Известия вузов. Математика
2013, № 7, с. 77–89

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

И.А. ШАКИРОВ

О ФУНКЦИЯХ ЛЕБЕГА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СЕМЕЙСТВУ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА

Аннотация. В работе получены различные явные виды функции Лебега, соответствующие семейству интерполяционных полиномов Лагранжа, определенных в четном числе узлов. Затем они исследованы с использованием производной до второго порядка включительно. Точные значения констант Лебега семейства оценены снизу и сверху известными параметрами, а в частном случае для их вычисления получены новые простые формулы.

Ключевые слова: интерполяционные полиномы Лагранжа, функции и константы Лебега, обобщенное ядро Дирихле.

УДК: 519.65

Введение

В математической литературе до сих пор не проведено исследование аппроксимативных возможностей семейства интерполяционных полиномов Лагранжа ([1], с. 24)

$$\Phi_n(x,t;\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k)D_n^*(t_k - t) + \alpha \sin nt \quad \left(D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}(u/2)}, \quad n \in \mathbb{N}\right) \tag{1}$$

в зависимости от поведения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$, в частности, в классическом пространстве непрерывных 2π-периодических функций $C_{2\pi} = C[0,2\pi]$. Такая возможность появилась лишь после моноядерного описания [2] полиномов (1) в виде

$$\Phi_n^c(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k)D_n^c(t_k - t), \quad c \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,2\pi], \tag{2}$$

где $D_n^c(u) = \frac{1}{2}\sin nu(\mathrm{ctg}\,\frac{u}{2} - c)$ — обобщенное ядро Дирихле ($c = 0 \Longrightarrow D_n^0(u) = D_n^*(u)$); параметры α, c связаны соотношением $\alpha = \frac{c}{2n}\sum\limits_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x(t_k)$; $x(t) \in C_{2\pi}$ — заданная функция, интерполируемая в четном числе $N = 2n$ равномерно распределенных на отрезке $[0,2\pi]$ узлов, для определенности $t_k = t_k(n) = \pi k/n$, $k = \overline{1,2n}$.

Представление семейства полиномов (1) в моноядерном виде (2) (в отличие от (1)), позволяет по классической схеме определить соответствующие им функции и константы Лебега

$$\lambda_n^c(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} |D_n^c(t_k - t)|, \quad \lambda_n^c = \max_{t\in[0,2\pi]} \lambda_n^c(t), \quad c \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

Поступили первый вариант 26.01.2012, окончательный вариант 12.09.2012

которые являются фундаментальными характеристиками рассматриваемых интерполяционных полиномов. Заметим, что при $c = 0$ в формулах (2) и (3) получим общеизвестный полином Лагранжа, имеющий минимальную норму в пространстве суммируемых с квадратом функций, и соответствующие ему фундаментальные характеристики

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^*(t_k - t), \quad \lambda_n^*(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} |D_n^*(t_k - t)|, \quad \lambda_n^* = \max_{t\in[0,2\pi]} \lambda_n^*(t). \tag{4}$$

Данная работа является продолжением и развитием предыдущих работ автора, в которых были получены явные виды функций $\lambda_n^c(t)$ только при неотрицательных значениях параметра c и изучены их некоторые элементарные свойства [2], а также проведено полное исследование поведения функции $\lambda_n^*(t)$ [3]. В них и в [4]–[9] содержится достаточно полный обзор основных источников, имеющих прямое отношение к данной тематике.

Ниже функции Лебега (3) разбиты на три непересекающихся класса $\Lambda^0 = \{\lambda_n^*(t) \mid c = 0\}$, $\Lambda^+ = \{\lambda_n^c(t) \mid c > 0\}$, $\Lambda^- = \{\lambda_n^{-c}(t) \mid c > 0\} = \{\lambda_n^c(t) \mid c < 0\}$ и затем изучены в приведенной последовательности, т. е. проведено полное исследование поведения функций из этих классов с использованием элементов дифференциального исчисления. При этом результаты предыдущих этапов существенно использованы в ходе исследования функций из последующих классов. Для констант Лебега λ_n^* и $\lambda_n^{\pm c}$, соответствующих функциям из Λ^0 и $\Lambda^\pm$, в первом случае получены новые формулы, позволяющие более эффективно вычислять точные значения λ_n^*, а во втором и третьем — верхние и нижние оценки, выраженные через известные параметры.

1. Функции и константы Лебега, соответствующие классическому интерполяционному полиному Лагранжа

Приведем результаты, полученные в работах [2] и [3] относительно функции $\lambda_n^*(t)$, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1.1. *Функция Лебега $\lambda_n^*(t)$, $n \ge 2$ ($n = 1 \Longrightarrow \lambda_n^*(t) \equiv 1$), соответствующая интерполяционному полиному $\Phi_n^*(x,t)$,*

— является π/n-периодической, четной функцией;

— как явно заданная функция на основном периоде $\widetilde{T} = [0, \pi/n]$ представима в видах

$$\lambda_n^*(t) = \frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right)\right]\sin nt, \quad t_k = \pi k/n, \tag{5}$$

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{n\sin t} + \frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k + t}{2}\right)\right]\sin nt, \quad \lambda_n^*(0) = \lambda_n^*\left(\tfrac{\pi}{n}\right) = 1; \tag{6}$$

— строго возрастает в промежутке $[0, \pi/2n)$ и строго убывает в $(\pi/2n, \pi/n]$; имеет область значений $[1, \lambda_n^*]$, где $\lambda_n^* = \max\limits_{t\in[0,\pi/n]} \lambda_n^*(t) = \lambda_n^*(\pi/2n)$;

— всюду выпукла на $\widetilde{T}$;

— имеет константу Лебега

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k - \pi/2n}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi. \tag{7}$$

Явные виды функций Лебега (5) и (6) позволили получить не только эти, но и некоторые другие результаты, связанные, например, с решением одной экстремальной задачи в пространстве $C[0,2\pi]$ [2] и приближенным вычислением функции $\lambda_n^*(t)$ [3].

Усиливает вышеприведенные результаты в части, касающейся непосредственного вычисления значения функции (5) и константы (7),

Теорема 1.2. *Функция Лебега $\lambda_n^*(t)$, $n \geq 2$, представима в видах*

$$\lambda_n^*(t) = \frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin(t_{k-1}+t)} + \frac{1}{\sin(t_k - t)}\right)\right]\sin nt, \quad t \in \widetilde{T}, \tag{8}$$

$$\lambda_n^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}\Big[\sum\limits_{k=1}^{[n/2]}(\operatorname{cosec}(t_{k-1}+t) + \operatorname{cosec}(t_k - t))\Big]\sin nt, \quad n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{n}\Big[\operatorname{cosec}(t_{[n/2]}+t) + \sum\limits_{k=1}^{[n/2]}(\operatorname{cosec}(t_{k-1}+t) + \operatorname{cosec}(t_k - t))\Big]\sin nt, \quad n = 2m+1, \end{cases} \tag{9}$$

а соответствующие им точные значения констант Лебега могут быть вычислены по более простым чем (7) *формулам*

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}(t_k - \pi/2n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad t_k = \pi k/n; \tag{10}$$

$$\lambda_n^* = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]}\operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad n = 2m, \quad \lambda_n^* = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{[n/2]}\operatorname{cosec}\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad n = 2m+1, \tag{11}$$

где $[z]$ — целая часть числа z.

Доказательство. Предварительно заметим, что в процессе получения формул (8)–(11) существенно используются зависимости для тригонометрических функций со сдвигами их аргументов на величины кратные π/n, а также представление узлов интерполяции $t_k = \pi k/n$, $k = \overline{1,2n}$, $n \geq 2$, в виде множества $\left\{\frac{\pi}{2m}k \mid k = \overline{1,4m}\right\}$ (число узлов кратно четырем) либо $\left\{\frac{\pi}{2m+1}k \mid k = \overline{1,4m+2},\ m \in \mathbb{N}\right\}$ (узлов четное число, но не кратно четырем).

Преобразуем формулу (5):

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos 0.5(t_{k-1}+t)}{\sin 0.5(t_{k-1}+t)} + \frac{\cos 0.5(t_k - t)}{\sin 0.5(t_k - t)}\right) =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2\cos^2 0.5(t_{k-1}+t)}{\sin(t_{k-1}+t)} + \frac{2\cos^2 0.5(t_k - t)}{\sin(t_k - t)}\right) =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\cos(t_{k-1}+t)}{\sin(t_{k-1}+t)} + \frac{1+\cos(t_k - t)}{\sin(t_k - t)}\right) =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin(t_{k-1}+t)} + \frac{1}{\sin(t_k - t)}\right) + \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{ctg}(t_{k-1}+t) + \operatorname{ctg}(t_k - t)).$$

Вторая часть полученного представления тождественно равна нулю на периоде $\widetilde{T}$ в силу свойств функции $y = \operatorname{ctg} u$, $u \in [0, \pi]$, и благодаря существующим связям между расположением узлов интерполяции на полупериоде и сдвигами аргументов котангенса (точнее говоря, из $2n$ котангенсов, участвующих в данной сумме, всегда можно составить n пар с противоположными знаками при любом фиксированном значении аргумента $t \in \widetilde{T}$). Следовательно, доказана справедливость формулы (8).

Теперь преобразуем функцию Лебега (8), используя при этом свойства косеканса и наличие среди его аргументов $t_j \pm t$, $j = \overline{0, n}$, $t \in \widetilde{T}$, симметричных относительно центра отрезка $[0, \pi]$ пар, в которых значения косеканса совпадают. В итоге получим справедливость представления (9):

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sin(t_{k-1} + t)} + \frac{1}{\sin(t_k - t)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cosec}(t_{k-1} + t) + \operatorname{cosec}(t_k - t)) \right] \sin nt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n} \Big[\sum\limits_{k=1}^{[n/2]} (\operatorname{cosec}(t_{k-1} + t) + \operatorname{cosec}(t_k - t)) \Big] \sin nt, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{n} \Big[\operatorname{cosec}(t_{[n/2]} + t) + \sum\limits_{k=1}^{[n/2]} (\operatorname{cosec}(t_{k-1} + t) + \operatorname{cosec}(t_k - t)) \Big] \sin nt, & n = 2m + 1. \end{cases}$$

Согласно теореме 1.1 максимум функции $\lambda_n^*(t)$, $t \in \widetilde{T}$, достигается в точке $t = \pi/2n$, поэтому из формулы (8) имеем

$$\lambda_n^* = \lambda_n^* \left(\frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{cosec} \left(t_{k-1} + \frac{\pi}{2n} \right) + \operatorname{cosec} \left(t_k - \frac{\pi}{2n} \right) \right) \right] \sin n \frac{\pi}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}(t_k - \pi/2n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec} \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

Таким образом, установлена справедливость формулы (10). А формулы (11) легко следуют из (9), если в них положить $t = \pi/2n$. □

Замечание 1.1. Детальное сравнение явных видов (5) и (8)–(9) функции Лебега и соответствующих им констант (7) и (10)–(11) позволяет утверждать, что в обоих случаях вторые являются более предпочтительными с точки зрения их практического применения (вычисления с использованием вполне определенного количества числа операций).

2. Свойства функций Лебега из класса Λ^+

Необходимым условием для исследования поведения функций из класса Λ^+ является исключение модулей из состава обобщенного ядра Дирихле в формуле (3), используя более тонкие свойства ядра $D_n^c(u)$, $c > 0$, $u \in [0, 2\pi]$, и образующих его функций. С целью получения более простого явного (безмодульного) вида функций $\lambda_n^c(t)$ предварительно введем условие согласования параметров n и c:

$$\frac{2n}{\pi} \operatorname{arcctg} c = \left[\frac{2n}{\pi} \operatorname{arcctg} c \right] = n^*(n, c) = n^*, \quad c > 0, \quad n \geq 2, \tag{12}$$

которое определяет индекс одного из внутренних узлов интерполяции $t_k = \pi k/n$, $k = \overline{1, 2n-1}$, т. е.

$$t_{n^*} = 2\operatorname{arcctg} c \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}(t_{n^*}/2) = c, \quad c > 0, \quad n \geq 2. \tag{13}$$

Эта равносильность имеет место, например, при выполнении равенства $c = \operatorname{ctg}(\pi/(2m))$ (m — произвольный делитель числа $n \geq 2$), при этом соотношения (12) и (13) эквивалентны.

Основную задачу данного раздела решим, используя вышесказанное и аппарат дифференциального исчисления.

Теорема 2.1. *Функции Лебега* $\lambda_n^c(t)$, $c > 0$, $n \geq 2$, *соответствующие интерполяционным полиномам* (2),

1) *являются* π/n*-периодическими функциями*;

2) *при выполнении условия* (12) *представимы в явных видах*

$$\lambda_n^c(t) = \frac{\sin nt}{2n}\Bigg[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \\ + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n - n^*)\Bigg], \tag{14}$$

$$\lambda_n^c(t) = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right), \quad t_k = \pi k/n, \quad t \in \widetilde{T}; \tag{15}$$

3) *являются строго возрастающими в промежутке* $[0, t_n^0)$ *и строго убывающими в* $(t_n^0, \pi/n]$ *функциями,*

$$\lambda_n^c = \max_{t\in[0,\pi/n]}\lambda_n^c(t) = \max_{t\in[0,\pi/2n]}\lambda_n^c(t) = \lambda_n^c(t_n^0), \quad t_n^0 = t_n^0(c) \in (0, \pi/2n), \tag{16}$$

и имеют область значений $[1, \lambda_n^c]$;

4) *являются выпуклыми на основном периоде* $\widetilde{T}$ *функциями при выполнении условий*

$$\left(\left[\frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right] = \frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right) \wedge (c < n/2), \quad c > 0, \quad n \geq 2. \tag{17}$$

Доказательство. Предварительно отметим, что в теореме случай $n = 1$ исключен как несодержательный либо тривиальный:

$$n = 1 \Longrightarrow \frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} c = \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right] \Longrightarrow n^* = \begin{cases} 0, & c = +\infty; \\ 1, & c = 0; \\ 2, & c = -\infty, \end{cases}$$

где первый и третий случаи являются несодержательными, а второй — тривиальным, так как в этом случае вторая составляющая в (15) равна нулю и $\lambda_1^c(t) = \lambda_1^*(t) = 1 \ \forall \in \widetilde{T}$ (см. теорему 1.1).

1) π/n-периодичность функций Лебега $\lambda_n^c(t)$, $t\in[0,2\pi]$, проще устанавливается, используя их модульный вид (3) и свойства параметрически определенного ядра Дирихле:

$$\lambda_n^c\left(t+\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left|D_n^c\left(t_k-t-\frac{\pi}{n}\right)\right|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^c(t_{k-1}-t)|=$$
$$=\frac{1}{n}\left[|D_n^c(t_0-t)|+\sum_{k=1}^{2n-1}|D_n^c(t_k-t)|\right]=$$
$$=\frac{1}{n}\left[|D_n^c(t_{2n}-t)|+\sum_{k=1}^{2n-1}|D_n^c(t_k-t)|\right]=\lambda_n^c(t)\quad\forall t\in[0,2\pi].$$

Так как $D_n^c(\pi k/n)=0$, $k=\overline{1,2n-1}$, $D_n^c(0)=D_n^c(2\pi)=n$, то $\lambda_n^c(\pi k/n)=1$, $k=\overline{0,2n}$, и на любом из периодов $[\pi k/n,\pi(k+1)/n]$, $k\in\mathbb{Z}$, имеет место неравенство $\lambda_n^c(t)\geq 1$. Поэтому всюду в работе их будем исследовать только на основном периоде $\widetilde{T}=[0,\pi/n]$.

π/n-периодичность функций Лебега имеет место не только при $c>0$, но и при любых действительных значениях параметра c. Действительно, в ходе проверки их на периодичность никакие ограничения на этот параметр не накладывались.

2) Упростим функцию Лебега (3), используя условие (12) и поведения функций $y=\sin nu$, $y=\left|\operatorname{ctg}\frac{u}{2}-c\right|$, $u\in[0,2\pi]$, при сдвигах их аргументов вида $u=t_k-t$, $t\in\widetilde{T}$, $t_k=\pi k/n$, $k=\overline{1,2n}$:

$$\lambda_n^c(t)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin n(t_k-t)\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-c\right)\right|=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin(\pi k-nt)\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-c\right)\right|=$$
$$=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}|\sin nt|\left|\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-c\right|=\frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-c\right)\operatorname{sign}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-c\right)=$$
$$=\frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-c\right)+\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(-\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}+c\right)+\sum_{k=n+1}^{2n}\left(-\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}+c\right)\right]=$$
$$=\frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-cn^*-\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}+c(n-n^*)+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{t_{j-1}+t}{2}+cn\right]=$$
$$=\frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}\right)+\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}\right)+2c(n-n^*)\right].$$

Таким образом, доказана справедливость формулы (14), когда между узлами интерполяции полиномов (2) и положительной постоянной c имеется зависимость вида (13).

В общем случае параметры n, c и $n^*=n^*(n,c)$ удовлетворяют менее жесткому чем (13) условию

$$t_{n^*}<2\operatorname{arcctg}c\leq t_{n^*+1}\quad\left(\Longleftrightarrow n^*<\frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg}c\leq n^*+1,\quad n^*\in[0,n-1]\right).$$

Тогда функции Лебега $\lambda_n^c(t)$ в двух вполне определенных взаимодополняющих подобластях отрезка $[0,\pi/n]$, определяемых параметрами n и c, задаются как составные функции, имеют более громоздкий чем (14) явный вид, который не создает особых проблем при их исследовании. Этот случай в рамках данной работы не рассматривается.

Провести исследование функций Лебега $\lambda_n^c(t)$, $t \in \widetilde{T}$, $c > 0$, в явно заданном виде (14) с применением первой и второй производной является слишком трудоемкой задачей в связи с необходимостью исследования разрешимости полученных при этом сложнейших тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами. Поэтому с целью преодоления указанных трудностей, представим (14) в виде суммы достаточно полно изученной ранее функции $\lambda_n^*(t)$ и некоторой другой функции простой структуры:

$$\lambda_n^c(t) = \frac{\sin nt}{2n}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) +$$
$$+ \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\Bigg] = \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) +$$
$$+ \frac{\sin nt}{2n}\left[2c(n-n^*) + \sum_{k=n^*+1}^{n}(-2)\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right] = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=n^*+1}^{n} 2c - \sum_{k=n^*+1}^{n} 2\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right] =$$
$$= \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right), \quad t \in \widetilde{T}.$$

3) Перепишем формулу (15), введя вспомогательную функцию

$$\lambda_n^c(t) = \lambda_n^*(t) + b_n(t)\sin nt, \quad b_n(t) = b_n(t,c) = \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right), \quad t \in \widetilde{T}, \quad c > 0, \quad (18)$$

и установим существование в интервале $(0, \pi/2n) \subset \widetilde{T}$ точки ее максимума $t_n^0 = t_n^0(c)$ при фиксированных значениях параметров n и c, удовлетворяющих условию (12). Поиск t_n^0 и вычисление точного значения константы Лебега согласно формуле (16) сопряжены большими трудностями. В рамках данной работы эти вопросы не рассматриваются.

Входящие в формулу (18) функции $\lambda_n^*(t)$ и $\sin nt$ являются достаточно известными, а $b_n(t)$ — непрерывной, строго убывающей и выпуклой функцией на периоде $\widetilde{T}$ (причем при выполнении условия (12) и больших значениях параметра n функция $b_n(t)$ имеет малую вариацию $\delta_n(c)$ области значений), что немедленно следует из нижеприведенных оценок и вычислений:

$$\begin{aligned} &b_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) > 0, \quad b_n'(t) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{t_k - t}{2} < 0, \\ &b_n''(t) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{t_k - t}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} < 0 \quad (\forall t \in \widetilde{T}) \wedge (c > 0), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\delta_n(c) = b_n(0) - b_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{k-1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right) = \frac{1}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}n^* = \frac{c}{n}.$$

Для функции $\psi_n(t) \equiv b_n(t)\sin nt$ из правой части формулы (18) и ее производной

$$\psi_n'(t) = b_n'(t)\sin nt + n\cos nt\, b_n(t), \quad t \in \widetilde{T} = T_1 \cup T_2,$$

— на второй составляющей $T_2 = (\pi/2n, \pi/n]$ основного периода $\widetilde{T}$ имеем

$$\psi_n(t) > 0 \ \ \forall t \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right), \quad \psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0;$$

$$\psi_n'(t) < 0 \ \ (b_n'(t)\sin nt < 0, \quad \cos nt b_n(t) < 0) \ \ \forall t \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right);$$

$$\psi_n'\left(\frac{\pi}{n}\right) = -\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k-1}{2n}\pi\right) < 0;$$

— на отрезке $T_1 = [0, \pi/2n]$ верны соотношения

$$\psi_n(t) > 0 \ \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2n}\right], \quad \psi_n(0) = 0, \quad \psi_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi\right) > 0;$$

$$\psi_n'(0) = \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right) > 0, \ \ \psi_n'\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{2k-1}{4n}\pi < 0.$$

Теперь можем утверждать, что существует точка $t_n^* = t_n^*(c) \in (0, \pi/2n)$ такая, что функция $\psi_n(t)$ строго возрастает в промежутке $[0, t_n^*)$ и строго убывает в $(t_n^*, \pi/n]$, т. е. t_n^* является точкой максимума $\psi_n(t)$, $t \in \widetilde{T}$.

Все утверждения данного раздела (включая формулу (16), где $t_n^0 \neq t_n^*$) теперь легко получаются, если использовать формулу (18) и известные свойства функций $\lambda_n^*(t), \psi_n(t)$, а также соотношения

$$(\lambda_n^c)'(0) = \sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right) > 0,$$

$$(\lambda_n^c)'\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{2k-1}{4n}\pi < 0,$$

$$(\lambda_n^c)'\left(\frac{\pi}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k-1}{2n}\pi\right) < 0.$$

4) Для доказательства выпуклости $\lambda_n^c(t)$, $c > 0$, $n \geq 2$, на периоде $\widetilde{T}$ необходимо изучить поведения их вторых производных, следовательно, согласно (18) — поведения функций $\lambda_n^{*''}(t)$ и $\psi_n''(t)$.

Как следует из теоремы 1.1, $\lambda_n^*(t)$, $t \in \widetilde{T}$, является выпуклой функцией ($\lambda_n^{*''}(t) < 0$ $\forall t \in \widetilde{T}$). Учитывая соотношения (19), для второй производной

$$\psi_n''(t) = \sin nt b_n''(t) + 2n\cos nt b_n'(t) - n^2\sin nt b_n(t), \quad t \in \widetilde{T} = T_1 \cup T_2,$$

— на первой составляющей T_1 основного периода $\widetilde{T}$ имеем

$$\psi_n''(t) < 0 \ \ (\sin nt b_n''(t) < 0, \quad \cos nt b_n'(t) < 0, \quad \sin nt b_n(t) > 0) \ \ \forall t \in (0, \pi/2n),$$

$$\psi_n''(0) = -\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi k}{2n} < 0,$$

$$\psi_n''\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{2k-1}{4n}\pi\cdot\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi - n\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi\right) < 0;$$

— на T_2 верны соотношения

$$\sin ntb''_n(t) < 0, \quad \cos ntb'_n(t) > 0, \quad \sin ntb_n(t) > 0 \ \ \forall t \in (\pi/2n, \pi/n);$$
$$\psi''_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=n^*+1}^{n} \operatorname{cosec}^2 \frac{k-1}{2n}\pi > 0.$$

Следовательно, существует точка $t'_n = t'_n(c) \in (\pi/2n, \pi/n)$ такая, что функция $\psi_n(t)$ является выпуклой в промежутке $[0, t'_n)$ и вогнутой в $(t'_n, \pi/n]$, т.е. t'_n — точка перегиба $\psi_n(t)$, $t \in \widetilde{T}$. А потому в большом полуинтервале $[0, t'_n) \subset \widetilde{T}$ функция Лебега $\lambda_n^c(t)$ выпукла как сумма двух выпуклых функций $\lambda_n^*(t)$ и $\psi_n(t)$, а в промежутке $(t'_n, \pi/n] \subset T_2$ первая из них является выпуклой, вторая — вогнутой. Поэтому для их суммы $\lambda_n^*(t) + \psi_n(t)$ потребуем выполнения условия выпуклости вида

$$(\lambda_n^*)''\left(\frac{\pi}{n}\right) + \psi''_n\left(\frac{\pi}{n}\right) < 0 \ \left(\iff (\lambda_n^c)''\left(\frac{\pi}{n}\right) < 0\right) \iff -\frac{1}{3}(n^2-1) + \sum_{k=n^*+1}^{n} \operatorname{cosec}^2 \frac{k-1}{2n}\pi < 0. \tag{20}$$

Сумма в неравенстве (20) зависит от параметров n, c и допускает нижнюю оценку через определенный интеграл, точно вычисляемый при выполнении условия (13):

$$S_n(c) = \sum_{k=n^*+1}^{n} \operatorname{cosec}^2 \frac{k-1}{2n}\pi = \sum_{k=n^*+1}^{n} \operatorname{cosec}^2 \frac{t_{k-1}}{2} = \frac{n}{\pi} \sum_{k=n^*+1}^{n} \frac{1}{\sin^2(t_{k-1}/2)} \cdot \frac{\pi}{n} >$$
$$> \frac{n}{\pi} \int_{t_{n^*}}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(t/2)} dt = -\frac{2n}{\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_{n^*}}{2}\right) = \frac{2n}{\pi}c.$$

Полученное соотношение равносильно равенству $S_n(c) = 2cn/\pi + \varepsilon_n(c)$, где $\varepsilon_n(c) > 0$, $\varepsilon_n(c) \to 0$ при любом фиксированном $c > 0$ и $n \to \infty$.

Теперь упростим последнее неравенство в (20):

$$2cn/\pi + \varepsilon_n(c) < (n^2-1)/3 \Rightarrow c < \pi[(n^2-1)/3 - \varepsilon_n(c)]/2n \Rightarrow c < n/2.$$

Следовательно, выполнение условия (17) обеспечивает выпуклость функций Лебега из класса Λ^+. □

Замечание 2.1. Если в условии согласования параметров (17) второе требование $c < n/2$ не будет выполнено, т.е. значение параметра c будет больше четверти числа узлов интерполяции, то выпуклость функций Лебега из класса Λ^+ на периоде $\widetilde{T}$ перестает иметь место; появляются точки перегиба $t''_n = t''_n(c) \in (\pi/2n, \pi/n)$ функций $\lambda_n^c(t)$, $c > 0$, $n \geq 2$, такие, что в промежутках $[0, t''_n)$ их графики выпуклые, а в $(t''_n, \pi/n]$ — вогнутые.

Замечание 2.2. Если в условиях теоремы 2.1 положим $c = 0$, то получим $n^* = n$, $\psi_n(t) \equiv 0$, $t \in [0, \pi/n]$. Тогда все ее результаты, в том числе и формулы (14), (15), полностью согласуются с результатами теоремы 1.1.

Во введении работы и в ходе доказательства п. 3) теоремы 2.1 было отмечено, что вычисление точных значений констант Лебега λ_n^c (в отличие от $\lambda_n^* \in \Lambda^0$), соответствующих функциям из класса Λ^+, сопряжено большими трудностями. А потому оценим их снизу и сверху через известные параметры n, c, n^*, λ_n^*.

Теорема 2.2. *Для констант Лебега λ_n^c, $c > 0$, $n \geq 2$, при выполнении условия* (12) *справедливы двусторонние оценки*

$$\lambda_n^* + \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi\right) < \lambda_n^c < \lambda_n^* + \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right), \tag{21}$$

$$\lambda_n^* + c(n-n^*)/2n < \lambda_n^c < \lambda_n^* + c(n-n^*)/n. \tag{22}$$

Доказательство. Для получения нижней оценки в (21) используем теоремы 1.1 и 2.1, а также соотношения (16), (18):

$$\lambda_n^c = \lambda_n^c(t_n^0) > \lambda_n^c\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \lambda_n^*\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \psi_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) =$$
$$= \lambda_n^* + \frac{\sin n(\pi/2n)}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - \pi/2n}{2}\right) = \lambda_n^* + \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi\right), \ t_k = \pi k/n.$$

Для получения верхней оценки в (21) переходим к максимуму слева и справа в (18) по аргументу $t \in \widetilde{T}$, учитывая при этом неотрицательность всех содержащихся там функций:

$$\max_t \lambda_n^c(t) \leq \max_t \lambda_n^*(t) + \max_t b_n(t) \cdot \max_t \sin nt \quad (t \in [0, \pi/n]) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda_n^c \leq \lambda_n^* + b_n(0) = \lambda_n^* + \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right).$$

Далее, используя условие (12) и свойства функции $y = \operatorname{ctg}(u/2)$, $u \in [\pi n^*/n, \pi]$, оценим суммы, содержащиеся в (21):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - \pi/2n}{2}\right)\frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{\pi}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{\pi}{n}(n-n^*) = \frac{c}{2n}(n-n^*),$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k}{2}\right)\frac{\pi}{n} \leq \frac{1}{\pi}\cdot c\cdot\frac{\pi}{n}(n-n^*) = \frac{c}{n}(n-n^*).$$

Из этих неравенств получим справедливость оценок (22), которые, очевидно, являются более грубыми чем (21). □

Замечание 2.3. Если в двойных неравенствах (21) и (22), непрерывно уменьшая значение параметра c, предел положим равным нулю, то вторые составляющие в верхних и нижних оценках обращаются в нуль, и вместо строгих неравенств получим равенства. Другими словами, среди констант Лебега λ_n^c, $c \geq 0$, минимальное значение имеет λ_n^*, т. е. $\min_c\{\lambda_n^c \mid c \geq 0\} = \lambda_n^0 = \lambda_n^*$. Этот результат был получен в работе [2] (теорема 3.3) другим способом.

3. О поведении функций Лебега из класса Λ^-

Исследование поведения функций Лебега из класса Λ^- можно провести, полностью следуя схеме предыдущего раздела и учитывая при этом каждый раз отрицательность параметра c. Однако такой способ является громоздким и трудоемким. Поэтому ниже используем подход, позволяющий обойти эти проблемы. Суть его заключается в том, что произвольную функцию из множества Λ^- можно вполне определенным образом выразить через функцию, принадлежащую уже достаточно полно исследованному классу Λ^+. Это, в свою очередь, дает возможность напрямую использовать результаты теорем 2.1 и 2.2 при изучении функций из класса Λ^-.

В следующей теореме установим взаимосвязь между функциями из классов $\Lambda^{\pm}$ и приведем явные виды $\lambda_n^{-c}(t) \in \Lambda^-$.

Теорема 3.1. *Для функций $\lambda_n^{-c}(t) \in \Lambda^-$, $\lambda_n^{c}(t) \in \Lambda^+$, $c > 0$, и соответствующих им констант Лебега λ_n^{-c}, λ_n^{c} справедливы соотношения*

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^{c}\left(\frac{\pi}{n} - t\right), \quad t \in \widetilde{T}, \quad \lambda_n^{-c} = \lambda_n^{c} \quad \forall c > 0; \tag{23}$$

а для функций из класса Λ^- верны представления

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\right], \quad t \in \widetilde{T}, \quad c > 0, \tag{24}$$

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^{*}(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2}\right), \quad n^* = \left[\frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right] = \frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c. \tag{25}$$

Доказательство. Предварительно установим зависимости, существующие между обобщенными ядрами Дирихле $D_n^{\pm c}(u)$, определяющими функции Лебега из классов $\Lambda^{\pm}$ согласно формуле (3):

$$D_n^{c}(u) = D_n^{c}(2\pi + u), \quad D_n^{-c}(u) = \frac{\sin nu}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{u}{2} + c\right),$$

$$D_n^{c}(-u) = \frac{\sin n(-u)}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{-u}{2} - c\right) = D_n^{-c}(u) \Longrightarrow D_n^{-c}(u) = D_n^{c}(2\pi - u), \quad c > 0, \quad u \in [0, 2\pi].$$

Используя последнее равенство, получим

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^{-c}(t_k - t)| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^{c}(2\pi - (t_k - t))| =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left|D_n^{c}\left(2\pi - t_{k-1} - \left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left|D_n^{c}\left(t_{2n+1-k} - \left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right)\right| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{2n}\left|D_n^{c}\left(t_j - \left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right)\right| = \lambda_n^{c}\left(\frac{\pi}{n} - t\right) \ \forall t \in \widetilde{T}, \ c > 0.$$

Теперь можем утверждать, что графики двух произвольно выбранных функций $\lambda_n^{-c}(t)$, $\lambda_n^{c}(t)$, $c > 0$, из соответствующих классов $\Lambda^{\pm}$ являются зеркальными отображениями друг друга относительно прямой $t = \pi/(2n)$, проходящей через центр их общего периода $\widetilde{T}$ параллельно оси ординат; при этом соответствующие им константы Лебега λ_n^{-c}, λ_n^{c} естественно равны. Поэтому все утверждения теорем 2.1 и 2.2 из предыдущего раздела с учетом симметричности графиков функций $\lambda_n^{-c}(t)$ и $\lambda_n^{c}(t)$ легко переносятся на рассматриваемый здесь случай, за исключением их явных видов.

Используя формулы (23) и (14), установим явный вид функции $\lambda_n^{-c}(t) \in \Lambda^-$:

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^c\left(\frac{\pi}{n} - t\right) = \frac{\sin n(\pi/n - t)}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + (\pi/n - t)}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - (\pi/n - t)}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + (\pi/n - t)}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - (\pi/n - t)}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right] =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right].$$

После некоторых преобразований функции Лебега из (24) получим формулу (25):

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n} 2c\right] = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2\sum_{k=n^*+1}^{n} c\right] = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=n^*+1}^{n}(-2)\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + 2\sum_{k=n^*+1}^{n} c\right] = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2}\right). \quad \square$$

Замечание 3.1. Из теоремы 3.1 и замечания 2.3 следует справедливость следующей экстремальной задачи: $\min_c\{\lambda_n^c \mid c \in \mathbb{R}\} = \lambda_n^0 = \lambda_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, оператор $\Phi_n^* : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, соответствующий интерполяционному полиному (4), имеет минимальную норму среди операторов $\Phi_n^c : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$, $c \in \mathbb{R}$, соответствующих семейству интерполяционных полиномов Лагранжа (2).

Литература

[1] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*. Т. 2 (Мир, М., 1965).

[2] Шакиров И.А. *О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$*, Изв. вузов. Матем., № 10, 60–68 (2010).

[3] Шакиров И.А. *Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа*, Изв. вузов. Матем., № 10, 80–88 (2011).

[4] Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения* (Наука, М., 1987).

[5] Дзядык В.К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений* (Наук. думка, Киев, 1988).

[6] Субботин Ю.Н., Теляковский С.А. *Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами*, Матем. сб. **191** (8), 131–140 (2000).

[7] Бабенко К.И. *Основы численного анализа* (НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2002).

[8] Ким В.А. *Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка*, Сиб. матем. журн. **51** (2), 330–341 (2010).

[9] Байдакова Н.В. *Оценка сверху функции Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса*, Матем. заметки **92** (1), 19–26 (2012).

И.А. Шакиров

доцент, кафедра математики и методики ее преподавания,
Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов,
ул. Низаметдинова, д. 28, г. Набережные Челны, 423806, Россия,

`e-mail:` iskander@tatngpi.ru

I.A. Shakirov

Lebesgue functions corresponding to a family of Lagrange interpolation polynomials

Abstract. In this paper we obtain various explicit forms of the Lebesgue function corresponding to a family of Lagrange interpolation polynomials defined at an even number of nodes. We study these forms by using the derivatives up to the second order inclusive. We estimate exact values of Lebesgue constants for this family from below and above in terms of known parameters. In a particular case we obtain new simple formulas for calculating these estimates.

Keywords: Lagrange interpolation polynomials, Lebesgue functions and constants, generalized Dirichlet kernel.

I.A. Shakirov

Associate Professor, Chair of Mathematics and its Teaching Principles,
Naberezhnye Chelny Institute of Social Pedagogical Technologies and Resources,
28 Nizametdinov str., Naberezhnye Chelny, 423806 Russia,

`e-mail:` iskander@tatngpi.ru