ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.75

М.А. ЧЕШКОВА

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БИАНКИ n-ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^{2n-1}

В евклидовом пространстве E^{2n-1} рассматривается преобразование Бианки $f : M \to \overline{M}$ гладких n-поверхностей.

На поверхности M определены две метрики: собственная $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$, где $X, Y \in TM$, $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в E^{2n-1}, и метрика $\bar g(X,Y) = \langle dfX, dfY\rangle$, индуцируемая отображением f, и две связности Леви-Чивита ∇, $\overline{\nabla}$ этих метрик соответственно.

Теорема. *Если $f : M \to \overline{M}$ — преобразование Бианки гладких n-поверхностей, то имеют место формулы*

$$R^{\perp}(X,Y)\alpha(Z,V) = \alpha(\overline{R}(X,Y)Z + \frac{1}{\rho^2}\bar g(Y,Z)X - \frac{1}{\rho^2}\bar g(X,Z)Y, V), \tag{1}$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\alpha(Z,V), \alpha(U,V)\rangle = \frac{1}{\rho^2}\bar g(\overline{R}(X,Y)Z + \frac{1}{\rho^2}\bar g(Y,Z)X - \frac{1}{\rho^2}\bar g(X,Z)Y, U), \tag{2}$$

где $X,Y,Z,U,V \in TM$, $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V$, $p \in M$, $|V| = 1$, $\rho = const$, $R^{\perp}$ — тензор кривизны нормальной связности на M, $\overline{R}$ — тензор кривизны связности $\overline{\nabla}$, α — вторая фундаментальная форма поверхности M.

Следствие 1. Если f — преобразование Бианки, то следующие утверждения эквивалентны:

1) нормальная связность $\nabla^{\perp}$ плоская,
2) поверхность $\overline{M}$ локально есть пространство постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{\rho^2}$.

Доказательство. Если $R^{\perp}(X,Y)\xi = 0\ \forall\xi \in T^{\perp}M$, то $R^{\perp}(X,Y)\alpha(Z,V) = 0$ и из (2) следует, что $\overline{M}$ имеет постоянную кривизну $-\frac{1}{\rho^2}$. Обратно, если $\overline{R}(X,Y)Z = -\frac{1}{\rho^2}(\bar g(Y,Z)X - \bar g(X,Z)Y)$, то из (2) следует $\langle R^{\perp}(X,Y)\alpha(Z,V), \alpha(U,V)\rangle = 0$. Пусть X_i $(i = 1,\dots,n-1)$ — базис $\Delta^{\omega}(p)$. Тогда в силу (6) векторы $\xi_i = dfX_i = \alpha(X_i, V)$ — базис $T_p^{\perp}M$. Имеем $\langle R^{\perp}(X,Y)\xi_i, \xi_j\rangle = 0$. Откуда следует $R^{\perp}(X,Y)\xi_i = 0$ и $R^{\perp}(X,Y)\xi = 0\ \forall\xi \in T^{\perp}M$. $\square$

В силу симметричности построения, если f — преобразование Бианки, то и f^{-1} — преобразование Бианки. Поэтому имеет место

Следствие 2. Если f — преобразование Бианки, то следующие утверждения эквивалентны:

1) нормальные связности поверхностей M, $\overline{M}$ плоские,
2) поверхности M, $\overline{M}$ локально суть пространства постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{\rho^2}$.

В частности, при $n = 2$ имеем $R^{\perp} = 0$ и получаем известный результат: если f — преобразование Бианки поверхностей в E^3, то M, $\overline{M}$ имеют постоянную отрицательную кривизну ([4], с. 489).

Если M — область пространства Лобачевского L_n, погруженного в E^{2n-1}, то [5] нормальная связность плоская и преобразование Бианки [5] переводит M в область пространства Лобачевского той же кривизны.

Перейдем к доказательству теоремы.

1. *Основные формулы.* Пусть $\mathcal{F}(M)$ — R-алгебра дифференцируемых на M функций, $T^q_s(M)$ — $\mathcal{F}$-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (s,q), ∂ — дифференцирование в E^{2n-1}. Формулы Гаусса-Вейнгартена ([1], с. 23) поверхности M имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \\ \partial_X \xi &= -\underset{\xi}{A}X + \nabla^{\perp}_X \xi, \end{aligned} \tag{3}$$

где $X, Y \in TM$, ∇ — связность Леви-Чивита метрики g, α — вторая фундаментальная форма поверхности M, $\nabla^{\perp}$ — нормальная связность, $\underset{\xi}{A} \in T^1_1(M)$ — оператор Вейнгартена, соответствующий $\xi \in T^{\perp}M$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци ([1], с. 29)

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \underset{\alpha(Y,Z)}{A}X - \underset{\alpha(X,Z)}{A}Y, \\ R^{\perp}(X,Y)\xi &= \alpha(X, \underset{\xi}{A}Y) - \alpha(Y, \underset{\xi}{A}X), \\ g(\underset{\xi}{A}X, Y) &= \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ — тензор кривизны связности ∇, $R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$ — тензор кривизны нормальной связности $\nabla^{\perp}$.

Пусть $r(p)$ — радиус-вектор точки $p \in M$, $\bar r(f(p))$ — радиус-вектор точки $f(p) \in \overline{M}$. Тогда отображение $f : M \to \overline{M}$ запишется в виде

$$\bar r = f(r) = r + \rho V, \tag{5}$$

где $V \in E^{2n-1}$ — орт.

Отображение (5) есть преобразование Бианки, если $\rho = \mathrm{const}$, $V_p \in T_pM$, а T_pM есть линейная оболочка $L(V_p, T^{\perp}_{f(p)}\overline{M})$ и $T_{f(p)}\overline{M}$ есть линейная оболочка $L(V_p, T^{\perp}_p M)$.

Рассмотрим форму $\omega \in T^0_1 M$, определяемую равенством $\omega(X) = g(X,V)$, $X \in TM$. На M определено распределение

$$\Delta^{\omega}(p) = \{X_p \in T_pM : \omega(X_p) = 0\}.$$

Тогда $T^{\perp}_{f(p)}\overline{M} = \Delta^{\omega}(p)$.

Дифференциал отображения f определится из равенства

$$df X = df(\partial_X r) = \partial_X \bar r, \quad X \in TM.$$

Дифференцируем (4). Используя (3), получим

$$df X = X + \rho(\nabla_X V + \alpha(X,V)).$$

Для $X \in TM$ рассмотрим разложение

$$X = X^1 + \omega(X)V, \quad X^1 \in \Delta^{\omega}.$$

Так как $g(V,V) = 1$, то $(\nabla_X V)^1 = \nabla_X V$.

Имеем

$$df X = X^1 + \omega(X)V + \rho(\nabla_X V)^1 + \rho\alpha(X,V).$$

По условию $df X_p \perp \Delta^{\omega}(p)$. Следовательно,

$$df X = \omega(X)V + \rho\alpha(X,V), \tag{6}$$

$$\nabla_X V = -\frac{1}{\rho}X + \frac{1}{\rho}\omega(X)V. \tag{7}$$

Используя (6), получим

$$\bar g(X,Y) = \rho^2\langle \alpha(X,V), \alpha(Y,V)\rangle + \omega(X)\omega(Y). \tag{8}$$

Из (7) вытекает, что векторное поле V торсообразующее [2] и что $d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) = 0$, т. е. форма ω замкнута, и распределение Δ^ω инволютивно.

Связность $\overline{\nabla}$ Леви-Чивита метрики $\bar{g}$ определится из условия, что разность $\bar{\alpha}(X,Y) = \partial_X dfY - df\overline{\nabla}_X Y$ для $X, Y \in TM$ принадлежит Δ^ω. Используя (3), (6), получим

$$\bar{\alpha}(X,Y) = (X\omega(Y))V + \omega(Y)\Big(-\frac{1}{\rho}X + \frac{1}{\rho}\omega(X)V + \alpha(X,V)\Big) - \\ -\rho \underset{\alpha(Y,V)}{A} X + \rho\nabla^\perp_X \alpha(Y,V) - \omega(\overline{\nabla}_X Y)V - \rho\alpha(\overline{\nabla}_X Y, V).$$

Приравниваю нулю нормальные составляющие и составляющие вдоль V, имеем

$$\nabla^\perp_X \alpha(Y,V) = \alpha(\overline{\nabla}_X Y, V) - \frac{1}{\rho}\omega(Y)\alpha(X,V) \tag{9}$$

и

$$(\overline{\nabla}_X \omega)(Y) - \rho\omega(\underset{\alpha(Y,V)}{A} X) = 0,$$

где $(\overline{\nabla}_X \omega)(Y) = X\omega(Y) - \omega(\overline{\nabla}_X Y)$ — ковариантная производная ω в связности $\overline{\nabla}$.

В силу (4) имеем

$$\rho\omega(\underset{\alpha(Y,V)}{A} X) = \rho g(\underset{\alpha(Y,V)}{A} X, V) = \rho\langle\alpha(Y,V), \alpha(X,V)\rangle = \frac{1}{\rho}\bar{g}(X,Y) - \frac{1}{\rho}\omega(X)\omega(Y).$$

Таким образом,

$$(\overline{\nabla}_X \omega)(Y) + \frac{1}{\rho}\omega(X)\omega(Y) = \frac{1}{\rho}\bar{g}(X,Y). \tag{10}$$

2. *Доказательство теоремы.* В силу (3) и (9) получим

$$\nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \alpha(Z,V) = \nabla^\perp_X \alpha(\overline{\nabla}_Y Z, V) - \frac{1}{\rho}(X\omega(Z))\alpha(Y,V) - \\ -\frac{1}{\rho}\omega(Z)\nabla^\perp_X \alpha(Y,V) = \alpha(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z, V) - \\ -\frac{1}{\rho}\omega(\overline{\nabla}_Y Z)\alpha(X,V) - \frac{1}{\rho}(X\omega(Z))\alpha(Y,V) - \\ -\frac{1}{\rho}\omega(Z)(\alpha(\overline{\nabla}_X Y, V) - \frac{1}{\rho}\omega(Y)\alpha(X,V)).$$

Откуда

$$R^\perp(X,Y)\alpha(Z,V) = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \alpha(Z,V) - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \alpha(Z,V) - \\ -\nabla^\perp_{[X,Y]}\alpha(Z,V) = \alpha(\overline{R}(X,Y)Z, V) - \frac{1}{\rho}((\overline{\nabla}_X \omega)(Z) + \\ +\frac{1}{\rho}\omega(Z)\omega(X))\alpha(Y,V) + \frac{1}{\rho}((\overline{\nabla}_Y \omega)(Z) + \frac{1}{\rho}\omega(Z)\omega(Y))\alpha(X,V).$$

Используя (10), получим формулу (1).

Докажем формулу (2). Умножим скалярно (1) на $\alpha(U,V)$ и используем (4), (8). Имеем

$$\langle R^\perp(X,Y)\alpha(Z,V), \alpha(U,V)\rangle = \\ = \frac{1}{\rho^2}\bar{g}(\overline{R}(X,Y)Z + \frac{1}{\rho^2}\bar{g}(Y,Z)X - \frac{1}{\rho^2}\bar{g}(X,Z)Y, U) - \\ -\frac{1}{\rho^2}\omega(\overline{R}(X,Y)Z + \frac{1}{\rho^2}\bar{g}(Y,Z)X - \frac{1}{\rho^2}\bar{g}(X,Z)Y)\omega(U).$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Запишем (10) в локальных координатах

$$\overline{\nabla}_j \omega_k + \frac{1}{\rho}\omega_j \omega_k = \frac{1}{\rho}\bar{g}_{jk} \quad (i, j \dots = 1, \dots, n).$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$\overline{\nabla}_j \overline{\nabla}_j \omega_k + \frac{1}{\rho}(\overline{\nabla}_i \omega_j)\omega_k + \frac{1}{\rho}\omega_j(\overline{\nabla}_i \omega_k) = 0,$$

или

$$\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j \omega_k + \frac{1}{\rho^2}\bar{g}_{ij}\omega_k + \frac{1}{\rho^2}\bar{g}_{ik}\omega_j = 0.$$

Так как ([3], с. 126)

$$\overline{\nabla}_i \overline{\nabla}_j \omega_k - \overline{\nabla}_j \overline{\nabla}_i \omega_k = -\overline{R}^m_{kij}\omega_m,$$

то

$$\overline{R}^m_{kij}\omega_m + \frac{1}{\rho^2}\bar{g}_{jk}\omega_i - \frac{1}{\rho^2}\bar{g}_{ik}\omega_j = 0,$$

или

$$\omega(\overline{R}(X, Y)Z + \frac{1}{\rho^2}\bar{g}(Y, Z)X - \frac{1}{\rho^2}\bar{g}(X, Z)Y) = 0. \quad \square$$

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
2. Schouten J.A. *Ricci Calculus.* – Berlin: Springer, 1954. – 516 с.
3. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
4. Шуликовский В.И. *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении.* – М.: ГИФМЛ, 1963. – 540 с.
5. Аминов Ю.А. *Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского* // Укр. геом. сб. – Харьков, 1978. – Вып. 21. – С. 3–5.

Алтайский государственный университет

Поступила
02.06.1995