

И.А. КОЛЕСНИКОВ, Л.С. КОПАНЕВА

## КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ НА СЧЕТНОУГОЛЬНИК С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ

*Аннотация.* Рассматриваются односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на  $2\pi$ , с симметрией относительно вертикальной прямой  $w = \pi + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , с границей, состоящей из прямолинейных отрезков. Конформные отображения полуплоскости на такие области представлены интегралом типа интеграла Шварца–Кристоффеля. Доказательство результата опирается на принцип симметрии Римана–Шварца и классическую формулу Шварца–Кристоффеля. Найдено несколько отображений на конкретно заданные области.

*Ключевые слова:* счетноугольник, конформное отображение, симметрия переноса, эллиптические интегралы.

УДК: 517.546

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1867 г. Э. Кристоффелем и независимо в 1869 г. Г. Шварцем было получено интегральное представление ([1], с. 110) отображений верхней полуплоскости на односвязные области, граница которых состоит из прямолинейных отрезков.

**Теорема 1** (Кристоффель, Шварц). Пусть  $D$  — односвязная область в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , ограниченная многоугольником с вершинами в точках  $A_1, \dots, A_n$  и внутренними углами  $\alpha_i\pi$ , где  $\alpha_i \in (0, 1) \cup (1, 2]$ , если  $A_i$  конечная, и  $-2 \leq \alpha_i \leq 0$ , если  $A_i = \infty$ . Тогда существует конформное однолистное отображение верхней полуплоскости  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  на  $D$  и любое такое отображение может быть представлено в виде

$$f(z) = c_2 \int_{z_0}^z \prod_{i=1}^n (\xi - a_i)^{\alpha_i - 1} d\xi + c_1, \quad (1)$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — прообразы вершин  $A_1, \dots, A_n$ ,  $c_1, c_2$  — константы.

Значение постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2$ , называемых акцессорными параметрами, неизвестно заранее. К настоящему времени разработаны различные методы для определения этих параметров. В 1947 г. П.П. Куфарев [2], используя параметрический метод Левнера, показал, что определение неизвестных параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля может быть сведено к задаче интегрирования некоторой системы дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши. В 2011 г. В.Я. Гутлянский, В.И. Рязанов [1] развили метод Куфарева применительно к случаю конформного отображения верхней полуплоскости на многоугольник при наличии граничной нормировки.

---

Поступила 11.06.2013

Аналитические и численные методы нахождения конформных отображений развивались параллельно с начала XX века. Нахождение конформных отображений с помощью интеграла Шварца–Кристоффеля широко использовалось при решении следующих задач: о потоке жидкости в области, ограниченной многоугольником, свободного обтекания, о плоских упругих системах. В 60-х гг. компьютерные технологии стали применять для обработки аналитических результатов. Формула Шварца–Кристоффеля стала широко использоваться в областях гибридной микроэлектроники, проектирования широкомасштабной интеграции (VLSI), магнетизма, теории микроволновых излучений, задачах дифракции. Для многих перечисленных приложений представляет интерес нахождение конформных отображений на многоугольники с дополнительными геометрическими свойствами. В последние десятилетия формула Шварца–Кристоффеля получила распространение на области различного специального вида, в частности, она записана для отображения на многоугольник с бесконечным числом вершин [3], [4], фракталы, области с симметрией переноса [5].

Появился интерес к отображениям верхней полуплоскости на счетноугольники с симметрией переноса типа полуплоскости и типа полосы (частные случаи полигональных областей со счетным множеством вершин). Для построения конформных отображений на области с симметрией переноса применялись как различные аналитические методы, так и численные. Интегральная формула Шварца–Кристоффеля записана для отображения верхней полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости с симметрией переноса И.А. Александровым [6] с использованием принципа симметрии Римана–Шварца, С.А. Копаневым и Л.С. Копаневой [7] с помощью формулы типа формулы Шварца. Для конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости с симметрией переноса с границей, состоящей из дуг окружностей, получено дифференциальное уравнение [8] третьего порядка. Другой способ нахождения конформного отображения, в том числе на счетноугольники с симметрией переноса, с привлечением алгебры свертки и теории рядов Фробениуса предложил W.S. Hassenpflug [9]. С помощью параметрического метода Левнера записано дифференциальное уравнение [10] типа уравнения Левнера для отображений верхней полуплоскости на области с симметрией переноса. Численные методы для конформных отображений на счетноугольники с симметрией переноса развивались канадским инженером J.M. Floryan [11], на фрактальные счетноугольники с симметрией переноса американскими математиками M. Brady и C. Pozrikidis [12]. Особенностью фрактальных счетноугольников является то, что часть границы таких счетноугольников от точки  $w_0$  до точки  $w_0 + 2\pi$  состоит из счетного числа прямолинейных отрезков.

В данной работе для конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией получена

**Теорема 2.** *Функция  $w(z)$ , однолистно, конформно отображающая верхнюю полуплоскость  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  на счетноугольник с двойной симметрией, представляется интегралом*

$$w(z) = c_1 \int_0^z (1 - \cos \xi)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}} (1 + \cos \xi)^{\frac{\alpha_n - 1}{2}} \prod_{i=2}^{n-1} (a_i - \cos \xi)^{\alpha_i - 1} d\xi + c_2, \quad (2)$$

где  $a_i = \cos z_i^0$ ,  $z_i^0$  — прообразы вершин  $A_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , счетноугольника  $\Delta$ , лежащих в полосе  $P_\pi = \{w \in \mathbb{C} : w = u + iv, u \in [0, \pi], v \in \mathbb{R}\}$ ,  $z_1^0 = 0$ ,  $z_n^0 = \pi$ ;  $\alpha_i \pi$ ,  $\alpha_i \in (0, 2]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — углы при этих вершинах,  $c_1, c_2$  — некоторые константы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

**Определение.** Счетноугольником с двойной симметрией будем называть односвязную область  $\Delta$ , обладающую следующими свойствами:

- область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на  $2\pi$ ;
- область типа полуплоскости;
- часть границы области от точки  $w_0$  до точки  $w_0 + 2\pi$  состоит из конечного числа прямолинейных отрезков и лучей.
- область с симметрией относительно прямой  $w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}$ .

Область называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на  $2\pi$ , если при линейном преобразовании сдвига вида  $L(z) = z + 2\pi$  область остается неизменной:

$$L(\Delta) = \Delta.$$

Область называют областью типа полуплоскости, если при упомянутом преобразовании сдвига  $L(z)$  среди всех простых концов в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Не умаляя общности, точку множества  $\{w \in \mathbb{C} : w = iv, v \in \mathbb{R}\} \cap \partial\Delta$  с наибольшей мнимой частью будем считать вершиной счетноугольника  $\Delta$ , обозначим ее  $A_1^0$ . Если вершина  $A_1^0$  принадлежит отрезку границы счетноугольника  $\Delta$ , то угол при этой вершине равен  $\pi$ . Аналогично, точку  $A_n^0$  множества  $\{w \in \mathbb{C} : w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}\} \cap \partial\Delta$  с наибольшей мнимой частью будем считать вершиной счетноугольника  $\Delta$ . Обозначим через  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{2n-2}^0, A_1^1, A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$ , вершины счетноугольника  $\Delta$ , лежащие в полосе  $P_{2\pi} = \{w \in \mathbb{C} : w = u + iv, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}\}$  при движении вдоль границы счетноугольника  $\Delta$  в положительном направлении, и углы при этих вершинах соответственно  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_{2n-2}\pi, \alpha_1\pi$ . Остальные вершины  $A_i^k$  определяются сдвигом вершин  $A_i^0$  вдоль вещественной оси  $A_i^k = A_i^0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, 2n-2}$ . Заметим, что вершина  $A_{n-s}^0$  симметрична вершине  $A_{n+s}^0, s = \overline{1, n-2}$ , относительно прямой  $w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}, A_1^0 + 2\pi = A_1^1$ , кроме того,  $\alpha_{n-s} = \alpha_{n+s}, s = \overline{1, n-2}$ .

Согласно теореме Римана ([13], с. 204) существует конформное, однолистное отображение верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией. Для такого отображения получена теорема 2.

**Замечание.** В случае, если какая-либо из вершин счетноугольника лежит в бесконечно удаленной точке, значение угла при этой вершине равняется нулю и не может принимать других значений. Результат теоремы 2 остается справедливым, если предположить, что некоторые из вершин  $A_i^k$  находятся в бесконечно удаленной точке.

С помощью теоремы 2 строятся несколько отображений верхней полуплоскости на конкретные счетноугольники с двойной симметрией. Для нахождения констант  $c_1, c_2$  и прочих неизвестных аксессуарных параметров можно воспользоваться системой

$$w(z_i^0) = A_i^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство теоремы 2 опирается на следующий известный результат ([13], с. 213).

**Теорема 3.** Пусть области  $D_1$  и  $D_1^*$  имеют жордановы границы  $\partial D_1$  и  $\partial D_1^*$ , причем  $\partial D_1$  содержит отрезок прямой или дугу окружности  $q$ , а  $\partial D_1^*$  — также отрезок или дугу  $q^*$ . Если функция  $f_1$  конформно отображает  $D_1$  на  $D_1^*$ , причем  $f_1(q) = q^*$ , то  $f_1$

допускает аналитическое продолжение в область  $D_2$ , симметричную с  $D_1$  относительно  $q$ , и продолженная так функция конформно отображает область  $D_1 \cup q \cup D_2$  на область  $D_1^* \cup q^* \cup D_2^*$ , если области  $D_1$  и  $D_2$ , а также  $D_1^*$  и  $D_2^*$  не пересекаются, где  $D_2^*$  — область, симметричная  $D_1^*$  относительно  $q^*$ .

Этот результат носит название принципа симметрии Римана–Шварца.

С помощью теоремы 1 находим отображение  $\zeta$ ,  $\zeta = \zeta(z)$ , полуполосы  $\Pi^+ \cap P'_\pi$ , где  $P'_\pi = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in (0, \pi), y \in \mathbb{R}\}$ , на полуплоскость  $\Pi^+$ ,  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ , такое, что  $\zeta(0) = 0$ ,  $\zeta(\pi) = \pi$  и бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную,

$$\zeta(z) = \pi \sin^2 \frac{z}{2}.$$

Построим отображение  $w$ ,  $w = w(\zeta)$  верхней полуплоскости  $\Pi^+$  на многоугольник  $\Delta \cap P'_\pi$ . Многоугольник  $\Delta \cap P'_\pi$  имеет  $n+1$  вершину  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0, A_{n+1}^*, A_{n+1}^* = \infty$ , и углы при вершинах соответственно  $\frac{\alpha_1}{2}\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_{n-1}\pi, \frac{\alpha_n}{2}\pi, \alpha_{n+1}^*\pi, \alpha_{n+1}^* = 0$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1) \cup (1, 2]$ . При этом отображении вершинам  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0$   $w$ -плоскости соответствуют некоторые точки  $B_1^0, B_2^0, \dots, B_n^0$  на вещественной оси  $\zeta$ -плоскости. Пусть  $B_1^0 = 0$ ,  $B_n^0 = \pi$  и бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную.

По формуле Кристоффеля–Шварца

$$w(\zeta) = c'_1 \int_0^\zeta t^{\frac{\alpha_1}{2}-1} (t - B_2^0)^{\alpha_2-1} \dots (t - B_{n-1}^0)^{\alpha_{n-1}-1} (t - \pi)^{\frac{\alpha_n}{2}-1} dt + c_2.$$

Так как  $w(0) = A_1^0$ , то  $c_2 = A_1^0$ .

Заметим, что точкам  $B_1^0, B_2^0, \dots, B_n^0$   $\zeta$ -плоскости при отображении  $\zeta(z)$  соответствуют некоторые точки  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0, z_1^0 = 0, z_n^0 = \pi$  по правилу  $B_i^0 = \pi \sin^2 \frac{z_i^0}{2}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Композиция  $w(\zeta(z))$  отображает область  $\Pi^+ \cap P'_\pi$  на область  $\Delta \cap P'_\pi$ :

$$w(\zeta(z)) = c'_1 \int_0^{\pi \sin^2 \frac{z}{2}} t^{\frac{\alpha_1}{2}-1} \left(t - \pi \sin^2 \frac{z_2^0}{2}\right)^{\alpha_2-1} \dots \left(t - \pi \sin^2 \frac{z_{n-1}^0}{2}\right)^{\alpha_{n-1}-1} (t - \pi)^{\frac{\alpha_n}{2}-1} dt + c_2.$$

По построению отображений  $\zeta(z)$  и  $w(\zeta)$  отображение  $w(\zeta(z))$  переводит точки  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0$  в вершины  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0$  многоугольника  $\Delta \cap P'_\pi$  и бесконечно удаленную точку в бесконечно удаленную. Выполнив замену  $t = \pi \sin^2 \frac{\xi}{2}$  и обозначив  $\cos z_i^0 = a_i$ , получим

$$w(z) = c_1 \int_0^z (1 - \cos \xi)^{\alpha_1/2-1} \prod_{i=2}^{n-1} (a_i - \cos \xi)^{\alpha_i-1} (1 + \cos \xi)^{\frac{\alpha_n}{2}-1} \sin \xi d\xi + c_2.$$

Часть границы области  $\Pi^+ \cap P'_\pi$  — луч  $l = \{z \in \mathbb{C} : z = \pi + iy, y > 0\}$ , отображение  $w(z)$  переводит в часть границы области  $\Delta \cap P'_\pi$  — луч  $L = \{w \in \mathbb{C} : w = A_n^0 + iv, v > 0\}$ . Продолжим отображение  $w(z)$  через луч  $l$  согласно принципу симметрии Римана–Шварца (теорема 3). Продолженное отображение  $w(z)$  переводит конформно, однолистно область  $\Pi^+ \cap P'_{2\pi}$ ,  $P'_{2\pi} = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in (0, 2\pi), y \in \mathbb{R}\}$  на область  $\Delta \cap P'_{2\pi}$ .

Заметим, что вершинам  $A_{n+1}^0, A_{n+2}^0, \dots, A_{2n-2}^0$ , симметричным вершинам  $A_2^0, A_3^0, \dots, A_{n-1}^0$  относительно прямой  $w = A_n^0 + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , соответствуют точки  $z_{n+1}^0, z_{n+2}^0, \dots, z_{2n-2}^0$ , симметричные точкам  $z_2^0, z_3^0, \dots, z_{n-1}^0$  относительно точки  $z_n^0$ .

Продолжая отображение  $w(z)$  согласно принципу симметрии последовательно через лучи  $l_k$ ,  $l_k = l + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , получим конформное, однолистное отображение  $w : \Pi^+ \rightarrow \Delta$ , представляемое интегралом (2).  $\square$

4. ПРИМЕРЫ

Для записи отображений в примерах 2, 3 используются обозначения из теории эллиптических функций [14], при получении этих отображений используется результат ([15], с. 241) (см. теорему 4).

Эллиптический интеграл первого рода в канонической форме

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{3}$$

Эллиптический интеграл третьего рода в канонической форме

$$\Pi(n, k, \phi) = \int_0^\phi \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{4}$$

Пусть  $P(x)$  — многочлен четвертой степени с действительными коэффициентами и  $a, b, c, d$  — четыре корня уравнения  $P(x) = 0$  такие, что  $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d) > 0$  (всегда можно распределить корни  $a, b, c, d$  так, чтобы это условие выполнялось). Положим  $L = a+b-c-d$ ,  $M = cd - ab$ ,  $N = ab(c+d) - cd(a+b)$ .

**Теорема 4.** Если рациональная функция  $f(z)$  такая, что тождественно будет

$$f(x) + f\left(-\frac{Mx+N}{Lx+M}\right) = 0,$$

то интеграл  $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{P(x)}}$  является псевдоэллиптическим.

Теорема справедлива и в том случае, когда многочлен  $P(x)$  третьей степени.

**Пример 1.** Пусть область  $\Delta$  есть верхняя полуплоскость с исключенными треугольниками  $E_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Вершины треугольника  $E_0$  находятся в точках  $0, \pi + ih, 2\pi$ ,  $h \in \mathbb{R}$ . Пусть  $E_k = E_0 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . В области проведены прямолинейные разрезы из точек  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , вдоль прямых  $w = 2\pi k + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , высотой  $h_1 \geq 0$  и прямолинейные разрезы из точек  $\pi(2k+1) + ih$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , вдоль прямых  $w = \pi(2k+1) + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , высотой  $h_2 \geq 0$ . Угол при основании треугольника  $E_0$  обозначим  $\gamma\pi$  (рис. 1). Тогда  $h = \pi \operatorname{tg} \gamma\pi$  и при вершинах  $ih_1, 0, \pi + i\pi \operatorname{tg} \gamma\pi, \pi + i(\pi \operatorname{tg} \gamma\pi + h_2)$  будут соответственно углы  $\alpha_1\pi = 2\pi$ ,  $\alpha_2\pi = \frac{1-2\gamma}{2}\pi$ ,  $\alpha_3\pi = \frac{1+2\gamma}{2}\pi$ ,  $\alpha_4\pi = 2\pi$ . Преобразами вершин будут точки  $0 = z_1^0 \leq z_2^0 < z_3^0 \leq z_4^0 = \pi$ .

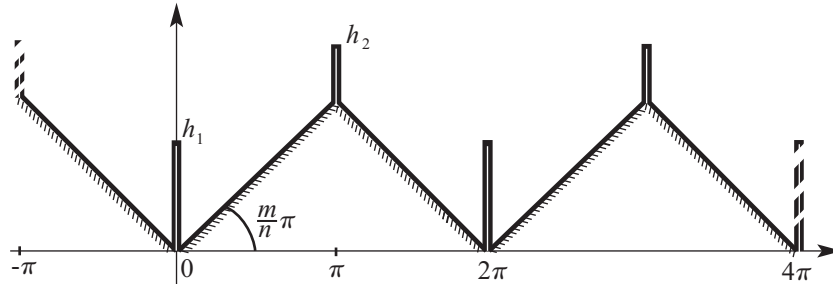


Рис. 1

Согласно теореме 2 отображение представим интегралом

$$w(z) = c_1 \int_0^z (a_2 - \cos \xi)^{\frac{1-2\gamma}{2}-1} (a_3 - \cos \xi)^{\frac{1+2\gamma}{2}-1} \sin \xi d\xi + ih_1.$$

Выполнив замену  $a_2 - \cos \xi = t(\xi)$ , получим

$$w(z) = c_1 \int_{a_2-1}^{a_2-\cos z} \frac{1}{t^{\frac{1+2\gamma}{2}} (a_3 - a_2 + t)^{\frac{1-2\gamma}{2}}} dt + ih_1.$$

Согласно теореме Чебышева интеграл выражается через элементарные функции, если  $\gamma = \pm \frac{m}{n}$ ,  $2m < n$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ . Не умаляя общности, в интеграле

$$w(z) = c_1 \int_{a_2-1}^{a_2-\cos z} \frac{1}{t^{\frac{n+2m}{2n}} (a_3 - a_2 + t)^{\frac{n-2m}{2n}}} dt + ih_1$$

будем рассматривать только положительные значения  $\gamma$ .

После замены  $g(t) = \sqrt[2n]{1 - \frac{a_2-a_3}{t}}$  имеем

$$w(z) = 2c_1 n \int_{q(0)}^{q(z)} \frac{g^{n+2m-1}}{1-g^{2n}} dg + ih_1, \quad q(z) = \sqrt[2n]{\frac{a_3 - \cos z}{a_2 - \cos z}}.$$

Согласно ([16], с. 79)

$$\begin{aligned} w(z) = c_1 & \left( (-1)^{n-1} \ln(1+q(z)) - \ln(1-q(z)) - \right. \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos \frac{2km\pi}{n} \ln \left( q^2(z) - 2q(z) \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) + \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sin \frac{2km\pi}{n} \operatorname{arctg} \left( \frac{q(z) - \cos \frac{k\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} \right) \right) + c_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_3 = -c_1 & \left( (-1)^{n-1} \ln(1+q(0)) - \ln(1-q(0)) - \right. \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos \frac{2km\pi}{n} \ln \left( q^2(0) - 2q(0) \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) + \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sin \frac{2km\pi}{n} \operatorname{arctg} \left( \frac{q(0) - \cos \frac{k\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} \right) \right) + ih_1. \end{aligned}$$

Если высоты разрезов, проведенных из точек  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , вдоль прямых  $w = 2\pi k + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , равны нулю,  $h_1 = 0$ , то  $z_2^0 = z_1^0 = 0$ . Если  $h_2 = 0$ , то точка  $z_3^0$  совпадает с точкой  $z_4^0 = \pi$ .

При  $\gamma = 1/4$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0$  отображение запишется как

$$w(z) = 2 \operatorname{arctg} i \sqrt[4]{-\operatorname{ctg}^2(z/2)} - 2i \operatorname{arctg} \sqrt[4]{-\operatorname{ctg}^2(z/2)} + \pi(1+i). \quad (5)$$

В работе [7] получено отображение на полуплоскость с исключенными треугольниками  $E_k$  при  $\gamma = 1/4$

$$f(z) = (i-1) \left[ \ln \left( \sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2} - \sqrt{\sin z} \right) + \arcsin \left( \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2} \right) \right] + C. \quad (6)$$

После несложных преобразований отображение (6) приводится к виду (5).

В работе [17] отображение полуплоскости на “бесконечную лестницу”, представляющую собой повернутую на сорок пять градусов верхнюю полуплоскость с исключенными треугольниками  $E_k$ , записано в интегральном виде.

**Пример 2.** Пусть область  $\Delta$  есть верхняя полуплоскость с исключенными прямоугольниками  $E_k$ ,  $E_0 = \{z \in \mathbb{C} : -b \leq \operatorname{Re} z \leq b, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$ ,  $b, d > 0$ ,  $b < \pi$ ,  $E_k = E_0 + 2\pi k$ . В области проведены прямолинейные разрезы из точек  $2\pi k + id$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , вдоль прямых  $w = 2\pi k + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , высотой  $h_1 \geq 0$  и прямолинейные разрезы из точек  $\pi(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , вдоль прямых  $w = \pi(2k+1) + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , высотой  $h_2 \geq 0$  (рис. 2). Вершинам счетноугольника  $i(d+h_1)$ ,  $id$ ,  $b+id$ ,  $b$ ,  $\pi$ ,  $\pi+ih_2$  соответствуют углы  $\alpha_1\pi = 2\pi$ ,  $\alpha_2\pi = \pi/2$ ,  $\alpha_3\pi = 3\pi/2$ ,  $\alpha_4\pi = \pi/2$ ,  $\alpha_5\pi = \pi/2$ ,  $\alpha_6\pi = 2\pi$ . Прообразами вершин будут точки  $0 = z_1^0 \leq z_2^0 < z_3^0 < z_4^0 < z_5^0 \leq z_6^0 = \pi$ .

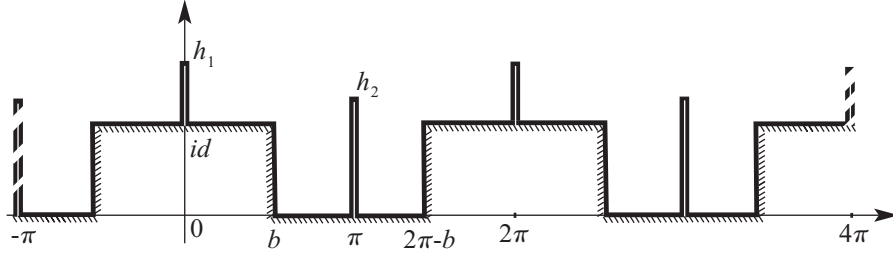


Рис. 2

Согласно теореме 2 отображение представим интегралом

$$w(z) = c_1 \int_0^z (a_2 - \cos \xi)^{-1/2} (a_3 - \cos \xi)^{1/2} (a_4 - \cos \xi)^{-1/2} (a_5 - \cos \xi)^{-1/2} \sin \xi d\xi + c_2.$$

Выполнив замену  $s(\xi) = \frac{1}{a_2 - \cos \xi}$ , получим

$$w(z) = -c_1 \sqrt{-\alpha\beta\gamma} \int_{s(0)}^{s(z)} \frac{-1/\alpha + 1/s}{\sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}} ds + c_2,$$

где  $\alpha = \frac{1}{a_2 - a_3}$ ,  $\beta = \frac{1}{a_2 - a_4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{a_2 - a_5}$ .

Согласно теореме 4 интеграл является эллиптическим.

После замены  $s(\xi) = \alpha + (\beta - \alpha)g^2(\xi)$  имеем

$$w(z) = \frac{2c_1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha - \gamma}} \left( \int_{u(0)}^{u(z)} \frac{dg}{\sqrt{(1-g^2)(1 - \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}g^2)}} - \int_{u(0)}^{u(z)} \frac{dg}{(1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha}g^2)\sqrt{(1-g^2)(1 - \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}g^2)}} \right) + c_2,$$

где

$$u(z) = \sqrt{\frac{(a_2 - a_4)(\cos z - a_3)}{(a_3 - a_4)(\cos z - a_2)}}.$$

Используя обозначения (3), (4), получим

$$w(z) = C_0 \left( F(u(z), k) - \Pi \left( -\frac{a_3 - a_4}{a_2 - a_4}, k, u(z) \right) + C_{00} \right) + i(d + h_1),$$

где

$$k = \sqrt{\frac{(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)}{(a_2 - a_4)(a_3 - a_5)}},$$

$$C_0 = 2c_1 \frac{a_2 - a_3}{\sqrt{(a_2 - a_4)(a_3 - a_5)}},$$

$$C_{00} = \Pi \left( -\frac{a_3 - a_4}{a_2 - a_4}, k, u(0) \right) - F(u(0), k).$$

Если  $h_1 = 0$ , то  $z_2^0 = z_1^0 = 0$ . Если  $h_2 = 0$ , то  $z_5^0 = z_6^0 = \pi$ .

Отображения на области из примеров 1 и 2 без разрезов в работе [18] приводятся в качестве примера, имеющего приложения в СВЧ-теории и теории волн.

**Пример 3.** Пусть область  $\Delta$  есть верхняя полуплоскость с разрезами. Из точек  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , проведены прямолинейные разрезы вдоль прямых  $w = 2\pi k + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , высотой  $h_1 > 0$ , из точек  $(2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , прямолинейные разрезы вдоль прямых  $w = (2k + 1)\pi + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , высотой  $h_2 \geq 0$  и из точек  $(2k + 1)\pi \pm b$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , прямолинейные разрезы вдоль прямых  $w = (2k + 1)\pi \pm b + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ ,  $b \in (0, \pi)$ , высотой  $h_3 > 0$  (рис. 3). При вершинах  $ih_1$ ,  $0$ ,  $\pi - b$ ,  $\pi - b + ih_3$ ,  $\pi - b$ ,  $\pi$ ,  $\pi + ih_2$  будут соответственно углы  $\alpha_1\pi = 2\pi$ ,  $\alpha_2\pi = \pi/2$ ,  $\alpha_3\pi = \pi/2$ ,  $\alpha_4\pi = 2\pi$ ,  $\alpha_5\pi = \pi/2$ ,  $\alpha_6\pi = \pi/2$ ,  $\alpha_7\pi = 2\pi$ . Преобразами вершин будут точки  $0 = z_1^0 < z_2^0 < z_3^0 < z_4^0 < z_5^0 < z_6^0 \leq z_7^0 = \pi$ .

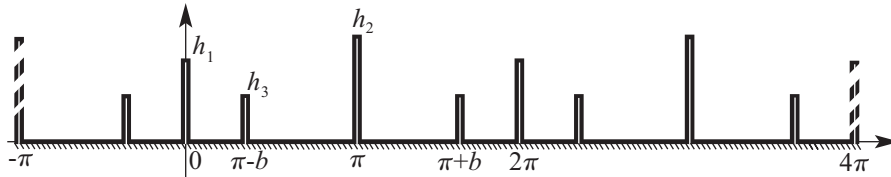


Рис. 3

Согласно теореме 2 отображение представим интегралом

$$w(z) = c_1 \int_0^z \frac{a_4 - \cos \xi}{(a_2 - \cos \xi)^{\frac{1}{2}}(a_3 - \cos \xi)^{\frac{1}{2}}(a_5 - \cos \xi)^{\frac{1}{2}}(a_6 - \cos \xi)^{\frac{1}{2}}} \sin \xi d\xi + c_2.$$

Согласно теореме 4 интеграл является псевдоэллиптическим только в том случае, если  $a_2 + a_6 = 2a_4$  и  $a_3 + a_5 = 2a_4$ . Предположим, что эти условия выполняются. Сделаем замену



$a_4 - \cos \xi = \sqrt{t}$  и введем обозначения  $a_2 - a_4 = \sqrt{\tau}$ ,  $a_3 - a_4 = \sqrt{\delta}$ , получим

$$w(z) = \frac{c_1}{2} \int_{t(0)}^{t(z)} \frac{dt}{\sqrt{(t-\tau)(t-\delta)}} + c_2.$$

Это отображение можно записать в явном виде

$$w(z) = -i \frac{c_1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{2(a_4 - \cos z)^2 - \delta - \tau}{\delta - \tau} + c_2.$$

Предположим теперь, что не выполняется условие  $a_2 + a_6 = 2a_4$  или  $a_3 + a_5 = 2a_4$ . Тогда интеграл является эллиптическим. Выполнив замену  $a_2 - \cos \xi = 1/s(\xi)$ , получим

$$w(z) = c_1 \sqrt{-\alpha\beta\gamma} \int_{s(0)}^{s(z)} \frac{a_2 - a_4 - 1/s}{\sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}} ds + c_2,$$

где  $\alpha = \frac{1}{a_2 - a_3}$ ,  $\beta = \frac{1}{a_2 - a_5}$ ,  $\gamma = \frac{1}{a_2 - a_6}$ .

После замены  $s(\xi) = \alpha + (\beta - \alpha)g^2(\xi)$  имеем

$$w(z) = \frac{2c_1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha - \gamma}} \left( \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3} \int_{u(0)}^{u(z)} \frac{dg}{\sqrt{(1-g^2)(1 - \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}g^2)}} - \int_{u(0)}^{u(z)} \frac{dg}{(1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha}g^2)\sqrt{(1-g^2)(1 - \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}g^2)}} \right) + c_2,$$

где

$$u(z) = \sqrt{\frac{(a_3 - \cos z)(a_2 - a_5)}{(a_2 - \cos z)(a_3 - a_5)}}.$$

Используя обозначения (3), (4), получим

$$w(z) = C_0 \left( \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3} F(u(z), k) - \Pi \left( \frac{a_3 - a_5}{a_2 - a_5}, k, u(z) \right) + C_{00} \right) + ih_1,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{(a_2 - a_6)(a_3 - a_5)}{(a_2 - a_5)(a_3 - a_6)}},$$

$$C_0 = 2c_1 \frac{a_2 - a_3}{\sqrt{(a_3 - a_6)(a_2 - a_5)}},$$

$$C_{00} = \Pi \left( \frac{a_3 - a_5}{a_2 - a_5}, k, u(0) \right) - \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3} F(u(0), k).$$

Если  $h_2 = 0$ , то  $a_7 = a_6 = \pi$ .

Отображение полуплоскости на полуплоскость с исключенными вертикальными разрезами одинаковой длины, начинающимися в точках  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , получено в работах [6], [10] и рассмотрено в работах [17] и ([19], с. 51). Отображение полуплоскости на плоскость с разрезами ее нижней полуплоскости по вертикальным лучам получено в работах [6], [10], [17].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. *Геометрическая и топологическая теория функций и отображений*. Т. 5 (Наук. думка, Киев, 2011).
- [2] Куфарев П.П. *Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля*, ДАН СССР **57** (6), 535–537 (1947).
- [3] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин*, Изв. вузов. Матем., № 10, 76–80 (2009).
- [4] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Одно обобщение формулы Шварца–Кристоффеля*, Сиб. журнал индустриальной математики **13** (4), 109–117 (2009).
- [5] Driscoll T.A., Trefethen L.N. *Schwarz–Christoffel mapping*. Vol. 8 of Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002).
- [6] Александров И.А. *Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса*, Изв. вузов. Матем., № 6, 15–18 (1999).
- [7] Копанев С.А., Копанева Л.С. *Формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для счетногоугольника*, Вестн. Томск. ун-та, № 280, 52–54 (2003).
- [8] Колесников И.А. *Отображение на круговой счетногоугольник с симметрией переноса*, Вестн. Томск. ун-та, № 2, 33–44 (2013).
- [9] Hassenpflug W.S. *Elliptic integrals and the Schwarz–Christoffel transformation*, Computers Math. Applic. **33** (12), 15–114 (1997).
- [10] Александров И.А., Копанева Л.С. *Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса*, Вестн. Томск. ун-та, № 284, 5–7 (2004).
- [11] Floryan J.M. *Schwarz–Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary*, J. Comput. and Applied Math., № 46, 77–102 (1993).
- [12] Brady M., Pozrikidis C. *Diffusive transport across irregular and fractal walls*, Proc. R. Soc. Lond. A. **442** (1916), 571–583 (1993).
- [13] Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ* (Наука, М., 1969).
- [14] Журавский А.М. *Справочник по эллиптическим функциям* (Изд-во АН СССР, М.–Л., 1941).
- [15] Гурса Э. *Курс математического анализа*. Т. 1 (ГТТИ, М.–Л., 1933).
- [16] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. 4-е изд. (Физматгиз, М., 1963).
- [17] Riera G., Carrasco H., Preiss R. *Schwarz–Christoffel conformal mapping for polygons with infinitely many sides*, Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences, № 2008, 1–24 (2008).
- [18] Tsarin Yu A. *Conformal mapping technique in the theory of periodic structures*, Microwave and Optical Technology Letters **26** (1), 57–61 (2000).
- [19] Волковийский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. 4-е изд. (Физматлит, М., 2004).

*И.А. Колесников*

аспирант, кафедра математического анализа,  
Томский государственный университет,  
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,  
e-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

*Л.С. Копанева*

доцент, кафедра математического анализа,  
Томский государственный университет,  
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,  
e-mail: ma@math.tsu.ru

*I.A. Kolesnikov and L.S. Kopaneva*

**Conformal mapping onto numerable polygon with double symmetry**

*Abstract.* We consider simply connected domains of half-plane type with the symmetry of transfer along the real axis by  $2\pi$  and symmetry with respect to vertical straight line  $w = \pi + iv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , with a boundary consisting of straight line segments. Conformal mapping of the half-plane onto such domains are represented by integral of Schwarz–Christoffel integral type. The proof of the result is based on Riemann–Schwarz principle of symmetry and Schwarz–Christoffel classical formula. We found several mappings on specifically defined domain.

*Keywords:* numerable polygon, conformal mapping, symmetry of transfer, elliptic integrals.

*I.A. Kolesnikov*

*Postgraduate, Chair of Mathematical Analysis,  
Tomsk State University,  
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050 Russia,*

**e-mail:** ia.kolesnikov@mail.ru

*L.S. Kopaneva*

*Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis,  
Tomsk State University,  
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050 Russia,*

**e-mail:** ma@math.tsu.ru