

Р. Ф. ШАМОЯН

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

1. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ — единичный круг, $T = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ — его граница, $H(D)$ — множество всех голоморфных в D функций, $m_2(z)$ и $m(t)$ — нормированные меры Лебега соответственно в круге D и на его границе T , X и Y — подпространства $H(D)$. Далее, пусть $\{z_k\}_{k=1}^\infty$, $0 < |z_k| < 1$, — произвольная последовательность комплексных чисел такая, что $|z_k| < |z_{k+1}|$, $k \in \mathbb{N}$, $B(z, \{z_k\})$ — соответствующее произведение Бляшке [1].

Определение. Скажем, что произведение Бляшке $B(z, \{z_k\}) = B(z)$ порождает ограниченный оператор

$$T_B : (T_B f)(z) = \int_T f(rt) B(\bar{t}w) dm(t), \quad z = rw,$$

который действует из X в Y (или является мультипликатором из X в Y), если для любой функции $f \in X$ функция $T_B f \in Y$.

В случае, когда Q — произвольная голоморфная в круге (или поликруге) D функция, полное описание тех Q , для которых оператор T_Q действует ограниченно из X в Y , где X и Y — различные пары пространств (классы Харди H^p , $0 < p < 1$, пространства со смешанной нормой) голоморфных в круге (поликруге) функций, было дано в [2]–[4].

Цель статьи — нахождение необходимых и достаточных условий на $B(z, \{z_k\})$, в частности, в терминах последовательностей нулей $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ функции $B(z, \{z_k\})$, при которых оператор T_B является ограниченным оператором из X в Y .

Отметим, что связи между тейлоровскими коэффициентами, ростом средних $M_p(B^{(m)}, r)$, где

$$M_p(f, r) = \int_T |f(rt)|^p dm(t), \quad r \in (0, 1), \quad f \in H(D), \quad 0 < p < \infty,$$

и распределением нулей $\{z_k\}$ произведений Бляшке исследовались в работах многих авторов (напр., [5], [6]).

2. Для изложения основных результатов статьи приведем

Определение ([1]). Скажем, что

1) произведение Бляшке $B(z, \{z_k\})$ с нулями $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ является интерполяционным (обобщенно интерполяционным), если

$$\delta(B) = \inf_j |B'(z_j)|(1 - |z_j|) > 0 \quad (\delta_\gamma(B) = \inf_j |B'(z_j)|(1 - |z_j|)^\gamma > 0, \quad \gamma > 0);$$

2) последовательность $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ ($|z_k| \uparrow 1$) удовлетворяет условию Карлесона (C), если $\inf_j \prod_{k \neq j} \frac{|z_k - z_j|}{|z_j - \bar{z}_k|} > 0$, и условию Ньюмана (N), если $\sup_{k \geq 0} \frac{1 - |z_{k+1}|}{1 - |z_k|} \leq \gamma$, где $\gamma < 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00992.

В дальнейшем через $\widehat{B}(n)$ будем обозначать n -й коэффициент Тейлора функции $B(z, \{z_k\})$, и говорить, что последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (WN) или (CN) [6], если она представима в виде конечного объединения последовательностей, удовлетворяющих условиям (N) и (C) соответственно. Обозначим “весовые” пространства Харди и Бергмана–Джрбашяна в единичном круге D [3] через

$$H_{\alpha}^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{r \in (0,1)} M_p(f, r)(1-r)^{\alpha} < \infty, 0 < \alpha, p < \infty \right\}, \quad H_0^p = H^p(D),$$

$$A_{\alpha}^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \int_D |f(z)|^p (1-|z|)^{\alpha} dm_2(z) < \infty, 0 < p < \infty, -1 < \alpha < \infty \right\}.$$

Далее запись $T \in \widetilde{B}(X, Y)$, где X и Y — подпространства $H(D)$, означает, что T — ограниченный оператор, действующий из X в Y .

Теорема 1. Пусть $\frac{1}{2} < s \leq 1$, $\alpha = \beta + 1$, $2 \leq q \leq \infty$, $0 < t \leq 2$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $T_B \in \widetilde{B}(A_{s/p+s-2}^s(D), H^p(D))$ для некоторого p , $1 \leq p$, $\frac{1}{s} - \frac{1}{p} < 1$;
- 2) $\widehat{B}(k) = O(\frac{1}{k})$;
- 3) $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (WN) ;
- 4) $T_B \in \widetilde{B}(H_{\alpha}^q(D), H_{\beta}^t(D))$.

Теорема 2. а) Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (CN) , $1 \leq q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{q}$, $\frac{1}{\alpha+1} < p \leq 1$. Тогда $T_B \in \widetilde{B}(A_{p(\alpha+1)-2}^p(D), H^q(D))$ в том и только том случае, когда $1 - |z_k| = O(k^{-\frac{1}{1-\alpha q}})$.

б) Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ некасательно сходится к 1,

$$\frac{1}{\alpha+1} < p \leq 1, \quad \alpha \in \left(\frac{1}{2q}, \frac{1}{2} \right), \quad 1 \leq q < \infty.$$

Тогда $T_B \in \widetilde{B}(A_{p(\alpha+1)-2}^p(D), H^q(D))$ в том и только том случае, если $1 - |z_k| = O(k^{-\frac{\alpha q}{1-\alpha q}})$.

Для формулировки следующих двух утверждений напомним [1], что функция $\varphi \in H^{\infty}(D)$ называется внутренней, если $|\varphi(\xi)| = 1$ при почти всех $\xi \in T$, при этом почти всюду существует предел $\varphi(\xi) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \varphi(r\xi)$. Далее $\widehat{\varphi}(n)$ — коэффициент Тейлора функции φ , а через $\Lambda_A^{\alpha}(D)$ ($0 < \alpha \leq 1$) обозначим известные классы Липшица–Зигмунда [1] в круге D .

Теорема 3. Пусть φ — внутренняя функция, $\frac{1}{p} - 1 < s < \frac{1}{q}$, $p \in (0, 1]$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $T_{\varphi} \in \widetilde{B}(H_{s+1-1/p}^p(D), H^p(D))$;
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{\varphi}(n)|^2 n^{sp} < \infty$.

Теорема 4. а) Пусть $f \in H^2(D)$, $B(z, \{z_k\})$ — интерполяционное произведение Бляшке, $\overline{\widehat{B}(k)} = \widehat{B}(k)$, последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (WN) . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $T_B f \in \Lambda_A^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$;
- 2) $\sup_j M_{\infty}(f, |z_j|)(1-|z_j|)^{1-\alpha} < \infty$.

б) Пусть $f \in \overline{H^2(D)}$, $B(z, \{z_k\})$ — обобщенно интерполяционное произведение Бляшке, $\delta_{\gamma}(B) > 0$, $\gamma \geq 4$, $\overline{\widehat{B}(k)} = \widehat{B}(k)$, последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (WN) . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $T_B f \in A_{\alpha}^1$, $\alpha \in (-1, \infty)$;
- 2) $\sup_j M_{\infty}(f, |z_j|)(1-|z_j|)^{\alpha+3} < \infty$.

Отметим здесь, что доказательства сформулированных выше утверждений существенным образом опираются на методы, примененные при доказательстве основного результата работы [2] и результаты работ [6] и [7].

Литература

1. Garnett J.B. *Bounded analytic functions*. – Academic Press. – Orlando, Fla, 1981. – 356 p.
2. Шамоян Р.Ф. *О мультипликаторах из пространств типа Бергмана в пространства Харди в полукруге* // Укр. матем. журн. – 2000. – № 10. – С. 1405–1415.
3. Yevtic M, Pavlovic M. *Coefficient multipliers on spaces of analytic functions* // Acta Sci. Math. – 1998. – V. 64. – P. 531–545.
4. Шамоян Р.Ф. *Мультипликаторы степенных рядов, операторы Теплица и теоретико-множественные вложения пространств типа Харди–Соболева–Джрбашяна* // Изв. НАН Армении. – 2000. – Т. 34. – № 4. – С. 43–59.
5. Ahern P. *The mean modulus and the derivative of an inner function* // Indiana Univ. Math. J. – 1979. – V. 29. – P. 311–348.
6. Вербицкий И.Э. *О коэффициентах Тейлора и модулях непрерывности произведений Бляшке* // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1982. – Т. 107. – С. 27–36.
7. Вербицкий И.Э. *Внутренние функции, пространства Бесова и мультипликаторы* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 276. – № 1. – С. 11–14.

*Брянский государственный
университет*

*Поступили
первый вариант 13.06.2000
окончательный вариант 07.10.2002*