ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 517.51

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ЛАГРАНЖА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Введение

Хорошо известно, что интерполяционные полиномы Лагранжа находят многообразные применения в различных областях математики и ее приложений. Поэтому для них еще со времен Ньютона и Лагранжа установлены многочисленные как положительные, так и отрицательные результаты (см., напр., [1]–[6] и др.). В частности, доказано, что даже при благоприятном стечении обстоятельств (т.е. выборе узлов, меры погрешности, классов приближаемых функций и т.п.) интерполяционные многочлены по своим аппроксимативным свойствам уступают соответствующим многочленам наилучшего приближения; например, это так в наиболее часто применяемых стандартных пространствах непрерывных функций $C_{2\pi}$ и $C[a,b]$ и тем более — в пространствах суммируемых по Лебегу со степенью p $(1 \le p < \infty)$ 2π-периодических функций $L_p(0,2\pi)$ и в аналогичном весовом пространстве непериодических функций $L_{p,\rho}(a,b)$, где ρ — весовая функция интервала (a,b).

В данной работе устанавливается несколько неожиданный (в связи со сказанным выше) результат, кстати также продиктованный необходимостью решения ряда прикладных задач (см., напр., в [7]), в первую очередь задач математического моделирования в электродинамике:

в пространствах Соболева интерполяционные многочлены Лагранжа с равноотстоящими попарно неэквивалентными узлами в периодическом случае и с узлами Чебышева первого рода в непериодическом случае (эти случаи приходится различать по соображениям принципиального характера) *приближают с такой же скоростью, что и соответствующие многочлены наилучшего приближения.*

Неожиданность этого результата состоит в том, что в других известных нам функциональных пространствах интерполяционные многочлены Лагранжа таким свойством не обладают.

1. Приближения тригонометрическими интерполяционными полиномами

Пусть $\tilde{C} = C_{2\pi}$ и $L_2 = L_2(0,2\pi)$ — пространства непрерывных и соответственно квадратично суммируемых по Лебегу 2π-периодических функций с нормами соответственно

$$\|x\|_{C_{2\pi}} = \max_s |x(s)| \equiv \|x\|_\infty, \quad x \in C_{2\pi};$$

$$\|x\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x(\sigma)|^2\, d\sigma\right)^{1/2} \equiv \|x\|_2, \quad x \in L_2.$$

Обозначим через $W_2^r = W_2^r(0,2\pi)$, где r — произвольное положительное число, пространство функций, имеющих обобщенные производные $D^r x(s) = x^{(r)}(s)$ порядка $r \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условию $x^{(r)} \in L_2(0,2\pi)$; здесь $x^{(r)}(s)$ при $r \in \mathbb{N}$ означает обобщенную производную в смысле Соболева, а при $r \notin \mathbb{N}$ — дробную производную в смысле Вейля (см., напр., [3], [5]). В пространстве W_2^r наиболее употребительными являются следующие нормы[1]:

$$\|x\|_{W_2^r} = \|x\|_2 + \|x^{(r)}\|_2 \equiv \|x\|_{(1)}; \tag{1.1}$$

$$\|x\|_{W_2^r} = \|x\|_\infty + \|x^{(r)}\|_2 \equiv \|x\|_{(2)}; \tag{1.2}$$

$$\|x\|_{W_2^r} = \Big\{ |c_0(x)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2r} \, |c_k(x)|^2 \Big\}^{1/2} \equiv \|x\|_{(3)}, \quad r > 1/2, \tag{1.3}$$

где $x = x(s) \in W_2^r$ $(r > 0)$, а $c_k(x)$ — комплексные коэффициенты Фурье функции $x(s)$:

$$c_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) e^{-ik\sigma} \, d\sigma, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Пусть $\mathcal{L}_n x = \mathcal{L}_n(x; s)$ — интерполяционный полином Лагранжа функции $x(s) \in C_{2\pi}$ по узлам

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{0, 2n}, \quad n+1 \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Известно, что для $x \in C_{2\pi}$

$$\mathcal{L}_n(x; s) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x(s_k) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s - s_k)}{\sin \frac{s - s_k}{2}} = \sum_{k=-n}^{n} c_{k,n}(x) \, e^{iks}, \tag{1.5}$$

где

$$c_{k,n}(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} x(s_j) \, e^{-iks_j} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} e^{-iks_j} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_k(x) \, e^{irs_j} =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+m(2n+1)}(x), \quad k = \overline{-n, n}, \; n+1 \in \mathbb{N}, \; i = \sqrt{-1}, \tag{1.6}$$

— комплексные коэффициенты Фурье-Лагранжа функции $x \in C_{2\pi}$.

Пусть $\mathbb{H}_n^T$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n. Обозначим через $E_n^T(\varphi)_{(j)}$ наилучшее приближение функции $x(s) \in W_2^r$ полиномами из $\mathbb{H}_n^T$ в пространстве W_2^r с любой из введенных выше норм (1.1)–(1.3), точнее

$$E_n^T(x)_{W_2^r} = \inf\{\|x - T_n\|_{(j)} \, : \, T_n \in \mathbb{H}_n^T\} \equiv E_n^T(x)_{(j)}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Тогда легко показать, что для $x \in W_2^r$

$$E_n^T(x)_{(1)} = E_n^T(x)_2 + E_n^T(D^r x)_2,$$
$$E_n^T(x)_{(2)} = E_n^T(x)_\infty + E_n^T(D^r x)_2;$$
$$E_n^T(x)_{(3)} = E_n^T(D^r x)_2 \; (r > 1/2),$$

где $E_n^T(x)_2$ и $E_n^T(x)_\infty$ — наилучшие приближения функции $x(s)$ полиномами из $\mathbb{H}_n^T$ в пространствах соответственно $L_2(0, 2\pi)$ и $C_{2\pi}$.

В дальнейшем существенную роль играет следующая

---

[1] Нетрудно показать, что нормы (1.1)–(1.3) являются эквивалентными, точнее,

$$\|x\|_{(3)} \le \|x\|_{(1)} \le \|x\|_{(2)} \le a \, \|x\|_{(3)}, \quad x \in W_2^r \quad (2r > 1),$$

где $0 < a = a(r) \le \sqrt{2} \left(1 + \sqrt{2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2r}} \right) < \infty$.

Лемма 1. *Для любой функции $x(s) \in W_2^r$ при $r > 1/2$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие двусторонние оценки:*

$$E_n^T(D^r x)_2 \le \|D^r[x - \mathcal{L}_n x]\|_2 \le E_n^T(D^r x)_2 \left\{ 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2r} \right\}^{1/2}. \tag{1.7}$$

Доказательство. В силу (1.5), (1.6) для функции $x \in C_{2\pi}$ имеем

$$\mathcal{L}_n(x;s) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+m(2n+1)}(x) = S_n(x;s) + \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} \sum_{|m|=1}^{\infty} c_{k+m(2n+1)}(x), \tag{1.8}$$

где $S_n(x;s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(x)\, e^{iks}$ есть $(2n+1)$-й отрезок ряда Фурье функции $x(s)$. Поэтому для $x \in C_{2\pi}$ справедливы представления

$$\begin{aligned} x(s) - \mathcal{L}_n(x;s) &= [x(s) - S_n(x;s)] + [S_n(x;s) - \mathcal{L}_n(x;s)] = \\ &= \sum_{|k|=n+1}^{\infty} c_k(x)\, e^{iks} + \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} \sum_{|m|=1}^{\infty} c_{k+m(2n+1)}(x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отсюда, используя в случае необходимости (т.е. при $r \notin \mathbb{N}$) аппарат дробного дифференцирования и интегрирования (см., напр., [5], гл. 11), для функции $x(s) \in W_2^r$ последовательно находим

$$\begin{aligned} D^r[x(s) - \mathcal{L}_n(x;s)] &= \sum_{|k|=n+1}^{\infty} (ik)^r c_k(x)\, e^{iks} + \\ &+ \sum_{|k|=1}^{n} (ik)^r\, e^{iks} \sum_{|m|=1}^{\infty} [i(k+m(2n+1)]^{-r} c_{k+m(2n+1)}(D^r x) = \\ &= \sum_{|k|=n+1}^{\infty} c_k(D^r x)\, e^{iks} + \sum_{|k|=1}^{n} e^{iks} \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+m(2n+1)} \Big)^r c_{k+m(2n+1)}(D^r x). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.10) с помощью равенства Парсеваля и неравенства Гёльдера для $x \in W_2^r$ $(r > 1/2)$ получаем

$$\begin{aligned} \|D^r(x - \mathcal{L}_n x)\|_2^2 &= \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(D^r x)|^2 + \\ &+ \sum_{|k|=1}^{n} \Big| \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+m(2n+1)} \Big)^r c_{k+m(2n+1)}(D^r x) \Big|^2 \le \\ &\le E_n^T(D^r x)_2^2 + (\alpha_n^2 - 1) \sum_{|k|=1}^{n} \sum_{|m|=1}^{\infty} |c_{k+m(2n+1)}(D^r x)|^2 \le \alpha_n^2\, E_n^T(D^r x)_2^2, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\alpha_n^2 = \max_{k=\pm1,\dots,\pm n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big| \frac{k}{k+m(2n+1)} \Big|^{2r}. \tag{1.12}$$

Поэтому

$$\|D^r(x - \mathcal{L}_n x)\|_2 \le \alpha_n\, E_n^T(D^r x)_2, \quad x \in W_2^r,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Из (1.12) для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r > 1/2$ находим

$$\alpha_n^2 = 1 + \max_{k=\pm 1,\dots,\pm n} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Big|\frac{k}{k+m(2n+1)}\Big|^{2r} + \Big|\frac{k}{k+m(2n+1)}\Big|^{2r} \right\} =$$

$$= 1 + \max_{k=\overline{1,n}} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Big(\frac{k}{m(2n+1)+k}\Big)^{2r} + \Big(\frac{k}{m(2n+1)-k}\Big)^{2r} \right\} \le$$

$$\le 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \Big(\frac{n}{m(2n+1)+n}\Big)^{2r} + \Big(\frac{n}{m(2n+1)-n}\Big)^{2r} \right\} \le$$

$$\le 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2m+1)^{2r}} + \frac{1}{(2m-1)^{2r}} \right\} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2r}} \equiv \alpha. \tag{1.14}$$

Из (1.13) и (1.14) следуют верхние из оценок (1.7). Так как $\mathcal{L}_n x, D^r\mathcal{L}_n x \in \mathbb{H}_n^T$, то из (1.10) следуют нижние из оценок (1.7). $\square$

Заметим, что при $r = 1$ эту лемму можно вывести также из теоремы 5 ([8], гл. 1).

Теорема 1. *Для любой функции $x(s) \in W_2^r$ интерполяционные полиномы $\mathcal{L}_n(x;s)$ сходятся в пространстве W_2^r при $r > 1/2$, причем для $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие двусторонние оценки:*

$$E_n(x)_{(j)} \le \|x - \mathcal{L}_n x\|_{(j)} \le A_j\, E_n(x)_{(j)}, \quad j = \overline{1,3}, \tag{1.15}$$

$$E_n(D^r x)_2 \le \|x - \mathcal{L}_n x\|_{(j)} \le B_j\, E_n(D^r x)_2, \quad j = \overline{1,3}; \tag{1.16}$$

здесь

$$A_1 = A_1(n) = \alpha + \beta_n, \quad B_1 = B_1(n) = \alpha + \beta_n + \min(n^{-r}, \beta_n);$$

$$A_2 = A_2(n) = \alpha + \lambda_n\beta_n, \quad B_2 = B_2(n) = \alpha + \beta_n + \gamma_n;$$

$$A_3 = B_3 = \alpha; \quad \alpha = \Big\{2\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-2r}\Big\}^{1/2}, \quad \beta_n = \Big\{2\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2r}\Big\}^{1/2},$$

$$\lambda_n = \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4}{\pi}(2n+1), \quad \gamma_n = n^{-r+1/2}\Big\{3\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2r}\Big\}^{1/2}.$$

Доказательство. В силу сказанного выше нижние оценки в соотношениях (1.15) и (1.16) являются очевидными. Докажем верхние оценки в них.

Случай $j = 1$. Тогда в силу (1.9) и известных (см., напр., [9], гл. 3) соотношений

$$\|\mathcal{L}_n\|_{\tilde{C}\to L_2} = 1, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{L_2\to L_2} = \infty, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

находим

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_2 \le \|x - S_n x\|_2 + \|\mathcal{L}_n(x - S_n x)\|_2 \le$$

$$\le \|x - S_n x\|_2 + \|x - S_n x\|_\infty \le E_n^T(x)_2 + \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x)|. \tag{1.18}$$

Отсюда с учетом свойств коэффициентов Фурье $c_k(x)$ и $c_k(D^r x)$, а также неравенства Гёльдера для любой функции $x \in W_2^r$ находим

$$\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x)| \le \Big\{\sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(D^r x)|^2\Big\}^{1/2} \Big\{\sum_{|k|=n+1}^{\infty} k^{-2r}\Big\}^{1/2} =$$

$$= E_n^T(D^r x)_2 \Big\{2\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2r}\Big\}^{1/2} = E_n^T(D^r x)_2\, O(n^{-r+1/2}). \tag{1.19}$$

В силу (1.18), (1.19) для функции $x(s) \in W_2^r$ $(r > 1/2)$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_2 \le E_n^T(x)_2 + E_n^T(D^r x)_2 \Big\{ 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2r} \Big\}^{1/2} \le (n^{-r} + \beta_n)\, E_n^T(D^r x)_2. \tag{1.20}$$

Из (1.7), (1.20) и (1.1) для функции $x \in W_2^r$ $(r > 1/2)$ находим верхнюю из оценок (1.15) при $j = 1$

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{(1)} = \|x - \mathcal{L}_n x\|_2 + \|D^r(x - \mathcal{L}_n x)\|_2 \le E_n^T(x)_2 +$$
$$+(\alpha + \beta_n)\, E_n^T(D^r x)_2 \le (\alpha + \beta_n)\{E_n^T(x)_2 + E_n^T(D^r x)_2\} \equiv A_1\, E_n^T(x)_{(1)}.$$

В силу (1.17) и (1.19) для $x \in W_2^r$ $(r > 1/2)$ имеем

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_2 \le 2\, E_n^T(x)_\infty \le 2\, \|x - S_n x\|_\infty \le 2 \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x)| \le 2\, \beta_n E_n^T(D^r x)_2. \tag{1.21}$$

Отсюда и из (1.20) для $x \in W_2^r$ и любых $n \in \mathbb{N}$ находим оценки

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_2 \le E_n^T(D^r x)_2\, \min(n^{-r} + \beta_n, 2\beta_n) \le E_n^T(D^r x)_2 \{\beta_n + \min(n^{-r}, \beta_n)\}. \tag{1.22}$$

Очевидно, что из (1.1), (1.7) и (1.22) следует оценка

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{(1)} = \|x - \mathcal{L}_n x\|_2 + \|D^r(x - \mathcal{L}_n x)\|_2 \le$$
$$\le E_n^T(D^r x)_2\, \{\alpha + \beta_n + \min(n^{-r}, \beta_n)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.23}$$

а из нее в свою очередь следует верхняя из оценок (1.16) при $j = 1$.

Случай $j = 2$**.** Для любой функции $x(s)$ из W_2^r при $r > 1/2$ справедливы неравенства

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_\infty \le (1 + \lambda_n) E_n^T(x)_\infty \le E_n^T(x)_\infty + \lambda_n \|x - S_n x\|_\infty \le$$
$$\le E_n^T(x)_\infty + \lambda_n \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x)| \le E_n^T(x)_\infty + \lambda_n \beta_n\, E_n^T(D^r x)_2, \tag{1.24}$$

где λ_n — константа Лебега тригонометрического интерполяционного процесса по узлам (1.4). Хорошо известно (см., напр., [3], [4]), что

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1), \quad n \to \infty; \qquad \lambda_n \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi}(2n+1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Из (1.2), (1.7), (1.24) и (1.25) находим верхнюю из оценок (1.15) при $j = 2$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in W_2^r$ $(r > 1/2)$

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{(2)} = \|x - \mathcal{L}_n x\|_\infty + \|D^r(x - \mathcal{L}_n x)|_{(2)} \le$$
$$\le E_n^T(x)_\infty + \lambda_n \beta_n\, E_n^T(D^r x)_2 + \alpha\, E_n^T(D^r x)_2 \le$$
$$\le \max(1, \alpha + \lambda_n \beta_n)\{E_n^T(x)_\infty + E_n^T(D^r x)_2\} = A_2\, E_n^T(x)_2.$$

Теперь покажем, что для функции $x(s) \in W_2^r$ $(2r > 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_\infty \le \min\{\, (1 + \lambda_n)\beta_n, \beta_n + \gamma_n\} E_n^T(D^r x)_2; \tag{1.26}$$

тогда из (1.7) и (1.26) получим верхнюю оценку из (1.16) при $j = 2$.

Из (1.24), (1.25) и (1.19) для $x \in W_2^r$ и $n \in \mathbb{N}$ находим

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_\infty \le (1 + \lambda_n)\, E_n^T(x)_\infty \le (1 + \lambda_n)\|x - S_n x\|_\infty \le$$
$$\le (1 + \lambda_n) \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x)| \le (1 + \lambda_n)\beta_n\, E_n^T(D^r x)_2. \tag{1.27}$$

С другой стороны, в силу (1.9), (1.19) и известного неравенства

$$\|Q_n\|_\infty \le \sqrt{2n+1}\,\|Q_n\|_2, \quad Q_n \in \mathbb{H}_n^T,$$

имеем

$$\begin{aligned} \|x - \mathcal{L}_n x\|_\infty &\le \|x - S_n x\|_\infty + \|S_n x - \mathcal{L}_n x\|_\infty \le \\ &\le \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(x)| + \sqrt{2n+1}\,\|S_n x - \mathcal{L}_n x\|_2 \le \\ &\le \beta_n\, E_n^T(D^r x)_2 + \sqrt{2n+1}\,\|S_n x - \mathcal{L}_n x\|_2; \end{aligned} \tag{1.28}$$

теперь, как и при доказательстве леммы 1, находим

$$\begin{aligned} \|S_n x - \mathcal{L}_n x\|_2^2 &= \sum_{k=-n}^{n} \Big| \sum_{|m|=1}^{\infty} c_{k+m(2n+1)}(x) \Big|^2 \le \\ \le \sum_{k=-n}^{n} \Big\{ \sum_{|m|=1}^{\infty} &|c_{k+m(2n+1)}(D^r x)|^2 \sum_{|m|=1}^{\infty} |k + m(2n+1)|^{-2r} \Big\} \le \\ \le \sum_{k=-n}^{n} \sum_{|m|=1}^{\infty} &|c_{k+m(2n+1)}(D^r x)|^2 \max_{k=\overline{-n,n}} \sum_{|m|=1}^{\infty} |k + m(2n+1)|^{-2r} \le \\ &\le \theta_n^2\, E_n^T(D^r x)_2^2, \quad x \in W_2^r \ (r > 1/2), \end{aligned} \tag{1.29}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_n^2 &= \max_{k=\overline{0,n}} \sum_{m=1}^{\infty} \{ |m(2n+1)+k|^{-2r} + |m(2n+1)-k|^{-2r} \} \le \\ &\le \sum_{m=1}^{\infty} \{ |m(2n+1)+n|^{-2r} + |m(2n+1)-n|^{-2r} \} \le \\ &\le \frac{1}{n^{2r}} \sum_{m=1}^{\infty} \Big\{ \frac{1}{(2m+1)^{2r}} + \frac{1}{(2m-1)^{2r}} \Big\} \le \frac{1}{n^{2r}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}}\,. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Из (1.28)–(1.30) следует, что

$$\begin{aligned} \|x - \mathcal{L}_n x\|_\infty &\le E_n^T(D^r x)_2 \Big\{ \beta_n + \frac{\sqrt{2n+1}}{n^r} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} \Big)^{1/2} \Big\} \le \\ &\le E_n^T(D^r x)_2\,(\beta_n + \gamma_n), \quad x \in W_2^r,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Из соотношений (1.27), (1.31) следует требуемая оценка (1.26).

Случай $j = 3$**.** В силу (1.3), (1.5), (1.6), как и при доказательстве леммы 1, для любой функции $x \in W_2^r$ $(r > 1/2)$ находим

$$\begin{aligned}
\|x - \mathcal{L}_n x\|_{(3)}^2 &= |c_0(x - \mathcal{L}_n x)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2r}\, |c_k(x - \mathcal{L}_n x)|^2 = \\
&= \sum_{k=-n}^{n} |k'|^{2r}\, |c_k(x) - c_{k,n}(x)|^2 + \sum_{|k|=n+1}^{\infty} k^{2r}\, |c_k(x)|^2 = \\
&= \sum_{k=-n}^{n} |k'|^{2r} \Big| \sum_{|m|=1}^{\infty} c_{k+m(2n+1)}(x) \Big|^2 + \sum_{|k|=n+1}^{\infty} |c_k(D^r x)|^2 \le \\
&\le \sum_{k=-n}^{n} \Big\{ \sum_{|m|=1}^{\infty} |c_{k+m(2n+1)}(D^r x)|^2 \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big| \frac{k'}{k + m(2n+1)} \Big|^{2r} \Big\} + \\
&+ E_n^T(D^r x)_2^2 \le (\tilde{\alpha}_n^2 - 1)\, E_n^T(D^r x)_2^2 + E_n^T(D^r x)_2^2 = \tilde{\alpha}_n^2\, E_n^T(D^r x)_2^2,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

где $k' = \{1$ при $k = 0;$ k при $k \neq 0\}$, а

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_n^2 &= 1 + \max_{k=-n,n} \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big| \frac{k'}{k + m(2n+1)} \Big|^{2r} = \\
&= 1 + \max_{k=\pm 1,\dots,\pm n} \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big| \frac{k}{k + m(2n+1)} \Big|^{2r} = \max_{k=\pm 1,\dots,\pm n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big| \frac{k}{k + m(2n+1)} \Big|^{2r} = \\
&= \alpha_n^2 \le 2 \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1)^{-2r} = \alpha^2, \ n \in \mathbb{N}, \ r > 1/2.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Из (1.32), (1.33) для $x \in W_2^r$ и $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{(3)} \le \alpha\, E_n^T(D^r x)_2 = \alpha\, E_n^T(x)_{(3)}, \tag{1.34}$$

откуда и следуют верхние оценки (1.15) и (1.16) при $j = 3$. $\square$

Из теоремы 1 и известной теоремы Банаха–Штейнхауса (см., напр., [10]) получаем

Следствие. Операторы Лагранжа $\mathcal{L}_n : W_2^r \to W_2^r$ при любых $r > 1/2$ ограничены по норме в совокупности, точнее,

$$1 \le \|E - \mathcal{L}_n\|_{(j)} \le A_j, \quad j = \overline{1,3}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.35}$$

$$1 \le \|\mathcal{L}_n\|_{(j)} \le C_j, \quad j = \overline{1,3}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.36}$$

где E — единичный оператор, $C_j = C_j(n) = 1 + A_j(n) = O(1)$, $n \to \infty$, а нормы операторов согласованы с соответствующими нормами $\|x\|_{(j)}$ функций из W_2^r, определенными в (1.1)–(1.3).

Действительно, для функции $x \in W_2^r$ $(2r > 1)$ из неравенств (1.15) находим

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{(j)} \le A_j\, E_n^T(x)_{(j)} \le A_j\, \|x\|_{(j)}, \quad j = \overline{1,3},$$

откуда и следуют верхние из оценок (1.35), а из них, в свою очередь, следуют верхние из оценок (1.36). Нижние из оценок (1.35), (1.36) следуют из легко проверяемых формул $(E - \mathcal{L}_n)^2 = E - \mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$.

Следует отметить, что верхние оценки в (1.36), полученные как следствие из теоремы 1, являются несколько завышенными. Однако при непосредственном (т. е. независимо от теоремы 1) вычислении для нормы $\|\mathcal{L}_n\|_{(j)}$ можно найти более точные оценки, например, справедлива

Теорема 2. *Операторы Лагранжа* $\mathcal{L}_n : W_2^r \to W_2^r$ *при* $r > 1/2$ *ограничены по норме в совокупности, точнее,*

$$1 \le \|\mathcal{L}_n\|_{(j)} \le D_j = D_j(n), \quad j = \overline{1,3}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.37}$$

где

$$\begin{aligned} &D_1 = \alpha + \beta\, n^{-r}, \quad \beta = \Big(2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2r}\Big)^{1/2}, \\ &D_2 = \alpha + \beta_n + \min(\lambda_n\, \beta_n, \gamma_n), \\ &D_3 = \alpha, \end{aligned}$$

причем параметры α, β_n, γ_n, λ_n *определены в теореме* 1.

Следствие. Для любой функции $x \in W_2^r$ $(2r > 1)$ интерполяционные полиномы Лагранжа (1.5) сходятся в пространстве W_2^r, причем для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$E_n^T(x)_{(j)} \le \|x - \mathcal{L}_n x\|_{(j)} \le (1 + D_j)\, E_n^T(x)_{(j)}, \quad j = \overline{1,3}. \tag{1.38}$$

Отметим, что теорема 2 легко выводится из приведенных при доказательстве леммы 1 и теоремы 1 результатов (см. также [8], гл. 1, теоремы 5 и 6), а следствие легко выводится из соотношений (1.37). Однако это следствие несколько уступает доказанной выше теореме 1 в смысле величин, участвующих в верхних оценках параметров.

Отметим, что как теорема 1, так и следствие теоремы 2 позволяют с помощью известных результатов (см., напр., [11], [12]) по теории наилучших среднеквадратических приближений установить скорость сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов Лагранжа в пространствах Соболева W_2^r с любым показателем $r > 1/2$. В частности, справедлива следующая

Теорема 3. *Для любой функции* $x(s) \in W_2^l[0, 2\pi]$, *где* $l \ge r > 1/2$, *интерполяционные полиномы Лагранжа* $\mathcal{L}_n(x; s)$ *сходятся в пространстве* $W_2^r[0, 2\pi]$ *со скоростью*

$$\|x - \mathcal{L}_n x\|_{W_2^r} = O\left\{n^{r-l}\, E_n^T(x^{(l)})_2\right\}, \quad l \ge r > 1/2\,. \tag{1.39}$$

Замечание 1. Используя результаты теории рядов Фурье и наилучших приближений в пространстве L_p, а также теории мультипликаторов и интерполяции операторов (см., напр., [5], [10]–[14]), утверждения теорем 1–3 и леммы 1 без существенных изменений можно перенести на пространства Соболева $W_p^r[0, 2\pi]$ при $rp > 1$, $1 \le p < \infty$. Однако ввиду излишней громоздкости выкладок и ограниченности объема статьи на подобных формулировках здесь останавливаться не будем.

Замечание 2. Результаты, аналогичные приведенным выше, справедливы также для тригонометрического интерполирования по четному числу узлов $s_k = k\pi/n$, $k = \overline{0, 2n-1}$. В этом случае вместо (1.6), (1.25) и $\mathbb{H}_n^T$ следует пользоваться соотношениями

$$c_{k,n}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+2mn}(x), \quad k = \overline{-n, n};$$

$$\lambda_n \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4n}{\pi}, \quad n \le N,$$

$$\mathbb{H}_n^T = \left\{a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos ks + b_k \sin ks + a_n \cos ns\right\}.$$

2. Приближения алгебраическими интерполяционными многочленами в весовом пространстве Соболева

Результаты, аналогичные приведенным в п. 1, справедливы также для алгебраических интерполяционных многочленов. Однако здесь аналогия далеко не очевидная и, более того, в непериодическом случае решение указанной задачи представляет, на наш взгляд, значительный самостоятельный интерес. Для иллюстрации сказанного приведем лишь следующие результаты.

Обозначим через X пространство абсолютно непрерывных на $[-1,1]$ функций, первые производные которых квадратично суммируемы с весом $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$, $t\in[-1,1]$. Норму в X введем по любой из формул

$$\|f\|_X=\|f\|_Y+\|f'\|_Z\equiv\|f\|_{(1)};\quad \|f\|_X=\|f\|_C+\|f'\|_Z\equiv\|f\|_{(2)};$$

$$\|f\|_X=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{|a_0^T(f)|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}k^2\,|a_k^T(f)|^2\right\}^{1/2}\equiv\|f\|_{(3)};$$

здесь (и далее) $C=C[-1,1]$, $Y=L_2(\rho^{-1};[-1,1])\equiv L_2(\rho^{-1})$ и $Z=L_2(\rho;[-1,1])\equiv L_2(\rho)$ с нормами соответственно

$$\|f\|_C=\max_{-1\le t\le 1}|f(t)|,\quad \|f\|_Y=\left\{\int_{-1}^{+1}|f(t)|^2\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}^{1/2},$$

$$\|f\|_Z=\left\{\int_{-1}^{+1}|f(t)|^2\sqrt{1-t^2}\,dt\right\}^{1/2},\quad f\in X,$$

причем $a_k^T(y)$ суть коэффициенты Фурье–Чебышева функции $y(t)\in Y$

$$a_k^T(y)=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y(t)\,T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\quad T_k(t)=\cos k\arccos t.$$

Ясно, что пространство X совпадает с весовым пространством Соболева $W_2^1(\rho;[-1,1])\equiv W_2^1(\rho)$ с рассматриваемым здесь весом $\rho(t)$.

Обозначим через $\mathcal{L}_nf=\mathcal{L}_n(f;t)$ алгебраический интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f(t)\in C[-1,1]$ по узлам Чебышева

$$t_k=t_{k,n}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=\overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Положим $E_m(\varphi)_Z=\inf\{\|\varphi-Q\|_Z\mid Q\in\mathbb{H}_m\}$, где $\mathbb{H}_m$ — множество всех алгебраических многочленов степени не выше m.

Лемма 2. *Для любой функции $f\in W_2^1(\sqrt{1-t^2})$ и для $n=2,3,\ldots$ справедливы двусторонние неравенства*

$$E_{n-2}(Df)_Z\le\|D[f-\mathcal{L}_nf]\|_Z\le\frac{\pi}{2}E_{n-2}(Df)_Z. \tag{2.2}$$

Следствие. Для любой функции $\varphi\in Z$ и любых $n=2,3,\ldots$ справедливы оценки

$$E_{n-2}(\varphi)_Z\le\|\varphi-\Pi_n\varphi\|_Z\le\frac{\pi}{2}\,E_{n-2}(\varphi)_Z, \tag{2.3}$$

где $\Pi_n=D\mathcal{L}_nI$, $D(f;t)=f'(t)$, $I(\varphi;t)=\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau$, $Z=\mathcal{L}_2(\sqrt{1-t^2})$.

Доказательство. Интерполяционный многочлен $\mathcal{L}_nf\in\mathbb{H}_{n-1}$, поэтому его можно представить в виде

$$\mathcal{L}_n(f;t)=\frac{a_{0,n}^T(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k,n}^T(f)\,T_k(t),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.4}$$

где [1]

$$a^T_{k,n}(f) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_j)\,T_k(t_j), \quad k=\overline{0,n-1}, \tag{2.5}$$

— коэффициенты Фурье–Чебышева–Лагранжа функции $f(t)\in C[-1,1]$. Разлагая функцию $f(t)$ в ряд Фурье-Чебышева

$$f(t) = \frac{a^T_0(f)}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} a^T_r(f)\,T_r(t), \quad f\in X, \tag{2.6}$$

и используя свойства квадратурной формулы Гаусса–Чебышева

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \approx \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi\Big(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\Big), \quad \varphi\in C[-1,1],$$

коэффициенты (2.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a^T_{k,n}(f) &= a^T_k(f) + \sum_{r=n+1}^{\infty} a^T_r(f)\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} T_k(t_j)\,T_r(t_j) = \\ &= a^T_k(f) + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\{\,a^T_{2nm+k}(f) + a^T_{2nm-k}(f)\} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\,a^T_{k+2nm}(f), \quad k=\overline{0,n-1}; \end{aligned} \tag{2.7}$$

здесь принято обозначение $a^T_{-k}(f) = a^T_k(f)$ для $k=0,1,\dots$

В силу (2.4), (2.7) имеем

$$\mathcal{L}_n(f;t) = S^T_n(f;t) + {\sum_{k=0}^{n-1}}' \,T_k(t)\sum_{|m|=1}^{\infty}(-1)^m\,a^T_{k+2nm}(f), \tag{2.8}$$

где $S^T_n(f;t) = {\sum\limits_{k=0}^{n-1}}' a^T_k(f)T_k(t)$, а штрих у знака суммы означает, что при $k=0$ соответствующее слагаемое следует разделить на два. Тогда

$$f(t) - \mathcal{L}_n(f;t) = \sum_{k=n}^{\infty} a^T_k(f)T_k(t) - {\sum_{k=0}^{n-1}}' \,T_k(t)\sum_{|m|=1}^{\infty}(-1)^m\,a^T_{k+2nm}(f)\,. \tag{2.9}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}[f(t) - \mathcal{L}_n(f;t)] = \sum_{k=n}^{\infty} a^T_k(f)k\,U_{k-1}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} k\,U_{k-1}(t)\sum_{|m|=1}^{\infty}(-1)^m\,a^T_{k+2nm}(f)\,, \tag{2.10}$$

где $U_{k-1}(t)$ — многочлены Чебышева второго рода степени $k-1$: $U_{k-1}(t) = \sin k\arccos t/\sqrt{1-t^2}$, $k=1,2,\dots$.

Поскольку для функции $f\in W^1_2(\rho)$ имеем

$$a^T_k(f) = \frac{a^U_{k-1}(f')}{k},\ k\in\mathbb{N},\dots,;\ a^U_r(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-t^2}\,\varphi(t)\,U_r(t)\,dt, \tag{2.11}$$

[1] Здесь и далее $\sum_{k=1}^{0} = 0$.

где $a_r^U(\varphi)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi \in Z$ по многочленам $U_r(t)$, то из (2.11), (2.10) для $n = 2, 3, \ldots$ следует, что

$$\frac{d}{dt}[f(t) - \mathcal{L}_n(f;t)] = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-1}^U(f')\, U_{k-1}(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} k\, U_{k-1}(t) \sum_{|m|=1}^{\infty} (-1)^m \frac{a_{k+2nm-1}^U(f')}{k+2nm}, \quad f \in W_2^1(\rho); \tag{2.12}$$

здесь (и далее) используется легко проверяемое соотношение $a_{-k-1}^U(\varphi) = -a_{k-1}^U(\varphi)$, справедливое для любых $\varphi \in L_1[-1,1]$ и $k \in \mathbb{N}$. Отсюда в пространстве $Z = L_2(\rho)$ последовательно находим

$$\|D(f - \mathcal{L}_n f)\|_Z^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=n}^{\infty} |a_{k-1}^U(f')|^2 +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \sum_{|m|=1}^{\infty} (-1)^m\, a_{k+2nm-1}^U(f') \frac{k}{k+2nm} \right|^2 \le$$

$$\le E_{n-2}^2(Df)_Z + \max_{k=\overline{1,n-1}} \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+2nm}\Big)^2 \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{|m|=1}^{\infty} |a_{k+2nm-1}^U(Df)|^2 \le$$

$$\le E_{n-2}^2(Df)_Z + E_{n-1}^2(Df) \max_{k=\overline{1,n-1}} \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+2nm}\Big)^2 \le$$

$$\le E_{n-2}^2(Df)_Z \Big\{ 1 + \max_{k=\overline{1,n-1}} \sum_{|m|=1}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+2nm}\Big)^2 \Big\} =$$

$$= E_{n-2}^2(Df)_Z \max_{k=\overline{1,n-1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+2nm}\Big)^2 = \sigma_n^2\, E_{n-2}^2(Df)_z\,, \tag{2.13}$$

где для $n = 2, 3, \ldots$

$$\sigma_n^2 = \max_{k=\overline{1,n-1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+2nm}\Big)^2 \le$$

$$\le 1 + \max_{k=\overline{1,n}} \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\Big(\frac{k}{2nm+k}\Big)^2 + \Big(\frac{k}{2nm-k}\Big)^2 \Big] \le$$

$$\le 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{1}{(2m-1)^2} \Big] = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}\,. \tag{2.14}$$

Из (2.14) и (2.13) для любых $f \in W_2^1(\rho)$ и $n = 2, 3, \ldots$ следуют оценки

$$\|D(f - \mathcal{L}_n f)\|_Z \le \sigma_n\, E_{n-2}(Df)_z \le (\pi/2)\, E_{n-2}(Df)_z\,. \tag{2.15}$$

Таким образом, верхние из оценок (2.2) доказаны. Поскольку в условиях теоремы $Df \in Z = L_2(\rho)$ и $D\mathcal{L}_n f \in \mathbb{H}_{n-2}$, то нижние из оценок (2.2) следуют из представления (2.10). Неравенства (2.3) легко выводятся из неравенств (2.2). □

Лемма 3. *Для любой функции $f \in W_2^1(\rho)$ справедливы неравенства*

$$\|D\mathcal{L}_n f\|_z \le \frac{\pi}{2} \|Df\|_Z, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Следствие. Справедливы неравенства

$$1 \le \|\Pi_n\| \le \pi/2; \quad \Pi_n = D\mathcal{L}_n I : Z \to Z, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Доказательство. Из формул (2.8) и (2.11) следует, что

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_n(f;t) = \sum_{k=1}^{n-1} kU_{k-1}(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{a^U_{k+2nm-1}(f')}{k+2nm}\,. \tag{2.18}$$

Из представления (2.18), как и при доказательстве леммы 2, находим

$$\|D\mathcal{L}_n f\|_Z^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{a^U_{k+2nm-1}(Df)}{k+2nm} \right|^2 \le$$

$$\le \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \Big\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a^U_{k+2nm-1}(Df)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+2nm}\Big)^2 \Big\} \le$$

$$\le \|Df\|_Z^2 \max_{k=\overline{1,n-1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{k}{k+2nm}\Big)^2 \le \sigma_n^2 \,\|Df\|_Z^2 \le \frac{\pi^2}{4}\,\|Df\|_Z^2, \tag{2.19}$$

где $f \in W^1_2(\rho)$, $n = 2,3,\ldots$ Отсюда следует утверждение леммы 3, а из нее, в свою очередь, легко выводятся верхние из оценок (2.17); нижние оценки в (2.17) следуют из тождества $\Pi_n^2 = \Pi_n = D\mathcal{L}_n I$ в Z. $\square$

Положим $E_m(\varphi)_{(i)} = \inf_{Q\in\mathbb{H}_m} \|\varphi - Q\|_{(i)}$, $i = \overline{1,3}$. Тогда с помощью любой из лемм 2 и 3 может быть доказана следующая

Теорема 4. *Для любой функции $f \in W^1_2(\rho)$ интерполяционные многочлены* (2.4) *сходятся в пространстве $W^1_2(\rho)$, причем для $n = 2,3,\ldots$ справедливы оценки*

$$E_{n-1}(f)_{(i)} \le \|f - \mathcal{L}_n f\|_{(i)} \le a_i(n) E_{n-1}(f)_{(i)}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.20}$$

$$E_{n-2}(Df)_Z \le \|f - \mathcal{L}_n f\|_{(i)} \le b_i(n)\, E_{n-2}(Df)_Z, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.21}$$

где

$$a_1(n) = \frac{\pi}{2} + \delta_n \le \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad b_1(n) = \frac{\pi}{2} + 2\delta_n \le \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$a_2(n) = \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda_n}{\sqrt{\pi}}\,\delta_n = \frac{\pi}{2} + O\Big(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\Big), \quad b_2(n) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\,\lambda_n}{\sqrt{\pi}}\,\delta_n = \frac{\pi}{2} + O\Big(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\Big);$$

$$a_3(n) = \Big(1 + \frac{\pi^2}{2}\Big)^{1/2}, \quad b_3(n) = \Big(\pi + \frac{2}{\pi}\Big)^{1/2};$$

$$\delta_n = \Big(2\sum_{k=n}^{\infty} k^{-2}\Big)^{1/2}, \quad \lambda_n = \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{4n}{\pi}\,.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для $m \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in W^1_2(\rho) \equiv X$ справедливы соотношения

$$E_m(\varphi)_{(1)} = E_m(\varphi)_Y + E_{m-1}(D\varphi)_Z\,,$$

$$E_m(\varphi)_{(2)} = E_m(\varphi)_C + E_{m-1}(D\varphi)_Z, \quad E_m(\varphi)_{(3)} = E_{m-1}(D\varphi)_Z\,.$$

Тогда в силу $\mathcal{L}_n f \in \mathbb{H}_{n-1}$ и $Df \in Z$ нижние оценки в (2.20) и (2.21) становятся очевидными. Верхние оценки будем устанавливать по схеме доказательства теоремы 1, используя при этом приведенные в п. 2 результаты. Поскольку здесь выкладки являются громоздкими, приведем лишь отличительные (от теоремы 1) моменты.

1°. Для любой функции $f \in X$ доказывается, что для $n = 2,3,\ldots$

$$\|f - \mathcal{L}_n f\|_Y \le E_{n-1}(f)_Y + \delta_n\, E_{n-2}(f')_Z \le 2\,\delta_n E_{n-2}(f')_Z\,.$$

Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы при $i = 1$.

2°. Для любой функции $f \in X$ доказывается, что для $n = 2, 3, \dots$

$$\|f - \mathcal{L}_n f\|_C \le E_{n-1}(f)_C + \frac{\lambda_n\, \delta_n}{\sqrt{\pi}}\, E_{n-2}(f')_Z \le \frac{2\,\lambda_n\, \delta_n}{\sqrt{\pi}}\, E_{n-2}(f')_Z\,.$$

Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы при $i = 2$.

3°. Для любой функции $f \in X$ справедливо представление

$$\|f - \mathcal{L}_n f\|^2_{(3)} = \frac{\pi}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |k''|^2\, |a_k^T(f) - a_{k,n}^T(f)|^2 + \sum_{k=n}^{\infty} |a_{k-1}^U(f')|^2 \right],$$

где $n - 1 \in \mathbb{N}$, $k'' = \{1/\sqrt{2}$ при $k = 0$; k при $k \ne 0\}$. Отсюда, как и при доказательстве лемм 2 и 3, получаем утверждение теоремы при $i = 3$. $\square$

Замечание 3. Утверждения, аналогичные леммам 2 и 3 и теореме 4, справедливы также для интерполирования на вещественной оси с применением базисных функций Иржи Грегори (см., напр., [15]).

В заключение отметим, что результаты работы доложены на Международной конференции, посвященной 100–летию Н.Г. Чеботарева (г. Казань, КГУ, 1994 г.).

Литература

1. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л. : Гостехиздат, 1949. – 688 с.
2. Гончаров В.Л. *Теория интерполирования и приближения функций.* – 2-е изд. – М.: Гостехиздат, 1954. – 328 с.
3. Никольский С.М. *Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1945. – Т. 15. – С. 1–76.
4. Турецкий А.Х. *Теория интерполирования в задачах.* Ч. 1. – Минск: Вышэйш. школа, 1968. – 318 с.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
6. Привалов А.А. *Нерешенные задачи теории интерполирования* // Теория функций и приближений. Тр. 4-й Саратовской зимней школы. Ч. 1. – Саратов, 1990. – С. 83–92.
7. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.
8. Ермолаева Л.Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 154 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во КГУ, 1980. – 232 с.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
11. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1965. – 407 с.
12. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
13. Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении.* Т. 1. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
14. Эдвардс Р. *Ряды Фурье в современном изложении.* Т. 2. – М.: Мир, 1985. – 400 с.
15. Онегов Л.А. *Дробно–рациональная аппроксимация сингулярных интегралов по действительной оси* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – №3. – с. 43 – 55.

Казанский государственный университет

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Поступила
13.06.1995