное достижимое пространство дискретно.

6.3. Доказать, что в достижимом пространстве X для любого подмножества $A \subset X$ выполняется включение $(A')' \subset A'$ (здесь A' — производное множество от A , см. задачу 2.28).

6.4. Будут ли достижимыми топологии на плоскости, для которых предбазы являются пучками прямых 1-го, 2-го родов соответственно (см. задачи 3.1, 3.2)?

6.5. Пусть X — бесконечное множество с топологией Зарисского (см. задачу 2.21). Доказать, что X достижимо, но не отделимо.

6.6. Доказать, что на каждом множестве M есть единственная наименьшая топология τ такая, что пространство (M, τ) достижимо.

6.7. Если X — достижимое пространство, то для любого подмножества $A \subset X$ производное множество A' (см. задачу 2.28) замкнуто. Доказать. (Указание: Воспользуйтесь результатом задачи 2.36).

6.8. Обозначим через O_x множество всех окрестностей точки x . Показать, что топологическое пространство X отделимо тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ выполняется равенство $\bigcap_{U \in O_x} \overline{U} = \{x\}$.

6.9. Показать, что топологическое пространство X отделимо тогда и только тогда, когда диагональ Δ (см. задачу 4.27) замкнута в $X \times X$.

6.10. Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения топологического пространства X в отделимое пространство Y . Показать, что множество $S = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X .

6.11. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — всюду плотное подмножество и Y — хаусдорфово топологическое пространство. Тогда, если $f, g : X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения и для любой точки $x \in A$ выполняется равенство $f(x) = g(x)$, то f совпадает с g . Доказать.

6.12. Пусть

$$X = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$$

есть подмножество множества вещественных чисел \mathbb{R} . Топология τ в X определяется так: множества, не содержащие 1, открыты в X , если они — следы на X открытых множеств из \mathbb{R} со стандартной топологией, а множества, содержащие 1, открыты в X , если они — дополнения конечных множеств в X . Доказать, что

- а) τ — топология на X ,
- б) (X, τ) — достижимое пространство,
- в) (X, τ) не отделимо. (Указание: Покажите, что точки 0 и 1 не отделимы).

6.13. Дать определение предела последовательности в топологическом пространстве X и доказать, что если X отделимо, то всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

6.14. Верно ли, что фактор-пространство хаусдорфова пространства хаусдорфово?

6.15. Показать, что если Y — отделимое топологическое пространство, то для любого непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ замкнут в $X \times Y$.

6.16. Показать, что топологическое пространство X отделимо тогда и только тогда, когда для любых двух различных точек $x_1 \neq x_2$ существуют хаусдорфово пространство Y и непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ такие, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

6.17. Пусть X — отделимое пространство, \mathcal{R} — отношение эквивалентности на X , $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ — каноническая проекция и $f : X/\mathcal{R} \rightarrow X$ — непрерывное отображение такое, что $\pi \circ f = \text{id}_{X/\mathcal{R}}$. Показать, что X/\mathcal{R} отделимо и $f(X/\mathcal{R})$ замкнуто в X .

6.18. Доказать, что отделимое топологическое пространство X регулярно тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U(x)$ существует такая окрестность $V(x)$, что $\overline{V(x)} \subset U(x)$ (Критерий регулярности).

6.19. На множестве $X = \{a, b, c, d\}$ задать топологию так, чтобы

- выполнялась аксиома Т3, но не выполнялась Т2,
- выполнялась аксиома Т4, но не выполнялась Т3.

6.20. Пусть $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. База β топологии τ на множестве X задаётся так: $\beta = \{(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, 1], [0, \alpha_2) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)\}$. Доказать, что τ — отделимая, но не регулярная топология. (Указание: Показать, что точка 0 и множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ не отделимы в X).

6.21. Для произвольного множества A обозначим O_A — множество всех окрестностей множества A . Доказать, что отделимое пространство X будет регулярно тогда и только тогда, когда для всякого замкнутого множества $A \subset X$ $\bigcap_{U \in O_A} \overline{U} = A$.

6.22. Доказать, что отделимое топологическое пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества $B \subset X$ и любой окрестности $U(B)$ существует такая окрестность $V(B)$, что $\overline{V(B)} \subset U(B)$ (Критерий нормальности).

6.23. Пусть X — нормальное пространство, а $Y \subset X$ — замкнутое подмножество. Доказать, что подпространство Y нормально.

6.24. Пусть Y — подпространство топологического пространства X . Верно ли, что

- если X отделимо, то и Y отделимо,
- если X регулярно, то и Y регулярно,
- * если X нормально, то и Y нормально?

6.25. Если для любой точки x топологического пространства X существует окрестность $U(x)$ такая, что подпространство $\overline{U(x)}$ отделимо (соответственно регулярно), то и всё пространство X отделимо (регулярно). Доказать.

6.26. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — семейство топологических пространств, а $X = \prod_{i \in I} X_i$ их произведение. Верно ли, что

- если $\forall i \in I$ X_i отделимо, то и X отделимо,
- если $\forall i \in I$ X_i регулярно, то и X регулярно,
- если $\forall i \in I$ X_i нормально, то и X нормально?

6.27. Показать, что прямая Зоргенфрея (см. задачу 3.7) а) регулярна, б) нормальна.

6.28. На множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2 , причём τ_1 сильнее τ_2 ($\tau_1 \supset \tau_2$). Можно ли утверждать, что

- если (X, τ_1) удовлетворяет аксиоме Т3 (соответственно аксиоме Т4), то то же самое верно и для (X, τ_2) ,
- если (X, τ_2) удовлетворяет аксиоме Т3 (соответственно аксиоме Т4), то то же самое верно и для (X, τ_1) ?

В случае отрицательного ответа привести примеры.

7. СВЯЗНОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 7.1. Топологическое пространство (X, τ) называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух открытых непустых дизъюнктных множеств. Подмножество A произвольного топологического пространства называется *связным множеством*, если подпространство A связно.

Пример 7.1. На вещественной прямой \mathbb{R}_{st} со стандартной топологией всякое связное множество является конечным или бесконечным промежутком $((\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta], (\alpha, \infty), [\alpha, \infty), (-\infty, \beta), (-\infty, \beta], (-\infty, \infty), \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Определение 7.2. Непрерывный путь в топологическом пространстве (X, τ) есть непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow X$, где $[0, 1]$ — сегмент из пространства вещественных чисел \mathbb{R}_{st} . Точки $f(0)$ и $f(1)$ называются соответственно началом и концом пути f , а множество $f([0, 1]) \subset X$ — траекторией пути f .

Определение 7.3. Топологическое пространство (X, τ) называется линейно связным, если $\forall x, y \in X$ существует непрерывный путь с началом в x и концом в y . Подмножество A произвольного топологического пространства называется линейно связным множеством, если подпространство A линейно связано.

Всякое линейно связное пространство связно. Обратное, вообще говоря, не верно. Однако на вещественной прямой \mathbb{R}_{st} любое связное множество, то есть промежуток, линейно связано.

Определение 7.4. Связной (линейно связной, соответственно) компонентой точки топологического пространства X называют наибольшее (по включению) связное (соответственно, линейно связное) множество в X , содержащее эту точку. Связными (линейно связными, соответственно) компонентами множества $A \subset X$ называют связные (соответственно, линейно связные) компоненты точек подпространства A .

Связная компонента любой точки топологического пространства X есть замкнутое множество.

Задачи:

7.1. Может ли дискретное топологическое пространство быть связным?

7.2. Может ли антидискретное топологическое пространство быть несвязным?

7.3. Доказать, что бесконечное множество с топологией Зарисского (см. задачу 2.21) связно.

7.4. Какие буквы русского и латинского алфавитов несвязны?

7.5. Указать, какие кривые второго порядка в \mathbb{R}_{st}^2 и поверхности второго порядка в \mathbb{R}_{st}^3 связны, а какие несвязны.

7.6. Доказать, что n -мерная сфера связна.

7.7. Доказать, что n -мерное проективное пространство связно.

7.8. Доказать, что конус и надстройка над связным топологическим пространством являются связными топологическими пространствами.

7.9. Описать компоненты линейной связности следующих множеств матриц, рассматриваемых как подпространства в $\mathbb{R}_{st}^{n^2}$:

$$GL(n) = \{(a_j^i) \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det(a_j^i) \neq 0\}, \quad (7.1)$$

$$SL(n) = \{(a_j^i) \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det(a_j^i) = 1\} \quad (7.2)$$

$$O(n) = \{(a_j^i) \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \sum_{s=1}^n a_i^s a_j^s = \delta_{ij}\}, \quad (7.3)$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n). \quad (7.4)$$

7.10.* Построить разложение пространства $C(\mathbb{R})$ (см. задачу 3.9) на компоненты связности.

7.11. Пусть $C = \{(\frac{t}{t+1} \cos t, \frac{t}{t+1} \sin t) \mid t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Будет ли замыкание \bar{C} в \mathbb{R}_{st}^2 а) связным, б) линейно связным?

7.12. Топологическое пространство X представляет собой подмножество плоскости \mathbb{R}_{st}^2 , наделённое индуцированной топологией. Найти компоненту связности точки A с координатами $(0, 1)$, если:

a) $X = \{A\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]) \right)$,

б) $X = \{A\} \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]) \right)$.

7.13. Доказать, что топологическое пространство несвязно тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение

этого пространства на дискретное пространство, состоящее из двух точек.

7.14. Можно ли непрерывно отобразить несвязное топологическое пространство на связное?

7.15. Пусть A — связное, а B — произвольное подмножества топологического пространства. Доказать, что если $A \cap B \neq \emptyset$ и $A \cap B^c \neq \emptyset$, то $A \cap \text{Fr } B \neq \emptyset$.

7.16. Пусть X — несвязное, а Y — непустое топологические пространства. Доказать, что произведение $X \times Y$ несвязно.

7.17.* Пусть X, Y — связные топологические пространства. Доказать, что $X \times Y$ также связно.

7.18.* Пусть \mathbb{R}_0^∞ — пространство числовых последовательностей, наделенное яичной топологией (см. задачу 4.31). Найти компоненту связности точки $x = (x_i)_{i=1,\infty} \in \mathbb{R}_0^\infty$.

7.19. Если A, B — связные подмножества в топологическом пространстве X , будут ли всегда связными множества:

а) $A \cup B$, б) $A \cap B$, в) $A \setminus B$, г) A^c , д) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

7.20. Доказать, что промежутки $[\alpha, \beta], [\gamma, \delta], (\varepsilon, \mu)$ на \mathbb{R}_{st} попарно не гомеоморфны.

7.21. Показать, что окружность $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, наделённая индуцированной топологией плоскости \mathbb{R}_{st}^2 , не гомеоморфна никакому подпространству вещественной прямой \mathbb{R}_{st} .

7.22. Доказать, что прямая \mathbb{R}_{st} не гомеоморфна плоскости \mathbb{R}_{st}^2 .

7.23. Если $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение линейно связного пространства X в топологическое пространство Y , то множество $f(X)$ — линейно связно. Доказать.

7.24. Доказать, что всякий промежуток $[\alpha, \beta], [\gamma, \delta], (\gamma, \delta], (\varepsilon, \mu)$ в \mathbb{R}_{st} является линейно связным множеством.

7.25. Доказать, что если X, Y — линейно связные топологические пространства, то $X \times Y$ — также линейно связно.

7.26. Доказать, что траектория непрерывного пути есть линейно связное множество.

7.27. Доказать, что если M и N — связные подмножества в топологическом пространстве X и $M \cap \bar{N} \neq \emptyset$, то $M \cup N$ связно.

7.28. Доказать, что если M, N — замкнутые подмножества в топологическом пространстве X , $M \cup N$ и $M \cap N$ связны, то M и N также связны.

7.29. Покажите, что плоскость Немыцкого (см. задачу 3.8) линейно связна.

7.30. Пусть C — линейно связное множество. Верно ли, что множество \bar{C} тоже линейно связно?

7.31. Пусть любая точка топологического пространства имеет линейно связную окрестность. Покажите, что тогда любая линейно связная компонента пространства одновременно открыта и замкнута и совпадает со связной компонентой пространства.

7.32. Подмножество A топологического пространства X называется *вполне несвязным*, если любая компонента связности этого множества состоит из одной точки. Доказать, что:

- на вещественной прямой \mathbb{R}_{st} множества рациональных \mathbb{Q} и иррациональных \mathbb{J} чисел вполне несвязны,
- прямая Зоргенфрея (см. задачу 3.7) вполне несвязна.

7.33. Пусть X — топологическое пространство. Скажем, что точка $x_1 \in X$ эквивалентна точке $x_2 \in X$ ($x_1 \sim x_2$), если x_1 принадлежит компоненте связности точки x_2 . Доказать, что это действительно отношение эквивалентности и факторпространство X/\sim вполне несвязно.

8. КОМПАКТНЫЕ И ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 8.1. Семейство подмножеств $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ множества X называется *покрытием подмножества* $N \subset X$, если $\bigcup_{i \in I} U_i \supset N$. Семейство подмножеств $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ называется *подпокрытием покрытия* \mathcal{U} , если $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и \mathcal{V} — покрытие множества N . Покрытие называется *конечным*, если число его элементов конечно. Если (X, τ) — топологическое пространство, то

покрытие называется *открытым*, если его элементы — открытые множества.

Определение 8.2. Топологическое пространство (X, τ) называется *компактным*, если для любого открытого покрытия $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ этого пространства $(\bigcup_{i \in I} U_i = X)$ существует конечное подпокрытие $\mathcal{B} = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$ ($\bigcup_{m=1}^k U_{i_m} = X$). Компактное и отделимое топологическое пространство называется *компактом*. Подмножество N топологического пространства называется *компактным* (соответственно, *компактом*), если таковым является топологическое подпространство N .

Свойства компактных подмножеств топологического пространства (X, τ) :

- 1) Объединение конечного числа компактных множеств компактно.
- 2) Множество, состоящее из конечного числа точек, компактно.
- 3) Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.
- 4) Если X — отделимо и N — компактное подмножество в X , то N замкнуто в X .
- 5) Если X — компакт, то подмножество $N \subset X$ будет компактом тогда и только тогда, когда N замкнуто в X .
- 6) Всякий компакт нормален.

Пример 8.1. В пространстве \mathbb{R}^n со стандартной топологией, определяемой евклидовой метрикой, подмножество $N \subset \mathbb{R}^n$ будет компактом тогда и только тогда, когда N замкнуто и *ограничено* (существует шар $B(0, r) \supset N$).

Свойства непрерывных отображений компактных множеств:

- 1) Если $f : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств и N — компактное подмножество в X , то $f(N)$ — компактно.
- 2) Если непрерывное отображение компактного пространства в отделимое пространство биективно, то это отображение есть гомеоморфизм.

- 3) Произведение компактных топологических пространств, наделенное топологией Тихонова, компактно (теорема Тихонова).

Определение 8.3. Топологическое пространство (X, τ) называется *локально компактным*, если X отделимо и для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$ такая, что $\overline{U(x)}$ — компактно. Подмножество N топологического пространства называется *локально компактным множеством*, если N , наделенное индуцированной топологией, локально компактно.

Пример 8.2. Пространство \mathbb{R}^n со стандартной топологией локально компактно.

Пример 8.3. Открытое подмножество компакта является локально компактным.

Задачи:

- 8.1. Доказать, что дискретное топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно конечно.
- 8.2. Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любое покрытие этого пространства элементами некоторой базы содержит конечное подпокрытие. Доказать.
- 8.3. Доказать, что в регулярном пространстве два дизъюнктных замкнутых множества, одно из которых компактно, имеют дизъюнктные окрестности.
- 8.4. Доказать, что если K — компакт, а F — замкнутое подмножество топологического пространства, то $F \cap K$ — компакт.
- 8.5. Построить пример метрического пространства, в котором замкнутое и ограниченное множество некомпактно.
- 8.6. Пусть A — подмножество в множестве рациональных чисел \mathbb{Q} , наделенном топологией, индуцированной из \mathbb{R}_{st} . Доказать, что если $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, то A некомпактно.
- 8.7. Доказать, что в $C^0[a, b]$ (см. задачу 1.16) любой замкнутый шар ненулевого радиуса некомпактен.

8.8. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек в (X, τ) и $x_n \rightarrow x_0$ (см. задачу 6.13). Доказать, что множество $\{x_1, x_2, \dots\} \cup \{x_0\}$ компактно.

8.9. Пусть $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ — семейство компактных топологических пространств, $X = \prod_{i \in I} X_i$ — произведение множеств $\{X_i\}_{i \in I}$, наделённое ящичной топологией τ (см. задачу 4.31). Привести пример, когда (X, τ) некомпактно.

8.10. Семейство подмножеств $\{B_i\}_{i \in I}$ топологического пространства X называется *центрированной системой множеств*, если любое конечное подсемейство $\{B_{i_k}\}_{k=1, n}$, $n \in \mathbb{N}$ имеет непустое пересечение: $\bigcap_{k=1}^n B_{i_k} \neq \emptyset$. Доказать, что X компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$.

8.11. Пусть X — компактное пространство, $\{B_i\}_{i \in I}$ — семейство замкнутых множеств, U — открытое множество в X . Доказать, что если $\bigcap_{i \in I} B_i \subset U$, то найдется конечное подсемейство $\{B_{i_k}\}_{k=1, n}$ такое, что $\bigcap_{k=1}^n B_{i_k} \subset U$.

8.12. Пусть (X, τ) — бесконечное топологическое пространство с топологией Зарисского (см. задачу 2.21). Доказать, что:

- X компактно,
- всякое подмножество в X компактно,
- всякое бесконечное подмножество всюду плотно в X .

8.13. Пусть X — бесконечное множество, $\tau = \{U \subset X \mid$ либо $U = \emptyset$, либо U^c не более чем счётно $\}$. Проверить, что τ — топология на X более сильная, чем топология Зарисского, и доказать, что (X, τ) не компактно.

8.14. Какие из следующих топологических пространств компактны:

- n -мерная сфера S^n ,
- вещественное n -мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$,
- n -мерный тор $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$,

г) цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$,
д) лист Мёбиуса,
е) бутылка Клейна?

8.15. Перечислить компактные кривые и поверхности второго порядка.

8.16.* Привести пример топологического пространства (X, τ) и компактного множества A в нём, замыкание \bar{A} которого некомпактно.

8.17.* Привести пример топологического пространства (X, τ) , в котором существуют компактные множества A, B , пересечение которых некомпактно.

8.18. Доказать, что пересечение любого семейства компактных замкнутых множеств компактно.

8.19. Пусть X — топологическое пространство, в котором выполняется аксиома отделимости Т3. Тогда для любого компактного множества $A \subset X$ замыкание \bar{A} компактно. Доказать.

8.20. Пусть $X = \prod_{i \in I} I_i$ — произведение, наделённое топологией Тихонова, где $I = [0, 1]$ и $\forall i \in I \quad I_i = [0, 1]$ — подпространство в \mathbb{R}_{st} . Пространство Хелли $H \subset X$ состоит из таких точек $x = (x_i)_{i \in I}$, что $\forall i, j \in I \quad i > j \Rightarrow x_i \geq x_j$. Показать, что подпространство H есть компакт.

8.21. Если топологические пространства X, Y локально компактны, то произведение $X \times Y$ также локально компактно. Доказать.

8.22. Доказать, что всякое замкнутое множество в локально компактном пространстве локально компактно.

8.23. Доказать, что отдельное топологическое пространство X локально компактно тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ найдутся окрестность $U(x)$ и компактное множество K такие, что $U \subset K$.

8.24. Пусть $X = \mathbb{R}_{st}$, \mathbb{Z} — подмножество всех целых чисел. Показать, что фактор-пространство X/\mathbb{Z} (см. пример 5.1) отдельно, но не локально компактно.

9. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Определение 9.1. *Топологическое многообразие размерности n есть топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в \mathbb{R}_{st}^n .*

Классификационная теорема для двумерных замкнутых поверхностей. *Обозначим через M_g сферу с g ручками, а через N_g — сферу с g вклеенными листами Мёбиуса. Тогда любое хаусдорфово компактное связное двумерное многообразие, называемое замкнутой поверхностью, гомеоморфно M_g или N_g .*

Определение 9.2. Пусть Q — многоугольник на плоскости \mathbb{R}_{st}^2 , M — топологическое двумерное многообразие, $\varphi : Q \rightarrow Q' = \varphi(Q) \subset M$ — гомеоморфизм на свой образ. Тогда Q' называется **многоугольником на M** , образы вершин Q называются **вершинами многоугольника Q'** , образы сторон Q называются **ребрами многоугольника Q'** .

Определение 9.3. *Триангуляцией двумерного многообразия M называется конечный набор треугольников $\{\Delta_i\}_{i=1,n}$ на M такой, что:*

- 1) $M = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$,
- 2) для любых $i \neq j$ треугольники Δ_i и Δ_j пересекаются по вершине или ребру или не пересекаются.

Определение 9.4. *Развёртка двумерного многообразия* — это пара, состоящая из конечного набора $\{Q_i\}_{i=1,n}$ многоугольников на плоскости и конечного набора склеивающих гомеоморфизмов $\{\varphi_{\alpha,\beta}\}$ пар сторон этих многоугольников, причём каждая сторона склеивается с одной и только одной стороной (возможна склейка сторон одного многоугольника).

Пример 9.1. Пусть Q — прямоугольник $ABCD$ на плоскости, φ — гомеоморфизм, склеивающий сторону AB со стороной CD , ψ — гомеоморфизм, склеивающий стороны BC и AD . Тогда $(\{Q\}, \{\varphi, \psi\})$ — развёртка.

Определение 9.5. Пусть M — двумерное топологическое многообразие. Говорят, что развёртка $(\{Q_i\}, \{\varphi_{\alpha\beta}\})$ является развёрткой M , если существуют гомеоморфизмы $f_i : Q_i \rightarrow Q'_i \subset M$ такие, что имеют место композиции $f_j = f_i \circ \varphi_{\alpha\beta}$ (там, где они определены), и топологические многоугольники Q'_i удовлетворяют требованиям:

$$1) \quad \bigcup Q'_i = M,$$

$$2) \text{ для любых } i \neq j \text{ верно } Q'_i \cap Q'_j = \emptyset.$$

Любая развёртка является развёрткой некоторого топологического многообразия, полученного склейкой этой развёртки по склеивающим гомеоморфизмам. Обратно, по триангуляции компактного связного топологического многообразия строится его развёртка.

Пример 9.2. При склеивании развёртки, описанной в предыдущем примере, получаются (в зависимости от того, сохраняют ли гомеоморфизмы φ и ψ ориентацию) тор, бутылка Клейна, проективная плоскость.

Если набор многоугольников развёртки состоит из единственного многоугольника Q , то склеивающие гомеоморфизмы описываются с помощью слова $\omega(Q)$, состоящего из букв, обозначающих стороны Q , в степенях ± 1 , в зависимости от сохранения или несохранения ориентации при склейке.

Пример 9.3. Для тора $\omega(Q) = aba^{-1}b^{-1}$, для бутылки Клейна $\omega(Q) = aba^{-1}b$.

Если Q — многоугольник и $\omega(Q) = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ ($\omega(Q) = a_1a_1 \dots a_ga_g$ соответственно), то развёртка называется **канонической I (соответственно II) рода** и соответствует двумерному многообразию $M_g(N_g)$. (Сфере S^2 соответствует двугранник Q и развёртка $\omega(Q) = aa^{-1}$).

Определение 9.6. *Эйлеровой характеристикой триангулируемого многообразия M называется число $\chi(M) = B - P + G$, где B — число вершин, P — число рёбер, G — число граней (треугольников) триангуляции.*

Задачи:

9.1. Какие кривые и поверхности второго порядка являются топологическими многообразиями?

9.2. Какие из следующих топологических пространств являются топологическими многообразиями: а) \mathbb{R}_{st}^n , б) \mathbb{RP}^n , в) \mathbb{S}^n , г) $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, д) поверхность тетраэдра в \mathbb{R}_{st}^3 , е) букет сфер \mathbb{S}^n и \mathbb{S}^m (см. задачу 5.13), ж) $C^0[a, b]$ (см. задачу 1.16), з) \mathbb{Z} ?

9.3. Пусть X, Y — топологические многообразия. Будут ли топологическими многообразиями: а) CX , б) ΣX , в) $X \times [0, 1]$, г) $X \cup_f Y$, где f — непрерывное отображение $A \subset X$ в Y , д) $X \times Y$, е) букет $X_{x_0} \vee_{y_0} Y$?

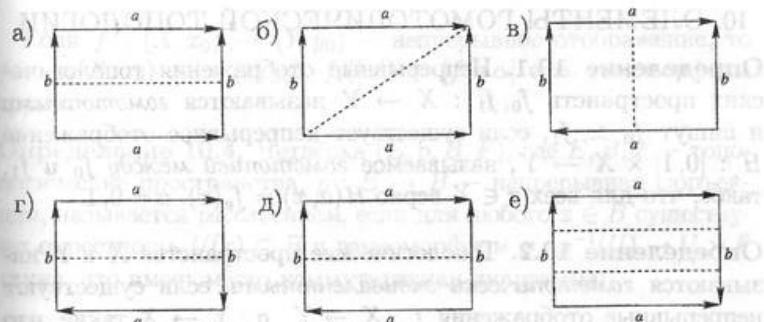
9.4. Какие из следующих топологических многообразий триангулируемы: а) \mathbb{R}^2 , б) \mathbb{RP}^2 , в) \mathbb{S}^2 , г) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, д) $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, е) $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$? Привести пример триангуляции тех топологических многообразий, для которых она существует, и вычислить эйлерову характеристику.

9.5. Какие поверхности соответствуют развёрткам $(Q, \omega(Q))$, где:

- а) $\omega(Q) = abacb^{-1}c^{-1}$,
- б) $\omega(Q) = aba^{-1}dccbd$,
- в) $\omega(Q) = abcddcba$,
- г) $\omega(Q) = abbcac^{-1}dd$,
- д) $\omega(Q) = ab^{-1}c^{-1}bcadede$,
- е) $\omega(Q) = abc^{-1}d^{-1}cda^{-1}b^{-1}$.

Найти их эйлеровы характеристики.

9.6. Какие топологические многообразия получаются при склейке следующих развёрток? Описать линии на этих многообразиях, в которые переходят штриховые линии на развёртке. Что получится при разрезании многообразий по этим линиям?



9.7. Существуют ли нехаусдорфовы топологические многообразия?

9.8. Доказать, что топологическое многообразие связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

9.9. Существуют ли связные топологические многообразия, не удовлетворяющие:

- а) первой аксиоме счётности, б) второй аксиоме счётности?

9.10. Ввести на множестве прямых на плоскости структуру топологического многообразия, гомеоморфного листу Мёбиуса.

9.11. Описать трёхмерные топологические многообразия, полученные склейкой граней трёхмерного куба:

- а) все грани склеиваются с противоположными с помощью параллельных переносов,
- б)* одна грань склеивается с противоположной с помощью параллельного переноса и поворота на угол π , остальные грани склеиваются с противоположными с помощью параллельных переносов.

9.12.* Найти триангуляции топологических многообразий M_g и N_g , состоящие из минимального числа треугольников.

9.13.* Перечислить поверхности второго порядка в трёхмерном проективном пространстве, которые являются топологическими многообразиями, указать, каким многообразиям M_g или N_g они гомеоморфны, и вычислить эйлеровы характеристики.

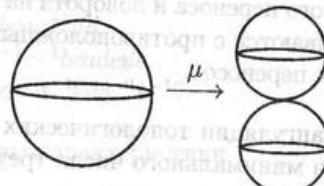
10. ЭЛЕМЕНТЫ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Определение 10.1. Непрерывные отображения топологических пространств $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ называются *гомотопными* и пишут $f_0 \simeq f_1$, если существует непрерывное отображение $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, называемое *гомотопией между f_0 и f_1* , такое, что для всех $x \in X$ верно $H(a, x) = f_a(x)$, $a = 0, 1$.

Определение 10.2. Топологические пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ такие, что $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$.

Определение 10.3. Пусть $A \subset X$ — подмножество в топологическом пространстве. Непрерывное отображение $\rho : X \rightarrow A$ такое, что $\rho \circ i = \text{id}_A$, где $i : A \rightarrow X$ — включение, называется *ретракцией X на A* , а само A называется *ретрактом* пространства X . Ретракция ρ называется *деформационной*, если $i \circ \rho \simeq \text{id}_X$, при этом A называется *деформационным ретрактом* пространства X .

На множестве $\pi_q(X, x_0)$ гомотопических классов непрерывных отображений сферы с отмеченной точкой (\mathbb{S}^q, s_0) в топологическое пространство с отмеченной точкой (X, x_0) (гомотопии сохраняют отмеченные точки) вводится операция умножения $[\alpha] \cdot [\beta] = [(\alpha \vee \beta) \circ \mu]$, где $\mu : \mathbb{S}^q \rightarrow \mathbb{S}^q \vee \mathbb{S}^q = \mathbb{S}^q / \mathbb{S}^{q-1}$ — каноническая проекция на фактор сферы по экватору, проходящему через s_0 (см. задачу 5.12).



Относительно этого умножения $\pi_q(X, x_0)$ является группой, называемой *q-мерной гомотопической группой* топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 .

Если $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ — непрерывное отображение, то $f_* : \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_q(Y, y_0)$, $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ есть гомоморфизм групп.

Определение 10.4. Четвёрка (E, p, B, F) , где E, B, F — топологические пространства, $p : E \rightarrow B$ — непрерывная сюръекция, называется *расслоением*, если для любого $x \in B$ существуют окрестность $U(x) \subset B$ и гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U(x)) \rightarrow U(x) \times F$ такие, что имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U(x)) & \xrightarrow{\varphi} & U(x) \times F \\ p \downarrow & \nearrow \text{pr}_1 & \\ U(x) & & \end{array}$$

При этом E называется *тотальным пространством*, B — *базой*, p — *проекцией*, F — *типовым слоем расслоения*. Если F дискретно, то расслоение называется *накрытием*.

Пусть $i : (F, f_0) \rightarrow (E, e_0)$ — вложение слоя в тотальное пространство, $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ — проекция. Имеет место точная последовательность групп и гомоморфизмов:

$$0 \leftarrow \pi_0(B, b_0) \xleftarrow{p_*} \pi_0(E, e_0) \xleftarrow{i_*} \pi_0(F, f_0) \leftarrow \pi_1(B, b_0) \xleftarrow{p_*} \pi_1(E, e_0) \xleftarrow{i_*} \pi_1(F, f_0) \leftarrow \pi_2(B, b_0) \xleftarrow{p_*} \pi_2(E, e_0) \xleftarrow{i_*} \pi_2(F, f_0) \dots,$$

называемая *точной гомотопической последовательностью расслоения*.

Определение 10.5. Коцепной комплекс C есть последовательность векторных пространств C^k и линейных операторов $\delta^k : C^k \rightarrow C^{k+1}$, где $k \in \mathbb{Z}$, такая, что для любого k выполняется равенство $\delta^{k+1} \delta^k = 0$.

Пространством когомологий комплекса C размерности k называется фактор-пространство

$$H^k(C) = \frac{\ker \delta^k : C^k \rightarrow C^{k+1}}{\text{im } \delta^{k-1} : C^{k-1} \rightarrow C^k} \quad (10.1)$$

Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ — конечное открытое покрытие пространства X . Назовем набор индексов $i = (i_0 i_1 \dots i_k)$ допустимым, если $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$. Число k назовем длиной набора i . Множество допустимых наборов длины k обозначим через $N_k(\mathcal{U})$. Коцепью Чеха размерности k называется набор вещественных чисел $\{c_{i_0 i_1 \dots i_k}\}$, где $(i_0 i_1 \dots i_k)$ пробегает множество $N_k(\mathcal{U})$, такой, что $c_{i_0 i_1 \dots i_k}$ меняет знак при перестановке любых двух индексов. Множество всех коцепей длины k образует векторное пространство $\check{C}^k(\mathcal{U})$ относительно покомпонентного сложения наборов и умножения набора на число. Определим линейный оператор $\delta^k : \check{C}^k(\mathcal{U}) \rightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} \delta^k(\{c_i\})_{i_0 i_1 \dots i_k i_{k+1}} &= c_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} - c_{i_0 i_2 \dots i_k i_{k+1}} + \\ &+ c_{i_0 i_1 \dots i_k i_{k+1}} + \dots + (-1)^{k+1} c_{i_0 i_1 \dots i_k}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Определение 10.6. Последовательность векторных пространств $\check{C}^k(\mathcal{U})$ и линейных операторов δ^k называется комплексом Чеха покрытия \mathcal{U} . Когомологии комплекса $(\check{C}^k(\mathcal{U}), \delta^k)$ называются когомологиями Чеха покрытия \mathcal{U} .

Назовем покрытие *хорошим*, если любое непустое пересечение элементов покрытия гомотопически эквивалентно точке. Имеет место теорема, утверждающая, что когомологии Чеха любых двух хороших покрытий изоморфны. Когомологиями Чеха топологического пространства X , допускающего хорошее покрытие, называются когомологии Чеха этого покрытия.

Задачи:

10.1. Гомотопны ли следующие отображения:

- а) $f_0, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \sin x$, $f_1(x) = e^x$;
- б) $f_0, f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_0(x) = -x^2 - 1$, $f_1(x) = e^x$;
- в) $f_0, f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{1}{x}$, $f_1(x) = |x|$;
- г) $f_0, f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_0(x) = \frac{1}{x}$, $f_1(x) = \frac{1}{|x|}$;
- д) $f_0, f_1 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f_0(x) = x$, $f_1(x) = \frac{x}{|x|}$;
- е) $f_0, f_1 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f_0(z) = z^2$, $f_1(z) = z^3$;

- ж) $f_0, f_1 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $f_0(x) = [x]$ — каноническая проекция (см. задачу 5.16), $f_1(x) = y_0$ — постоянное отображение;
- з) $f_0, f_1 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $f_0(x) = x$ — включение, $f_1(x) = x_0$ — постоянное отображение?

10.2. Являются ли следующие топологические пространства гомотопически эквивалентными:

- а) \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m , $n \neq m$, б) $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ и $\bigvee_{i=1}^m \mathbb{S}^{n-1}$, в) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и \mathbb{R}^n , г) $\mathbb{R}^n \times X$ и X , где X — произвольное топологическое пространство, д) \mathbb{B}^n и \mathbb{S}^{n-1} , е) \mathbb{S}^n и $\mathbb{R}P^n$, ж) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $n \neq m$, з) замкнутые поверхности M_{g_1} и M_{g_2} , $g_1 \neq g_2$, и) тор, меридиан которого заклеен диском, и букет сферы и окружности, к) тор и бутылка Клейна, л) цилиндр и лист Мёбиуса, м) проективная плоскость без точки и окружность, н) тор без точки и букет двух окружностей, о) сфера с g ручками, проколотая в n точках, и букет $2g + n - 1$ окружностей, п) сфера с g вклеенными листами Мёбиуса, проколотая в n точках, и букет $g + n - 1$ окружностей, р) тор с дисками, натянутыми на меридиан и параллель, и двумерная сфера?

10.3. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность.

- а) Доказать, что f индуцирует биекцию множеств компонент линейной связности $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ и множеств компонент связности $\pi'_0(X) \rightarrow \pi'_0(Y)$.
- б) Доказать, что X связно (линейно связно) тогда и только тогда, когда Y связно (соответственно линейно связно).
- в) Сохраняется ли свойство компактности при гомотопической эквивалентности?

10.4. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — полиномиальное отображение, $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, причём $0 \notin f(\mathbb{S}^1)$. Доказать, что:

- а) \tilde{f} гомотопно $\varphi_k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, где \tilde{f} — ограничение f на $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, и $\varphi_k(z) = z^k$, где k — число корней многочлена $f(z)$ внутри круга, ограниченного единичной окружностью \mathbb{S}^1 ,
- б) уравнение $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ имеет хотя бы один корень и, следовательно, ровно n корней (это утверждение часто называют основной теоремой алгебры).

10.5. Классифицировать с точностью до гомотопической эквивалентности: а) кривые и поверхности второго порядка, б) буквы русского алфавита, в) цифры $0, \dots, 9$.

10.6. Доказать, что для любого топологического пространства X :

- а) конус CX гомотопически эквивалентен точке,
- б) цилиндр $X \times [0, 1]$ гомотопически эквивалентен X .

Будут ли эти утверждения верными, если конус и цилиндр заменить надстройкой?

10.7. Пусть $X = X_1 \times X_2, Y = Y_1 \times Y_2$. Доказать, что если X_1 и Y_1, X_2 и Y_2 гомотопически эквивалентны, то X и Y гомотопически эквивалентны. Будет ли верно обратное?

10.8. Какие из следующих подпространств $A \subset X$ будут retractами (деформационными retractами): а) $X = \mathbb{R}^n, A = \{x_0\}, x_0 \in X$, б) $X = \mathbb{S}^n, A = \{x_0\}, x_0 \in X$, в) $X = \mathbb{B}^n, A = \mathbb{S}^{n-1} \subset X$, г) $X = Y \times [0, 1], A = Y \times \{0\}$, д) $X = Y \times \mathbb{S}^1, A = Y \times \{s_0\}, s_0 \in \mathbb{S}^1$, е) X — лист Мёбиуса, A — центральная окружность листа Мёбиуса?

10.9. Какие из следующих отображений будут задавать расслоения:

- а) $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m (n \geq m), p(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$,
- б) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, p(t) = e^{2\pi it}$,
- в) $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ — каноническая проекция (см. задачу 5.15),
- г) $p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, p(x) = \frac{x}{|x|}$,
- д) $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, p(z) = z^m$,
- е) $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, p(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 - z^2)$,
- ж) $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{CP}^1, p(z^1, z^2) = [z^1 : z^2]$, где $\mathbb{S}^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\}$?

Если отображение p задает расслоение, то указать totальное пространство, базу и типовой слой этого расслоения.

10.10. Найти гомотопические группы следующих топологических пространств: а) \mathbb{R}_{st}^n , б) \mathbb{S}^1 , в) n -мерного тора \mathbb{T}^n , г) листа Мёбиуса, д) бутылки Клейна, е) замкнутой поверхности $M_g, g \geq 1$, ж) цилиндра $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, з) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

10.11. Найти $\pi_q(\mathbb{S}^n, s_0), q \leq n$.

10.12. Найти $\pi_q(\mathbb{RP}^n, x_0), q \leq n$.

10.13. Найти $\pi_3(\mathbb{S}^2, s_0)$.

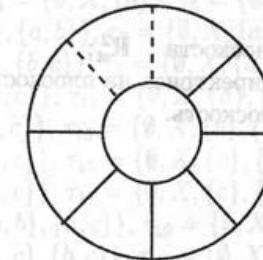
10.14. Доказать, что $\pi_q(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_q(X, x_0) \times \pi_q(Y, y_0)$.

10.15.* Найти множество гомотопических классов $\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2)$.

10.16. Пусть X — множество точек в \mathbb{C}^n с попарно различными координатами. Доказать, что $\forall q \geq 2 \pi_q(X, z_0) = 0$.

10.17. Привести пример такого связного топологического пространства X , что $\pi_1(X, x_0) \not\cong \pi_1(X, x_1)$ для некоторых точек x_0 и x_1 .

10.18. Найти фундаментальную группу π_1 пространства, состоящего из двух окружностей, соединенных n отрезками.



10.19. Пусть C есть коцепной комплекс (см. определение 10.5) такой, что все векторные пространства C^k конечномерны. Доказать, что

$$\dim H^k(C) = \dim C^k - \text{rank } \delta^{k-1} - \text{rank } \delta^k.$$

10.20. В комплексе

$$0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \rightarrow 0$$

$\text{rank } \delta^0 = 1, \text{rank } \delta^1 = 1, \dim C^0 = 2, \dim C^1 = 2, \dim C^2 = 3$. Найти размерности пространств когомологий этого комплекса.

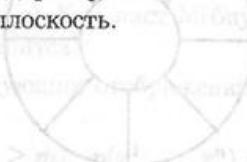
10.21. Пусть пространство X допускает хорошее покрытие, состоящее из трех элементов U, V, W , причем все пересечения

10.5. Каждое из следующих утверждений либо ложно, либо истинно?

элементов покрытия по два непусты. Найти когомологии Чеха пространства X , если а) $U \cap V \cap W \neq \emptyset$; б) $U \cap V \cap W = \emptyset$.

10.22. Доказать, что следующие топологические пространства допускают хорошее покрытие и найти их когомологии Чеха:

- а) открытый двумерный диск с выколотым центром;
- б) лист Мёбиуса;
- в) плоскость с двумя выколотыми точками;
- г) двумерный тор;
- д) двумерный тор с выколотой точкой;
- е) двумерный тор с двумя выколотыми точками;
- ж) бутылка Клейна;
- з) двумерная сфера;
- и) пять переплетённых окружностей (олимпийские кольца);
- к) гипербола на плоскости \mathbb{R}_{st}^2 ;
- л) парабола и её директриса на плоскости \mathbb{R}_{st}^2 ;
- м) проективная плоскость.



10.9. Какие из следующих утверждений верны? Для каждого утверждения дайте обоснование.

- а) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x_1^2 + x_2^2, x_3, \dots, x_m)$
- б) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$, $x \mapsto (x^2, x^3, \dots, x^n)$
- в) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$, $x \mapsto (x^2 - x^1, x^3, \dots, x^n)$
- г) $\mathbb{C}^n \setminus \{x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0\}$

10.10. Рассмотрим $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Пусть $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$, $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$. Докажите, что эти множества образуют хорошее покрытие пространства X . Докажите, что оно не является хорошим покрытием для пространства \mathbb{R}^2 .

ОТВЕТЫ

1.7. а) $\text{diam } M=7$, б) $\text{diam } M=6$, в) $\text{diam } M=2$, г) $\text{diam } M=2$.

1.11. $M = \{-1\} \cup (0, 5)$, $d(x, y) = |x - y|$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 2$.

1.12. Смотри пример из задачи 1.11.

1.15. $M = (-4, 4) \subset \mathbb{R}_{st}$, для $x = 1$, $y = 3$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 4$ имеем $B(x, \varepsilon_1) \supset B(y, \varepsilon_2)$.

1.17. $d(f, g)=1$, $d_0(f, g)=2$, $d_1(f, g)=5$, $d_2(f, g)=d_3(f, g)=7$.

1.18. д) $q_n = p^n$.

1.19. б) M — плоскость, F_1 — гипербола, F_2 — её асимптота.

2.1. $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$.

2.2. $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$, $\tau_5 = \{\emptyset, X, \{c\}\}$,

$\tau_6 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\tau_7 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$,

$\tau_8 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, $\tau_9 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$,

$\tau_{10} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{11} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$,

$\tau_{12} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$, $\tau_{13} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}\}$,

$\tau_{14} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{15} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$,

$\tau_{16} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{17} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$,

$\tau_{18} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{19} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,

$\tau_{20} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, $\tau_{21} = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$,

$\tau_{22} = \{\emptyset, X, \{a, c\}\}$, $\tau_{23} = \{\emptyset, X, \{b, c\}\}$,

$\tau_{24} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,

$\tau_{25} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$,

$\tau_{26} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$,

$\tau_{27} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$,

$\tau_{28} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,

$\tau_{29} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

2.9. в) нет, г) нет.

2.11. $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, $\overline{A} = (-\infty, 1]$, $\text{Fr } A = (-\infty, 1]$, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$, $\overline{B} = \mathbb{R}$, $\text{Fr } B = \mathbb{R}$.

2.14. X — дискретно.

2.27. в) нет.

2.30. а) да, в) нет, например, если $X \neq \emptyset$ и дискретно, то $X' = \emptyset$.

2.31. а) если $A = \emptyset$, то $A' = \emptyset$; если $A = \{x_0\}$, $x_0 \in X$, то $A' = X \setminus \{x_0\}$, во всех остальных случаях $A' = X$; б) $A' = X$.

2.32. а) $\{a\}' = \{b\}$, $\{b\}' = \emptyset$, $X' = \{b\}$.

2.33. а) $A = (0, 1)$, б) $A = [0, 1] \cup \{2\}$, в) $A = [0, 1]$, г) $A = (0, 1) \cup \{2\}$.

2.34. а) $X = \mathbb{R}_{st}$, $A = (0, 1)$, $A' = A'' = [0, 1]$;

б) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $A = \{b\}$, $A' = \{c\}$, $A'' = \{b\}$;

в) $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X\}$, $A = \{a\}$, $A' = \{b, c\}$, $A'' = X$;

г) $X = \mathbb{R}_{st}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $A' = \{0\}$, $A'' = \emptyset$.

3.3. $\beta = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1 < \alpha_2\}$.

3.5. а) дискретная топология; б) дискретная топология; в) всякое открытое множество имеет вид $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty) \cup A$, где $\alpha_1 < \alpha_2$, а A — произвольное подмножество сегмента $[\alpha_1, \alpha_2]$; г) топология Зарисского.

3.10. $C(\mathbb{R}_d, \mathbb{R}_{st}) \equiv \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ — множество всех отображений из \mathbb{R} в \mathbb{R} , $C(\mathbb{R}_{ad}, \mathbb{R}_{st})$ и $C(\mathbb{R}_{st}, \mathbb{R}_d)$ — множества всех постоянных функций, $C(\mathbb{R}_{st}, \mathbb{R}_{ad}) \equiv \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3.14. $X = Y = \{a, b, c\}$, $\tau_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{b\}\}$, $f : X \rightarrow Y$, $f(a) = a$, $f(b) = f(c) = b$, $C = \{a, b\}$.

3.16. Да.

3.19. А гомеоморфна Д; Б гомеоморфна Р, Ъ; Г гомеоморфна И, Л, М, П, С; Е гомеоморфна З, Т, У, Ц, Ч, Ш, Э; К гомеоморфна Х; Н гомеоморфна Щ.

3.20. Да.

3.21. а) да, б) да, в) нет, г) нет.

4.1. Если Y параллельна \mathcal{L} , то τ_Y — антидискретная топология. Если же Y непараллельна \mathcal{L} , то τ_Y — дискретная топология.

4.2. Если $x_0 \in Y$, то $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{x_0\}\}$. Если же $x_0 \notin Y$, то τ_Y — дискретная топология.

4.3. База индуцированной топологии на Y состоит из всех множеств вида $\{0\} \cup \left(\bigcup_{n=p}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$, $p = \overline{1, \infty}$ и $\left\{ \frac{1}{k} \right\}$, $k = \overline{1, \infty}$.

4.4. $\overset{\circ}{A} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k} \right\} \right)$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, $\overline{A}^R = A$, $\overline{A}^Y = \overline{A}^R \cup Y = A$, $\text{Fr}_R A = A$, $\text{Fr}_Y A = \{0\}$.

4.5. В топологии \mathbb{R}_{st}^2 : $\overline{A} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^1 \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq x^2 \leq 1\}$, $\overset{\circ}{A} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x^2 < 1\}$, $\text{Fr} A$ — объединение сторон квадрата A . В топологии Y : $\overline{A} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x^2 < 1\}$, $\overset{\circ}{A} = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x^2 < 1\}$, $\text{Fr} A$ — нижняя и правая стороны квадрата A .

4.6. В \mathbb{R}_{st}^2 : $\overline{C} = C \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. В U : $\overline{C} = C$.

4.11. См. пример из задачи 4.5.

4.12. См. пример из задачи 4.5.

5.1. Нет, так как для произвольной точки $a \in A$ может не быть точки $b \sim a$.

5.2. 1) \mathcal{R} содержит диагональ $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (рефлексивность).

2) \mathcal{R} — симметричное множество относительно диагонали Δ (симметричность).

3) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \mathcal{R}_Y \times \mathcal{R}_Y \subset \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}_Y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$ — срез множества \mathcal{R} по точке $y \in \mathbb{R}$ (транзитивность).

5.3. а) Нет, б) да, в) нет, г) да.

5.4. а) Да, $A/\sim = \mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных вещественных чисел; б) да, $A/\sim = \mathbb{R}^{n-k}$; в) да, $A/\sim = \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{S}^1)^k$; г) нет; д) да, $A/\sim = f(A)$; е) да, $A/\sim = \mathbb{S}^1$; ж) нет.

6.4. Нет.

6.19. а) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d, c\}\}$, б) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}\}$.

6.24. а) Да, б) да, в) нет.

6.26. а) Да, б) да, в) нет.

6.28. а) Нет. $X = \{a, b, c\}$, τ_1 — дискретная топология, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Для (X, τ_1) аксиомы $T3$ и $T4$ выполняются, а для (X, τ_2) нет.

б) Нет. $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X\}$. Для (X, τ_2) аксиомы $T3$ и $T4$ выполняются, а для (X, τ_1) нет.

7.1. Да, если $X = \emptyset$ или $X = \{x\}$ — одноточечное пространство.

7.2. Нет.

7.4. ё, й, ы, і, ј.

7.5. Несвязны: гипербола, пара параллельных прямых, двуполостный гиперболоид, пара параллельных плоскостей, гиперболический цилиндр.

7.9. а) $GL^+(n) = \{A \in GL(n) \mid \det(A) > 0\}$, $GL^-(n) = \{A \in GL(n) \mid \det(A) < 0\}$; б) $SL(n)$; в) $O(n) \cap GL^+(n)$, $O(n) \cap GL^-(n)$; г) $SO(n)$.

7.10. Пусть $C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций на \mathbb{R} . Тогда компонента связности точки $f \in C(\mathbb{R})$ имеет вид: $\{f + g \mid g \in C_b(\mathbb{R})\}$.

7.11. а) да, б) нет.

7.12. а) $\{A\}$, б) X .

7.14. Да.

7.18.* Компонента связности точки $x = (x_i)_{i=1,\infty}$ состоит из точки x и таких точек $y = (y_i)_{i=1,\infty}$, что лишь для конечного числа индексов $y_{i_k} \neq x_{i_k}$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$.

7.19. а) Нет, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет.

8.14. а) компактно, б) компактно, в) компактно, г) некомпактно, д) некомпактно, е) компактно.

8.15. Компактны эллипс, эллипсоид.

8.16.* $X = \mathbb{R}$. τ состоит из \emptyset и из всех интервалов (α, β) (конечных и бесконечных), содержащих 0. $A = \{0\}$.

8.17.* $X = \mathbb{R}$. $\beta = \{\emptyset, \mathbb{R}, (\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 > 0, \alpha_2 < 1\}$ — база топологии τ . $A = (\frac{1}{3}, +\infty)$, $B = (-\infty, \frac{2}{3})$.

9.1. Все, кроме пары пересекающихся прямых, пары пересекающихся плоскостей и конуса.

9.2. а), б), в), д), з).

9.3. а) нет, б) нет, в) нет, г) нет, д) да, е) нет.

9.4. б), в), д).

9.5. а) N_3 , $\chi = -1$; б) N_4 , $\chi = -2$; в) N_4 , $\chi = -2$; г) N_4 , $\chi = -2$; д) N_4 , $\chi = -2$; е) M_2 , $\chi = -2$.

9.6. а) тор, б) тор, в) бутылка Клейна, г) проективная плоскость, д) бутылка Клейна, е) бутылка Клейна.

9.7. Да.

9.9. а) нет, б) да.

9.11. а) $S^1 \times S^1 \times S^1$, б) фактор-многообразие трёхмерного тора $S^1 \times S^1 \times S^1$ по действию группы \mathbb{Z}_2 , гомеоморфное тотальному пространству расслоения единичных окружностей над бутылкой Клейна.

10.1. а) да, б) нет, в) да, г) нет, д) да, е) нет, ж) нет, з) нет.

10.2. а) да, б) да, в) нет, г) да, д) нет, е) нет, ж) нет, з) нет, и) да, к) нет, л) нет, м) да, н) да, о) да, п) да, р) да.

10.3. в) нет.

10.5. Представители классов эквивалентности: а) эллипс, гипербола, парабола, эллипсоид; б) А, И, Й, Ф; в) 0, 1, 8.

10.8. а), г), е).

10.9. а), б), в), г), ж).

10.10. Нетривиальные гомотопические группы: а) нет, б) $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$, в) $\pi_1 \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}$, г) $\pi_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, д) $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$, е) π_1 — группа с образующими $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ и соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1,$$

ж) $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$, з) $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$.

10.11. Тривиальны.

10.12. Тривиальны.

10.13. \mathbb{Z} .

10.15. \mathbb{Z} .

10.18. Свободная группа с n образующими.

10.20. $\dim H^0(C) = 1$, $\dim H^2(C) = 2$, $\dim H^k(C) = 0$, при $k \neq 0, 2$.

10.21. а) $H^0 = H^1 = \mathbb{R}$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; б) $H^0 = \mathbb{R}$, $H^r = 0$, $r \geq 1$;

10.22. а) $H^0 = H^1 = \mathbb{R}$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; б) $H^0 = H^1 = \mathbb{R}$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; в) $H^0 = \mathbb{R}$, $H^1 = \mathbb{R}^2$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; г) $H^0 = H^2 = \mathbb{R}$, $H^r = 0$, $r \geq 3$; д) $H^0 = \mathbb{R}$, $H^1 = \mathbb{R}^2$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; е) $H^0 = \mathbb{R}$, $H^1 = \mathbb{R}^3$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; ж) $H^0 = \mathbb{R}$, $H^1 = \mathbb{R}^2$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; з) $H^0 = H^2 = \mathbb{R}$, $H^r = 0$, $r \neq 0, 2$; и) $H^0 = H^1 = \mathbb{R}^5$, $H^r = 0$, $r \geq 2$; к) $H^0 = \mathbb{R}^2$, $H^r = 0$, $r \geq 1$; л) $H^0 = \mathbb{R}^2$, $H^r = 0$, $r \geq 1$; м) $H^0 = \mathbb{R}$, $H^r = 0$, $r \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Архангельский А.В., Пономарёв В.И. *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*. - М.: Наука, 1974. - 423 с.
- [2] Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. *Введение в топологию*. - М.: Высшая школа, 1980. - 296 с.
- [3] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. - М.: Наука, 1968. - 272 с.
- [4] Дерфель Г.А. *Сборник примеров, упражнений и задач по топологии: Пособие*. - Караганда: Карагандинский гос. ун-т, 1980. - 60 с.
- [5] Келли Дж. Л. *Общая топология*. - М.: Наука, 1981. - 432 с.
- [6] Кононов С.Г., Прасолов А.В., Тимохович В.А., Тралле А.Е., Феденко А.С. *Топология*. - Минск: Высшая школа, 1990. - 318 с.
- [7] Мищенко А.С., Соловьёв Ю.П., Фоменко А.Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии*. - М.: Изд-во МГУ, 1981. - 183 с.
- [8] Парфенов П.Г. *Задачи по топологии: Учебное пособие*. - Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1981. - 47 с.
- [9] Синюков Н.С., Матвеенко Т.И. *Топология*. - Киев: Вища школа, 1984. - 264 с.

Подписано в печать 21.07.2006.

Формат 60 x 84 1/16. Гарнитура Times. Печать ризографическая. Печл. 4.

Тираж 200 экз. Заказ 310.

Лаборатория оперативной полиграфии УМУ КГУ

420045, Казань, Кр.Позиция, 2а

Тел. 272-22-54