ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.11

В.А. МОЛЧАНОВ

НЕСТАНДАРТНЫЕ СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В работах [1]–[3] проведены исследования нестандартных сходимостей в пространствах отображений, соответствий и подмножеств пространств сходимости. Разнообразные приложения таких сходимостей в функциональном анализе и топологической алгебре получены в [1]–[5]. Данная работа посвящена исследованию нестандартных сходимостей в пространствах частичных отображений, которые играют фундаментальную роль в теории дифференциальных уравнений [6] и многочисленных приложениях нестандартного анализа (см., напр., [7], [8]). При изложении результатов используется техника нестандартного анализа [1], [9] и общепринятая топологическая терминология [10], [11].

Как обычно [1], для простоты рассуждений основные множества X рассматриваемых пространств сходимости считаются подмножествами множества атомов $\mathbf{S}$, над которым с помощью отображения $*$ строится стандартный теоретико-множественный универсум $\mathbf{U}$ и нестандартный универсум ${}^*\mathbf{U}$ по описанному в [9] принципу. При нестандартном подходе к топологии [12] произвольная сходимость [11] на множестве X определяется как соответствие $\rho \subset X \times {}^*X$, для которого все значения $\rho(a) = \{x \in {}^*X : (a,x) \in \rho\}$ $(\alpha \in X)$ являются насыщенными подмножествами [1] расширения ${}^*X$ и $a \in \rho(a)$. В частности, если сходимость на X задается топологией открытых множеств $\mathcal{O}_X$, то $\rho(a) = \cap\{{}^*A : a \in A \in \mathcal{O}_X\}$.

Пусть (X,ρ), (Y,ρ) — произвольные пространства сходимости. Согласно общепринятой классификации [6], частичное отображение (ч. отображение) f множества X в множество Y называется непрерывным, если оно непрерывно отображает замкнутое подпространство $\operatorname{dom} f \subset X$ в пространство Y. В силу теоремы 1 [2] это равносильно тому, что

$$ {}^*f \circ \rho \subset \sigma \circ f \quad \text{и} \quad \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} {}^*f) = \operatorname{dom} f. $$

Обозначим через $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}_c$) множество всех (непрерывных) ч. отображений X в Y.

Нестандартное описание непрерывных отображений приводит к следующему каноническому определению непрерывной сходимости γ в пространстве $\mathfrak{T}$ по формуле

$$ (f,h) \in \gamma \Longleftrightarrow h \circ \rho \subset \sigma \circ f \wedge \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom} f $$

(здесь $f \in \mathfrak{T}$, $h \in {}^*\mathfrak{T}$).

Чтобы обосновать корректность этого определения, рассмотрим $f \in \mathfrak{T}$, $h \in {}^*\mathfrak{T}$, удовлетворяющие $h \in \gamma(f)$. По определению это означает, что для любого $a \in X$ выполняется

$$ h(\rho(a)) \subset \sigma(f(a)) \quad \text{и} \quad a \in \operatorname{dom} f \Longrightarrow \rho(a) \cap \overset{-1}{h}({}^*Y) \neq 0. $$

В силу следствия 1.8 [1] и предложения 3.4 [3] $\gamma(f)$ является насыщенным подмножеством расширения ${}^*\mathfrak{T}$ и, следовательно, γ — нестандартная сходимость на множестве $\mathfrak{T}$. При этом соответствие γ рефлексивно на множестве $\mathfrak{T}_c$, т.к. для $f \in \mathfrak{T}$ условие ${}^*f \in \gamma(f)$ равносильно непрерывности f.

Исследование поддержано Международной Соросовской программой образования в области точных наук (подпрограмма "Соросовские доценты", грант d619).

Заметим, что по аналогии с теоремой 2.1 [1] непрерывную сходимость ч. отображений можно охарактеризовать также с помощью ч. отображения вычисления $\lambda : \mathfrak{T} \times X \to Y$, которое для $f \in \mathfrak{T}$, $x \in \operatorname{dom} f$ определяется по формуле $\lambda(f,x) = f(x)$. Сходимость ζ на множестве $\mathfrak{T}$ назовем эффективной, если для любых $f \in \mathfrak{T}$, $h \in {}^*\mathfrak{T}$ из условия $(f,h) \in \zeta$ следует $\operatorname{dom} f \subset \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h)$.

Теорема 1. *Непрерывная сходимость γ является самой слабой из эффективных сходимостей на множестве $\mathfrak{T}$, относительно которых непрерывно отображение вычисления λ.*

Доказательство. Для произвольного $f \in \mathfrak{T}$ рассмотрим такое $h \in {}^*\mathfrak{T}$, что $h \in \gamma(f)$. Тогда $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ и для любых $a \in X$, $x \in \rho(a)$ выполняется $h(x) \subset \sigma(f(a))$, или ${}^*\lambda(h,x) \subset \sigma(\lambda(f,x))$. Отсюда ${}^*\lambda \circ (\gamma \times \rho) \subset \sigma \circ \lambda$, т.е. отображение λ непрерывно относительно сходимости γ на множестве $\mathfrak{T}$. С другой стороны, пусть λ непрерывно относительно некоторой эффективной сходимости ζ на множестве $\mathfrak{T}$, т.е. выполняется ${}^*\lambda \circ (\zeta \times \rho) \subset \sigma \circ \lambda$. Тогда для любых $(f,h) \in \zeta$ при всех $a \in X$, $x \in \rho(a)$ имеем ${}^*\lambda(h,x) \subset \sigma(\lambda(f,a))$, или $h(x) \subset \sigma(f(a))$. Отсюда $h(\rho(a)) \subset \sigma(f(a))$ и в силу произвольности $a \in X$ выполняется $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$. Тогда из эффективности сходимости ζ следует равенство $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom} f$ и по определению $(f,h) \in \gamma$. Значит, $\zeta \subset \gamma$. $\square$

Предложение 1. *Если пространство сходимости (Y,σ) хаусдорфово, то непрерывная сходимость γ на множестве $\mathfrak{T}$ также хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть для $f \in \mathfrak{T}$ и $h \in {}^*\mathfrak{T}$ выполняется $(f,h) \in \gamma$, т.е. $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ и $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom} f$. Отсюда получаем $\overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho \subset \overset{-1}{\sigma} \circ \sigma \circ f \subset f$ и $\overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho \subset f$. С другой стороны, из $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ следует $h(\operatorname{im} \rho) \subset \operatorname{im} \sigma$, $\operatorname{dom} h \cap \operatorname{im} \rho \subset \overset{-1}{h}(\operatorname{im} \sigma)$ и $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) \subset \overset{-1}{\rho}(\overset{-1}{h}(\operatorname{im} \sigma))$. Следовательно, выполняется $\operatorname{dom} f \subset \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) \subset \overset{-1}{\rho}(\overset{-1}{h}(\operatorname{im} \sigma)) = \operatorname{dom}(\overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho)$, т.е. $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}(\overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho)$, $f = \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho$ и сходимость γ хаусдорфова. $\square$

На множестве $\mathfrak{T}$ введем еще одну сходимость γ_t:

$$(f,h) \in \gamma_t \Longleftrightarrow f = f\,\overline{\overset{-1}{\rho} \times \sigma}(h) \quad (f \in \mathfrak{T}, \quad h \in {}^*\mathfrak{T}).$$

В случае $h \in \gamma_t(f)$ условимся писать $f = \overset{\circ}{h}$ и называть f тенью ч. отображения h. Заметим, что в силу следствия 3.3 [3] все значения $\gamma_t(f)$ являются насыщенными подмножествами расширения ${}^*\mathfrak{T}$, т.е. γ_t является нестандартной сходимостью на множестве $\mathfrak{T}$. Из предыдущего предложения для хаусдорфова пространства сходимости (Y,σ) следует $\gamma \subset \gamma_t$.

Лемма 1. *Если отображение $h \in {}^*\mathfrak{T}$ субнепрерывно* [13] *и имеет тень $f = \overset{\circ}{h} \in \mathfrak{T}$, то $(f,h) \in \gamma$.*

Доказательство. Пусть отображение $h \in {}^*\mathfrak{T}$ субнепрерывно, т.е. $h(\operatorname{im} \rho) \subset \operatorname{im} \sigma$. Тогда из $f = \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho$ следует

$$h \circ \rho = I_{\operatorname{im} \sigma} \circ h \circ \rho \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho = \sigma \circ f.$$

Кроме того, в нашем случае $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom} f$ и, значит, $(f,h) \in \gamma$. $\square$

Следствие 1. Для компактного хаусдорфова пространства сходимости (Y,σ) на множестве $\mathfrak{T}$ выполняется $\gamma = \gamma_t$.

Теорема 2. *Пусть (X,ρ) — топологическое пространство и пространство сходимости (Y,σ) хаусдорфово и регулярно. Тогда для любого $f \in \mathfrak{T}$ условие $\gamma(f) \neq \emptyset$ равносильно непрерывности f.*

Доказательство. Если отображение f непрерывно, то ${}^*f \in \gamma(f)$ и, значит, $\gamma(f) \neq \emptyset$. Обратно, пусть для некоторого $h \in {}^*\mathfrak{T}$ выполняется $h \in \gamma(f)$. Тогда $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ и в силу предложения 1 $f = \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho$. Для доказательства непрерывности такого ч. отображения f используем технику повторных нестандартных расширений из [12]. В этом случае для нового стандартного теоретико-множественного универсума $\mathbf{U}_1$ над расширенным множеством атомов ${}^*\mathbf{S}$ с помощью отображения $\circledast$ строится нестандартный универсум ${}^{\circledast}\mathbf{U}_1$ по описанному в [9] принципу. Тогда каждая сходимость на множестве $X \subset \mathbf{S}$ помимо нестандартной интерпретации вида $\rho \subset X \times {}^*X$ имеет аналогичную нестандартную интерпретацию в форме отношения $\rho^\circ \subset X \times {}^{\circledast}X$, и монады $\mu_1\mathcal{U} = \cap\{{}^{\circledast *}A : A \in \mathcal{U}\}$ ультрафильтров $\mathcal{U}$ над множеством X разбивают расширение ${}^{\circledast *}X$ на классы эквивалентности ε_X^1. Кроме того, по теореме 1.9 [1] из условия $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ следует

$$ {}^{\circledast}h \circ \varepsilon_X^1 \circ \rho \subset \varepsilon_Y^1 \circ \sigma \circ f. $$

В результате для топологии ρ и регулярной сходимости σ выполняется

$$ {}^{\circledast}f \circ \rho^\circ = {}^{\circledast}(\overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho) \circ \rho^\circ = {}^{\circledast}\overset{-1}{\sigma} \circ {}^{\circledast}h \circ {}^{\circledast}\rho \circ \rho^\circ \subset {}^{\circledast}\overset{-1}{\sigma} \circ {}^{\circledast}h \circ \varepsilon_X^1 \circ \rho \subset {}^{\circledast}\overset{-1}{\sigma} \circ \varepsilon_Y^1 \circ \sigma \circ f = \sigma^\circ \circ f, $$

что означает непрерывность ч. отображения f. $\square$

Следствие 2. Если (X,ρ) — топологическое пространство и пространство сходимости (Y,σ) хаусдорфово и регулярно, то ч. отображение $f \in \mathfrak{T}$ в том и только том случае будет непрерывным, если оно является тенью некоторого субнепрерывного ч. отображения $h \in {}^*\mathfrak{T}$.

Доказательство. Если $f \in \mathfrak{T}_c$, то $(f, {}^*f) \in \gamma$ и тем более $(f, {}^*f) \in \gamma_t$, т.е. f — тень субнепрерывного ч. отображения ${}^*f$. Обратно, пусть для отображения $f \in \mathfrak{T}$ и субнепрерывного ч. отображения $h \in {}^*\mathfrak{T}$ выполняется $f = \overset{\circ}{h}$. Тогда по лемме 1 $(f,h) \in \gamma$ и по предыдущей теореме 2 f непрерывно. $\square$

Приведем критерий околостандартности элементов в пространстве ч. отображений с непрерывной сходимостью.

Теорема 3. *Если пространство сходимости (Y,σ) хаусдорфово, то для $h \in {}^*\mathfrak{T}$ условие $h \in \operatorname{im}\gamma$ равносильно включению*

$$ h \circ \rho \circ \overset{-1}{\rho} \circ \overset{-1}{h} \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma}. \tag{1} $$

Доказательство. Если $h \in \gamma(f)$ для некоторого $f \in \mathfrak{T}$, то $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ и, следовательно, выполняется

$$ h \circ \rho \circ \overset{-1}{\rho} \circ \overset{-1}{h} \subset \sigma \circ f \circ \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{\sigma} = \sigma \circ I_{\operatorname{im} f} \circ \overset{-1}{\sigma} \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma}. $$

Обратно, пусть для $h \in {}^*\mathfrak{T}$ выполняется (1). Тогда $h(\operatorname{im}\rho) \subset \operatorname{im}\sigma$ и для произведения $f = \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho$ получаем

$$ f \circ \overset{-1}{f} = \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho \circ \overset{-1}{\rho} \circ \overset{-1}{h} \circ \sigma \subset \overset{-1}{\sigma} \circ \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \circ \sigma = \overset{-1}{\sigma} \circ \sigma \subset I_Y. $$

Значит, $f \in \mathfrak{T}$, $h \circ \rho \subset I_{\operatorname{im}\sigma} \circ h \circ \rho \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \rho = \sigma \circ f$ и $\operatorname{dom} f = \overset{-1}{\rho}(\overset{-1}{h}(\operatorname{im}\sigma)) = \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h)$, т.е. $h \in \gamma(f)$. $\square$

Из доказанного результата и теоремы 2 получаем

Следствие 3. Если (X,ρ) — топологическое пространство и пространство сходимости (Y,σ) хаусдорфово и регулярно, то для любого $h \in {}^*\mathfrak{T}$ из (1) следует $h \in \gamma(\mathfrak{T}_c)$.

Известно [10], [14], что при описании компактных подмножеств пространств отображений центральную роль играет понятие равностепенной непрерывности, которое в нашем случае по аналогии с п. 2.6 из [1] и § 4 из [2] нестандартно интерпретируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть пространство сходимости (Y,σ) равномеризуется насыщенной эквивалентностью $\xi_Y \subset {}^*Y \times {}^*Y$ по формуле $\sigma = \xi_Y \circ I_Y$. Тогда подмножество $P \subset \mathfrak{T}$ равностепенно непрерывно в том и только том случае, если выполняется $h \circ \rho \subset \xi_Y \circ h$ для любого $h \in {}^*P$.*

Доказательство. Согласно [14] понятие равностепенной непрерывности канонически выражается через слабо равномерную сходимость. В пространстве $\mathfrak{T}$ аналогом такой сходимости является соответствие $\gamma_c \subset \mathfrak{T} \times {}^*\mathfrak{T}$, которое канонически определяется по формуле $(f,h) \in \gamma_c \Longleftrightarrow h \subset \xi_Y \circ {}^*f$, где $f \in \mathfrak{T}$, $h \in {}^*\mathfrak{T}$. Корректность этого определения следует из предложения 3.9 [3]. Согласно [14] подмножество $P \subset \mathfrak{T}$ называется равностепенно непрерывным, если непрерывно каноническое ч. отображение π множества X в множество $\mathfrak{T}_P$ всех ч. отображений P в Y, которое определяется по формуле: $\pi_x(h) = h(x)$ для $x \in X$ и $h \in P$, удовлетворяющих условию $x \in \operatorname{dom} h$. При этом множество X рассматривается со сходимостью ρ и множество $\mathfrak{T}_P$ — со слабо равномерной сходимостью γ_c. В силу теоремы 1 [2] это означает, что ${}^*\pi \circ \rho \subset \gamma_c \circ \pi$, или ${}^*\pi(\rho(a)) \subset \gamma_c(\pi_a)$ для любого $a \in X$. Это равносильно тому, что для любого $x \in \rho(a)$ справедливо ${}^*\pi_x \in \gamma_c(\pi_a)$, или по определению слабо равномерной сходимости ${}^*\pi_x \subset \xi_Y \circ {}^*\pi_a$. Последнее означает, что для любого $h \in {}^*P$ имеем ${}^*\pi_x(h) \subset \xi_Y({}^*\pi_a(h))$ или $h(x) \subset \xi_Y(h(a))$. В силу произвольности $x \in \rho(a)$ и $a \in X$ последнее условие эквивалентно $h \circ \rho \subset \xi_Y \circ h$ для любого $h \in {}^*P$. $\square$

Нестандартное определение равностепенной непрерывности естественно распространяется на случай хаусдорфового пространства сходимости (Y,σ): подмножество $P \subset \mathfrak{T}$ называется сильно равностепенно непрерывным, если для всех $h \in {}^*P$ выполняется $h \circ \rho \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \circ h$.

Предложение 2. *Пусть (Y,σ) — равномеризуемое хаусдорфово пространство сходимости. Тогда подмножество $P \subset \mathfrak{T}$ в том и только том случае будет сильно равностепенно непрерывно, если P равностепенно непрерывно и все множества $P(a) = \{h(a) : h \in P \wedge a \in \operatorname{dom} h\}$ $(a \in X)$ относительно компактны в пространстве (Y,σ).*

Напомним, что подмножество H пространства сходимости (X,ρ) называется относительно компактным, если каждый ультрафильтр над H сходится в этом пространстве, т.е. ${}^*H \subset \rho(X)$. Для замкнутого подмножества H это условие равносильно его компактности.

Теорема 5 (теорема Арцела). *Если пространство сходимости (Y,σ) хаусдорфово, то подмножество $P \subset \mathfrak{T}$ тогда и только тогда относительно компактно в пространстве сходимости $(\mathfrak{T},\gamma)$, когда оно сильно равностепенно непрерывно. Если к тому же ρ является топологией и сходимость σ регулярна, то P относительно компактно в пространстве $\mathfrak{T}_c$ с любой из сходимостей γ, γ_t.*

Доказательство. Если P относительно компактно в пространстве $(\mathfrak{T},\gamma)$, то для любого $h \in {}^*P$ при некотором $f \in \mathfrak{T}$ выполняется $h \in \gamma(f)$, т.е. $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ и $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom} f$. В нашем случае произведение $\varepsilon = \sigma \circ \overset{-1}{\sigma}$ является частичной эквивалентностью на множестве ${}^*Y$. Тогда для любого $a \in \operatorname{dom} f$ получаем $h(a) \in \sigma(f(a)) = \varepsilon(f(a))$ и

$$h(\rho(a)) \subset \sigma(f(a)) = \varepsilon(f(a)) = \varepsilon(h(a)).$$

В результате $h \circ \rho \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \circ h$ и множество P сильно равностепенно непрерывно. Обратно, если P сильно равностепенно непрерывно, то для любого $h \in {}^*P$ выполняется

$$h \circ \rho \circ \overset{-1}{\rho} \circ \overset{-1}{h} \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \circ h \circ \overset{-1}{h} \circ \sigma \circ \overset{-1}{\sigma} \subset \sigma \circ \overset{-1}{\sigma}$$

и по теореме 3 $h \in \operatorname{dom} \gamma$. Это означает, что множество P относительно компактно в пространстве сходимости $(\mathfrak{T},\gamma)$. Если к тому же ρ — топология и сходимость σ регулярна, то по следствию 3 P относительно компактно в пространстве $\mathfrak{T}_c$ со сходимостью γ. Кроме того, из $\gamma \subset \gamma_t$ следует, что P относительно компактно и в пространстве $(\mathfrak{T}_c,\gamma_t)$. $\square$

Следствие 4 (теорема Арцела для равномеризуемых пространств). Если равномеризуемое пространство сходимости (Y, σ) хаусдорфово, то подмножество $P \subset \mathfrak{T}_c$ тогда и только тогда относительно компактно в пространстве сходимости $(\mathfrak{T}, \gamma)$, когда P равностепенно непрерывно и все множества $P(a)$ $(a \in X)$ относительно компактны в пространстве сходимости (Y, σ). Если к тому же ρ является топологией и сходимость σ регулярна, то P относительно компактно в пространстве $\mathfrak{T}_c$ с любой из сходимостей γ, γ_t.

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы 5 и предложения 2.

В заключение приведем условия, при которых непрерывная сходимость γ на множестве $\mathfrak{T}_c$ является топологией. Для подмножеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ введем обозначения

$$[A] = \{f \in \mathfrak{T}_c : A \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset\},$$
$$]A[= \{f \in \mathfrak{T}_c : A \cap \operatorname{dom} f = \emptyset\},$$
$$(A, B) = \{f \in \mathfrak{T}_c : f(A) \subset B\}.$$

Множество всех открытых (соответственно, компактных) подмножеств пространства сходимости (X, ρ) обозначим символом $\mathcal{O}_X$ (соответственно $\mathcal{K}_X$).

Теорема 6. *Пусть (X, ρ), (Y, σ) — топологические пространства и топология ρ локально компактна* [10]. *Тогда непрерывная сходимость γ на множестве $\mathfrak{T}_c$ является топологией с базой*

$$\mathcal{B} = \{(K, V) : K \in \mathcal{K}_X \wedge V \in \mathcal{O}_Y\} \cup \{[V] : V \in \mathcal{O}_X\} \cup \{]K[: K \in \mathcal{K}_X\}.$$

Доказательство. Для произвольного $f \in \mathfrak{T}_c$ покажем, что значение $\gamma(f)$ совпадает с монадой $\mu\mathcal{G}$ семейства множеств

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{B} : f \in \mathcal{A}\}.$$

Пусть $h \in \gamma(f)$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$. Тогда по определению $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ и $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom} f$. Если $\mathcal{A} = [V]$ для некоторого $V \in \mathcal{O}_x$, то из $f \in [V]$ с учетом $\rho(V) \subset {}^*V$ по определению получаем

$$V \cap \operatorname{dom} f = V \cap \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) \neq \emptyset, \quad \rho(V) \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset, \quad {}^*V \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset,$$

т.е. $h \in {}^*[A]$. Если же $\mathcal{A} =]K[$ для некоторого $K \in \mathcal{K}_X$, то из $f \in]K[$ с учетом ${}^*K \subset \rho(K)$ по определению получаем

$$K \cap \operatorname{dom} f = K \cap \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dim} h) = \emptyset, \quad \rho(K) \cap \operatorname{dom} h = \emptyset, \quad {}^*K \cap \operatorname{dom} h = \emptyset,$$

т.е. $h \in {}^*]K[$. Наконец, если $\mathcal{A} = (K, V)$ для некоторых $K \in \mathcal{K}_X$, $V \in \mathcal{O}_Y$, то из $f \in (K, V)$ по определению имеем $f(K) \subset V$. Отсюда

$$h({}^*K) \subset h(\rho(K)) \subset \sigma(f(K)) \subset \sigma(V) \subset {}^*V,$$

т.е. $h \in {}^*(K, V)$. Таким образом, $h \in \mu\mathcal{G}$ и выполняется $\gamma(f) \subset \mu\mathcal{G}$.

С другой стороны, убедимся, что для любого $h \in \mu\mathcal{G}$ выполняется $h \in \gamma(f)$, т.е. $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$ и $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom} f$. По определению непрерывного отображения f для любого $a \in \operatorname{dom} f$ и произвольной окрестности $V \in O_Y$ точки $f(a)$ в локально компактном пространстве X найдется такая компактная окрестность $K \in \mathcal{K}_X$ точки a, что $f(K) \subset V$. Тогда $f \in (K, V)$ и по предположению $h \in {}^*(K, V)$. Отсюда $h({}^*K) \subset {}^*V$ и, следовательно, $h(\rho(a)) \subset {}^*V$. В силу произвольности окрестности V точки $f(a)$ последнее означает, что $h(\rho(a)) \subset \sigma(f(a))$. Если же точка $a \in X$ не принадлежит замкнутому множеству $\operatorname{dom} f$, то в локально компактном пространстве X найдется такая компактная окрестность K точки a, что $K \cap \operatorname{dom} f = \emptyset$. Тогда $f \in]K[$ и по предположению $h \in {}^*]K[$. Отсюда ${}^*K \cap \operatorname{dom} h = \emptyset$ и в силу $\rho(a) \subset {}^*K$ выполняется

$$\rho(a) \cap \operatorname{dom} h = \emptyset, \quad a \notin \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) = \operatorname{dom}(h \circ \rho).$$

Следовательно, и в этом случае

$$h(\rho(a)) = \emptyset \subset \sigma(f(a)).$$

Таким образом, для любых $a \in X$ выполняется $h(\rho(a)) \subset \sigma(f(a))$, т.е. $h \circ \rho \subset \sigma \circ f$. Отсюда, в частности, имеем $\overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h) \subset \operatorname{dom} f$. Чтобы проверить обратное включение, рассмотрим произвольную точку $a \in \operatorname{dom} f$ и соответствующий ей базис фильтра окрестностей

$$\mathcal{N} = \{V \in \mathcal{O}_X : a \in V\}$$

точки a в пространстве X. Тогда для любого $V \in \mathcal{N}$ выполняется $V \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$, т.е. $f \in [V]$ и по предположению $h \in {}^*[V]$. Отсюда ${}^*V \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$ и по лемме 1.1 [1] $\mu\mathcal{N} \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$. Так как $\mu\mathcal{N} = \rho(a)$, то $a \in \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h)$ и, следовательно,

$$\operatorname{dom} f = \overset{-1}{\rho}(\operatorname{dom} h).$$

В результате $h \in \gamma(f)$ и выполняется равенство $\gamma(f) = \mu\mathcal{G}$. $\square$

Литература

1. Молчанов В.А. *Нестандартные сходимости в пространствах отображений* // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т. 33. – № 6. – С. 141–153.
2. Молчанов В.А. *Непрерывные сходимости отображений* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 3. – С. 59–67.
3. Molchanov V.A. *Nonstandard convergences on relation algebras* // Transformation semigroups. Proc. Intern. Conf. – Essex, England, 1993. – P. 70–93.
4. Молчанов В.А. *О представлениях топологических алгебр преобразованиями* // УМН. – 1993. – Т. 48. – № 3. – С. 195–196.
5. Molchanov V.A. *Nonstandard approach to convergence relation algebras* // Alg. Colloq. – 1995. – V. 2. – № 2. – P. 117–134.
6. Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Общая топология. Основные конструкции.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 252 с.
7. Звонкин А.К., Шубин М.А. *Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений* // УМН. – 1984. – Т. 39. – № 2. – С. 77–127.
8. Картье П. *Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ* // УМН. – 1984. – Т. 39. – № 2. – С. 57–76.
9. Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т. *Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.* – М.: Мир, 1990. – 616 с.
10. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 752 с.
11. Fischer H.R. *Limestraume* // Math. Ann. – 1959. – Bd. 137. – S. 269–303.
12. Молчанов В.А. *О применении повторных нестандартных расширений в топологии* // Сиб. матем. журн. – 1989. – Т. 30. – № 3. – С. 64–71.
13. Кутателадзе С.С. *О топологических понятиях, близких к непрерывности* // Сиб. матем. журн. – 1987. – Т.28. – № 1. – С. 149–156.
14. Cook C.H., Fischer H.R. *On equicontinuity and continuous convergence* // Math. Ann. – 1967. – Bd. 173. – № 4. – S. 290–306.

Саратовский государственный педагогический институт

Поступила 11.10.1995