ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 514.755

А.Н. ПЫЖЬЯНОВА

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ ПЯТИМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $(L_2^3)_2$

Данная статья относится к классической дифференциальной геометрии линейчатых многообразий многомерных проективных пространств. Объектом ее исследования является специальный класс двупараметрических семейств двумерных плоскостей $(L_2)_2$ 5-мерного проективного пространства P_5. В ней вводится класс гиперболических семейств плоскостей $(L_2^3)_2$, у которых одна из стационарных прямых описывает не общую псевдоконгруэнцию прямых. Доказывается, что с псевдоконгруэнцией прямых инвариантно связаны три гиперболических, три слабопараболических и три параболических семейства плоскостей.

Условимся, что по индексам $i, j, k = 1, 2, 3$ суммирования нет, и если они находятся в одном и том же математическом выражении, то не принимают равные значения.

1. *Семейства* $(L_2^3)_2$. В P_5 введем проективный репер $\{A_\lambda\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\beta A_\beta, \quad \text{где} \quad d\omega_\lambda^\beta = \omega_\lambda^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \quad \lambda, \beta, \gamma = \overline{1, 6}.$$

Рассмотрим двупараметрическое семейство плоскостей $(L_2)_2$ гиперболического типа, у которого каждая плоскость имеет три действительных линейно независимых фокуса. Пусть плоскость $L_2 = (A_1 A_2 A_3)$ описывает семейство $(L_2)_2$, на котором за независимые формы примем формы ω_1^4 и ω_3^6. Как и в работе [1], отнесем семейство $(L_2)_2$ к реперу 1-го порядка, тогда будут иметь место уравнения

$$\omega_i^{3+j} = 0. \tag{1}$$

Напомним геометрический смысл репера 1-го порядка, построенного в [1]. Он состоит в том, что каждая из точек A_i является фокусом плоскости L_2 с фокальным направлением $\omega_i^{3+i} = 0$, а точка A_{3+i} находится в фокальной 3-плоскости фокуса A_i.

Продолжая эту систему, получим

$$\omega_i^j = a_i^j \omega_j + c_i^j \omega_i, \quad \omega_{3+i}^{3+j} = b_i^j \omega_i - c_i^j \omega_j, \quad \omega_2 = p_1 \omega_1 + p_3 \omega_3, \tag{2}$$

где введены обозначения $\omega_i^{3+i} = \omega_i$. Отсюда внешним дифференцированием найдем

$$\Delta a_i^j \wedge \omega_j + \Delta c_i^j \wedge \omega_i = 0, \quad \Delta b_i^j \wedge \omega_i - \Delta c_i^j \wedge \omega_j = 0,$$
$$\Delta p_1 \wedge \omega_1 + \Delta p_3 \wedge \omega_3 = 0,$$

где

$$\Delta a_i^j = da_i^j + a_i^j(2\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_{3+j}^{3+j}) - a_k^j \omega_i^k,$$
$$\Delta b_i^j = db_i^j + b_i^j(\omega_i^i - 2\omega_{3+i}^{3+i} + \omega_{3+j}^{3+j}) + b_i^k \omega_{3+k}^{3+j},$$
$$\Delta c_i^j = dc_i^j + c_i^j(\omega_j^j - \omega_{3+i}^{3+i}) + c_i^k c_k^j \omega_k + \omega_{3+i}^j,$$
$$\Delta p_1 = dp_1 + p_1(\omega_1^1 - \omega_4^4 - \omega_2^2 + \omega_5^5),$$
$$\Delta p_3 = dp_3 + p_3(\omega_3^3 - \omega_6^6 - \omega_2^2 + \omega_5^5).$$

Функции c_i^j $(j \neq 2)$ приведем к нулю за счет вторичных форм ω_{3+i}^j, а функции p_1 и p_3 — к единице за счет вторичных форм

$$\omega_1^1 - \omega_4^4 - \omega_2^2 + \omega_5^5 \ \text{ и } \ \omega_3^3 - \omega_6^6 - \omega_2^2 + \omega_5^5.$$

Введя символ дифференцирования δ по вторичным параметрам, получим для стационарной подгруппы плоскости L_2

$$\begin{gathered}
\delta(a_1^2 + c_1^2) = (a_1^2 + c_1^2)(\pi_1^1 - 2\pi_2^2 + \pi_5^5) - \pi_4^2,\\
\delta(b_1^2 - c_1^2) = (b_1^2 - c_1^2)(2\pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_5^5) + \pi_4^2,\\
\delta(a_3^2 + c_3^2) = (a_3^2 + c_3^2)(\pi_3^3 - 2\pi_2^2 + \pi_5^5) - \pi_6^2,\\
\delta(b_3^2 - c_3^2) = (b_3^2 - c_3^2)(2\pi_6^6 - \pi_3^3 - \pi_5^5) + \pi_6^2,\\
\delta a_1^2 = a_1^2(\pi_1^1 - 2\pi_2^2 + \pi_5^5), \quad \delta a_3^2 = a_3^2(\pi_3^3 - 2\pi_2^2 + \pi_5^5).
\end{gathered}$$

Функции $a_1^2 + c_1^2$ и $a_3^2 + c_3^2$ приведем к нулю за счет вторичных форм π_4^2 и π_6^2 соответственно. Тогда функции $b_1^2 - c_1^2$ и $b_3^2 - c_3^2$ становятся относительными инвариантами. Обращение в нуль этих инвариантов выделяет некоторый класс семейств $(L_2)_2$, который обозначим через $(L_2^3)_2$.

Наконец, функции a_1^2 и a_3^2 приведем к единице за счет вторичных форм $\omega_1^1 - 2\omega_2^2 + \omega_5^5$ и $\omega_3^3 - 2\omega_2^2 + \omega_5^5$.

Заметим, что согласно лемме из [2] проведенная канонизация репера корректна.

Таким образом, получили равенства

$$\begin{gathered}
c_i^j = 0 \ \ (j \neq 2), \quad p_1 = 1, \quad p_3 = 1, \quad a_1^2 = 1, \quad c_1^2 = -1,\\
b_1^2 = -1, \quad a_3^2 = 1, \quad c_3^2 = -1, \quad b_3^2 = -1,
\end{gathered}$$

в силу которых уравнения (2) принимают вид

$$\begin{gathered}
\omega_i^j = a_i^j \omega_j, \quad \omega_{3+i}^{3+j} = b_i^j \omega_i, \quad j \neq 2,\\
\omega_1^2 = \omega_3, \quad \omega_4^5 = \omega_3, \quad \omega_3^2 = \omega_1, \quad \omega_6^5 = \omega_1,\\
\omega_2 = \omega_1 + \omega_3.
\end{gathered} \tag{3}$$

Внешним дифференцированием находим

$$\begin{gathered}
\Delta a_i^j \wedge \omega_j + \omega_{3+i}^j \wedge \omega_i = 0, \quad \Delta b_i^j \wedge \omega_i - \omega_{3+i}^j \wedge \omega_j = 0, \quad j \neq 2,\\
(\theta_1 - \theta_4) \wedge \omega_3 - \omega_4^2 \wedge \omega_1 = 0, \quad (\theta_3 - \theta_6) \wedge \omega_1 - \omega_6^2 \wedge \omega_3 = 0,\\
\omega_4^2 \wedge \omega_2 - \theta_4 \wedge \omega_3 = 0, \quad \omega_6^2 \wedge \omega_2 - \theta_6 \wedge \omega_1 = 0,\\
\theta_1 \wedge \omega_1 + \theta_3 \wedge \omega_3 = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}
\theta_1 = \omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_5^5 - a_1^3\omega_1, \quad \theta_4 = \omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_6^6 + \omega_5^5,\\
\theta_3 = \omega_3^3 - \omega_2^2 - \omega_6^6 + \omega_5^5 - a_3^1\omega_3, \quad \theta_6 = \omega_1^1 - \omega_6^6 - \omega_4^4 + \omega_5^5.
\end{gathered}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned}
&\omega_1^1 = \theta_1 + \theta_3 - \theta_4 + 2\omega_2^2 - \omega_5^5 + a_1^3\omega_1 + a_3^1\omega_3,\\
&\omega_3^3 = \theta_3 + \theta_1 - \theta_6 + 2\omega_2^2 - \omega_5^5 + a_3^1\omega_3 + a_1^3\omega_1,\\
&\omega_4^4 = \theta_3 - \theta_4 + \omega_2^2 + a_3^1\omega_3,\\
&\omega_6^6 = \theta_1 - \theta_6 + \omega_2^2 + a_1^3\omega_1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Наиболее общее алгебраическое решение системы (4) имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta a_i^j = a_{ij}^j\omega_j + a_{ii}^j\omega_i, \quad \omega_{3+i}^j = a_{ii}^j\omega_j + b_{ij}^j\omega_i,\\ \Delta b_i^j = b_{ii}^j\omega_i - b_{ij}^j\omega_j, \quad j \neq 2,\\ \omega_4^2 = a_4\omega_2 + b_4\omega_3, \quad \theta_4 = -b_4\omega_2 + c_4\omega_3,\\ \omega_6^2 = a_6\omega_2 + b_6\omega_1, \quad \theta_6 = -b_6\omega_2 + c_6\omega_1,\\ \theta_1 = b\omega_3 - (a_4 + 2b_4)\omega_1, \quad \theta_3 = b\omega_1 - (a_6 + 2b_6)\omega_3\end{gathered} \tag{6}$$

и зависит от $N = 23$ параметров.

Замкнутая система уравнений (1), (3), (4), определяющая семейство $(L_2^3)_2$, находится в инволюции с характерами $S_1 = 13$, $S_2 = 5$, т. е. доказана

Теорема. *Семейство $(L_2^3)_2$ существует с произволом пяти функций двух аргументов.*

2. *Геометрические свойства.* Прямая (A_1A_3) по терминологии Р.М. Гейдельмана [3] описывает псевдоконгруэнцию. Это не общая псевдоконгруэнция, т. к. псевдоконгруэнция прямых в P_5 существует с произволом шести функций двух аргументов.

Заметим, что система уравнений (1), (3), (4) переходит в себя при помощи подстановки индексов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Рассмотрим точки $N = A_1 - A_3$, $M_4 = A_2 - A_4$, $M_6 = A_2 - A_6$. Докажем, что плоскость

$$(A_1NM_4) \tag{8}$$

описывает гиперболическое семейство. Действительно, из уравнений

$$\begin{gathered} dA_1 = \omega_1^1A_1 + \omega_3A_2 + \omega_1^3A_3 + \omega_1A_4,\\ dN = (\omega_3^3 - \omega_1^3)N + (\theta_6 - \theta_4 + \omega_1^3 - \omega_3^1)A_1 - \omega_1M_4 + \omega_3M_6\end{gathered}$$

следует, что точки A_1 и N являются фокусами плоскости (8) соответственно с фокальными направлениями $\omega_2 = 0$ и $\omega_3 = 0$. Так как

$$d(A_1NM_4) \equiv (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)(A_1NM_4)(\operatorname{mod} \omega_1, \omega_3),$$

то плоскость (8), проходящая через прямую (A_1A_3), инвариантно связана с ней. Если точка $F_1 = x^1A_1 + x^3A_3 + x^2M_4$ есть фокус плоскости (8), то $(dF_1A_1A_3M_4) = 0$ и приходим к системе уравнений

$$\omega_2x^1 + \omega_1x^3 + (\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_4^2)x^2 = 0, \quad \omega_3x^3 - b_1^3\omega_1x^2 = 0, \quad \omega_1x^2 = 0. \tag{9}$$

Эта система имеет ненулевое решение, если $\Delta = \omega_2\omega_3\omega_1 = 0$.

Осталось исследовать случай, когда $\omega_1 = 0$. Тогда $x^3 = 0$ и первое уравнение (9) в силу (5), (6) определяет координаты фокуса $F_1 = t_1A_1 + M_4$, где $t_1 = 2(b_4 - b_6) + a_4 - a_6 - c_4 + a_3^1$.

Аналогично, в силу подстановки (7) следует, что плоскость (A_3NM_6) описывает гиперболическое семейство.

Докажем, что каждая из плоскостей

$$\lambda)\ \ (A_1N, A_4 + A_6 - 2A_2), \quad \beta)\ \ (A_1A_3A_4), \quad \gamma)\ \ (A_1A_3A_6) \tag{10}$$

описывает параболическое семейство. Легко показать, что каждая из этих плоскостей инвариантно связана с прямой (A_1A_3).

Пусть точка $F = x^1A_1 + x^3N + x^4(A_4 + A_6 - 2A_2)$ является фокусом плоскости (10λ). Тогда получим систему уравнений

$$\omega_2x^4 = 0, \quad \omega_3x^1 - \omega_2x^3 + \omega x^4 = 0, \quad \omega_1x^1 + \omega_2x^3 + \theta x^4 = 0,$$

где

$$\omega = 2(\omega_6^6 - \omega_2^2 + \omega_4^6) + \omega_4^2 + \omega_6^2, \quad \theta = \omega_4^4 - \omega_6^6 - \omega_4^6 + \omega_6^4.$$

Эта система имеет ненулевое решение, если ее определитель $(\omega_2)^3 = 0$. Имеем единственное трехкратное фокальное направление единственного трехкратного фокуса $F = N$ плоскости (10λ), ч. т. д.

Если точка $F = x^1 A_1 + x^3 A_3 + x^4 A_4$ является фокусом плоскости (10β), то будут иметь место уравнения

$$\omega_3 x^1 + \omega_1 x^3 + \omega_4^2 x^4 = 0, \quad \omega_3 x^3 + \omega_4^6 x^4 = 0, \quad \omega_3 x^4 = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если $(\omega_3)^3 = 0$. Получим один трехкратный фокус $F = A_1$ плоскости (10β) с фокальным направлением $\omega_3 = 0$.

В силу подстановки (7) заключаем, что плоскость (10γ) описывает параболическое семейство с трехкратным фокусом в точке A_3 и фокальным направлением $\omega_1 = 0$.

Из уравнения $(A_1 A_3, N N_2) = -1$ находим, что $N_2 = A_1 + A_3$, а из сравнений

$$dN \equiv (\omega_1^1 - a_3^1 \omega_1) A_1 - (\omega_3^3 - a_1^3 \omega_1) A_3 + \omega_1 (A_4 - A_6) (\operatorname{mod} \omega_3 - \omega_1),$$
$$dN_2 \equiv (\omega_1^1 + a_3^1 \omega_1) A_1 + (\omega_3^3 + a_1^3 \omega_1) A_3 + \omega_1 (A_4 - A_6) (\operatorname{mod} \omega_2)$$

следует, что точки N и N_2 являются фокусами плоскости $(N N_2, A_4 - A_6)$ с фокальными направлениями $\omega_3 - \omega_1 = 0$ и $\omega_3 + \omega_1 = 0$. Легко показать, что фокус N является двукратным и, следовательно, плоскость $(N N_2, A_4 - A_6)$ описывает слабопараболическое семейство плоскостей.

Уравнение $(N A_3, A_1 N_1) = -1$ определяет точку $N_1 = A_1 - 2A_3$, а сравнения

$$dA_1 \equiv \omega_1^1 A_1 - 2a_1^3 \omega_1 A_3 + \omega_1 (A_4 - 2A_2) (\operatorname{mod} \omega_3 + 2\omega_1),$$
$$dN_1 \equiv (\omega_1^1 - 2a_3^1 \omega_1) A_1 - 2a_3^1 \omega_1 A_3 + \omega_1 (A_4 - 2A_2) (\operatorname{mod} \omega_3)$$

показывают, что для плоскости $(A_1 N_1, A_4 - 2A_2)$ точки A_1 и N_1 являются фокусами с фокальными направлениями $\omega_3 + 2\omega_1 = 0$ и $\omega_3 = 0$ соответственно. Эта плоскость не имеет других фокусов, а фокус A_1 является двукратным и, следовательно, рассматриваемая плоскость описывает слабопараболическое семейство плоскостей.

Аналогично, в силу подстановки (7) заключаем, что плоскость $(A_3 N_3, A_6 - 2A_2)$, где $N_3 = A_3 - 2A_1$, описывает слабопараболическое семейство с двукратным фокусом A_3, фокусом N_3 и фокальными направлениями $\omega_1 + 2\omega_3 = 0$, $\omega_1 = 0$ соответственно.

Таким образом, прямой $(A_1 A_3)$, описывающей псевдоконгруэнцию, инцидентны девять инвариантно связанных с ней плоскостей, три из которых описывают гиперболические семейства плоскостей, другие три — слабопараболические семейства и оставшиеся три плоскости описывают параболические семейства плоскостей.

Литература

1. Макеев Г.Н. *Пары T двупараметрических семейств $(n-1)$-плоскостей в $(2n-1)$-мерном проективном пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 10. – С. 49–60.
2. Остиану Н.М. *О канонизации подвижного репера погруженного многообразия* // Rev. math. pures et appl. (RPR). – 1962. – V. 7. – № 2. – P. 231–240.
3. Гейдельман Р.М. *Теория аналитических конгруэнций плоскостей в комплексных и двойных унитарных неевклидовых пространствах и проективная теория конгруэнций пар плоскостей* // Матем. сб. – 1959. – Т. 49. – № 3. – С. 281–316.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила 11.03.2003