ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 517.548

Е.А. ШИРОКОВА

О СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Целью статьи является решение смешанных краевых задач в полуполосе для уравнения эллиптического типа. Такие задачи имеют приложения при решении обратных задач теории фильтрации [1] в неоднородном грунте бесконечной глубины, т. к. образом области фильтрации в плоскости комплексного потенциала обычно является полуполоса, а сам комплексный потенциал и функция, ему обратная, удовлетворяют уравнениям эллиптического типа. Рассматриваются различные условия на поведение решения в окрестности бесконечности.

Решение смешанной задачи с определенным поведением на бесконечности для уравнения эллиптического типа было получено в [2]. В данной статье ослаблены ограничения на пространство, которому принадлежат производные искомых функций в [2], и рассмотрены новые варианты поведения решения в окрестности бесконечности. Так же, как и в [2], используется банахово пространство $\widetilde{L}^p(D)$, $p \geq 1$, — подпространство пространства $L_p(D)$, состоящее из функций $t(w)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{A>0}\left\{(1+A)\left[\int\int_{w\in D,\ \operatorname{Im} w<-A}|t(w)|^p d\sigma_w\right]^{1/p}\right\} \equiv \|t\|_{\widetilde{L}^p} < \infty.$$

Сформулируем первую из решаемых задач.

Задача 1. Требуется найти в полуполосе $D = \{w : |\operatorname{Re} w| < a,\ \operatorname{Im} w < 0\}$ функцию $g(w)$, непрерывную в D, с локально интегрируемыми производными и непрерывно продолжимую в точки границы ∂D, если

$$g'_{\overline{w}} = \lambda(w)g'_w + h(w), \quad w \in D, \tag{1}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Re} g(w)|_{w=u\in(-a,a)} = \Omega(u),\\ \operatorname{Im} g(w)|_{w=\pm a+iv,\ v\in(-\infty,0)} = 0.\end{cases} \tag{2}$$

С использованием введенного пространства доказывается

Теорема 1. *Задача* 1 *имеет единственное решение в классе непрерывных в D функций с локально интегрируемыми обобщенными производными, непрерывно продолжимых в точки границы ∂D, если*

$\Omega(u) \in H_\alpha[-a,a]$, $1 \geq \alpha > 1/2$, $h(w) \in L_{p_0}(D)\bigcap \widetilde{L}^1(D)$, $p_0 \in (2,(1-\alpha)^{-1})$, $\sup\limits_{w\in D} \operatorname{vrai}|\lambda(w)| \leq \lambda_0 < 1$, $\lambda(w) \in \widetilde{L}^{q_0}(D)$, $q_0 = p_0(p_0-1)^{-1}$ *и* $(\lambda_0 + \|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0) < 1$, *где*

$$B(p) = \sup\Big\{C(p)4^{1/p}, 2^{1+2/p}\pi^{-1}a^{1/p-2}(\pi^2/2+4/9)(p-1)^{-1/p} +$$
$$+4\pi^{-1}\left[4(\pi^2/2+4/9)^p + \pi^{2p}2^{1-2p}a^{-1}\int_{\pi/4}^{\infty}[\operatorname{sh}^{-2}t + t^{-2}]^p dt\right]^{1/p}\Big\}, \tag{3}$$

$$C(p) = \begin{cases}C^{(p-2)/p}, & 2 \leq p \leq \widetilde{p};\\ \psi(p), & p \geq \widetilde{p},\end{cases}$$

$\psi(p) = \frac{\pi^2}{2}[(p/(p-1))^{2/p} - 1]^{-1}$, $\widetilde{p}$ — *единственный на интервале* $(2,+\infty)$ *корень уравнения* $2\psi(p)\ln\psi(p) = p(p-2)\psi'(p)$, $C = \psi(\widetilde{p})^{\widetilde{p}/(\widetilde{p}-2)}$.

Доказательство. Как и в [2], рассмотрим сначала решение задачи (1), (2) при условии, что $\lambda(w) \equiv 0$, $h(w) \equiv 0$, $w \in D$. В этом случае

$$g(w) \equiv \Phi_0(w) = -\frac{1}{4ai}\int_{-a}^{a}\Omega(\tau)\Big[\operatorname{tg}\frac{\pi(\tau+w)}{4a} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-w)}{4a}\Big]d\tau. \qquad (4)$$

Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{Re}\Phi_0(u) = \Omega(u), \quad \operatorname{Im}\Phi_0(\pm a + iv) = 0, \quad v \in (-\infty, 0).$$

Очевидно, $\Phi_0(w)$ имеет конечный предел при $w \to \infty$ и в конечных точках, отличных от $w = \pm a$, на границе. В точках же $w = \pm a$, согласно свойствам интеграла типа Коши, $\Phi_0(w)$ может допускать логарифмические особенности ([3], с. 75). Покажем, что в действительности $\Phi_0(w)$ имеет конечный предел также и в точках $\pm a$.

Рассмотрим в D функцию

$$\zeta_0(w) = i(\Omega(a) - \Omega(-a))\exp\Big(-i\frac{\pi w}{2a}\Big)/2 + (\Omega(a) + \Omega(-a))/2.$$

Очевидно, $\zeta_0(w)$ — аналитическая в D и непрерывная до границы D функция, отображающая D на полукруг и удовлетворяющая соотношениям $\zeta_0(-a) = \Omega(-a)$, $\zeta_0(a) = \Omega(a)$, $\operatorname{Im}\zeta_0(\pm a + iv) = 0$, $v \in (-\infty, 0)$. Заметим, что $\operatorname{Re}\zeta_0(u) \in C^1[-a,a]$. Очевидно,

$$\zeta_1(w) = \zeta_0(w) - \frac{1}{4ai}\int_{-a}^{a}[\Omega(\tau) - \operatorname{Re}\zeta_0(\tau)]\Big[\operatorname{tg}\frac{\pi(\tau+w)}{4a} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-w)}{4a}\Big]d\tau, \quad w \in D,$$

удовлетворяет краевым условиям (2) и $\zeta_1(w)$ имеет конечный предел при $w \to \infty$.

Покажем, что значения $\zeta_1(\pm a)$ конечны. Представим интеграл в выражении $\zeta_1(w)$ как интеграл по ляпуновскому простому замкнутому контуру Γ, лежащему в полуплоскости $\operatorname{Im} w \le 0$ и имеющему общую часть с вещественной осью — отрезок $[-a,a]$, причем точки $\Gamma \setminus [-a,a]$ лежат ниже вещественной оси, с нулевой плотностью на $\Gamma \setminus [-a,a]$, т. е.

$$\zeta_1(w) = \zeta_0(w) - \frac{1}{4ai}\int_{\Gamma}\widetilde{\Omega}(\tau)\Big[\operatorname{tg}\frac{\pi(\tau+w)}{4a} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-w)}{4a}\Big]d\tau,$$

где

$$\widetilde{\Omega} = \begin{cases} \Omega(\tau) - \operatorname{Re}\zeta_0(\tau), & \tau \in [-a,a]; \\ 0, & \tau \in \Gamma \setminus [-a,a]. \end{cases}$$

Очевидно, $\widetilde{\Omega}(\tau) \in H_\alpha(\Gamma)$. Полученный интеграл типа Коши с гёльдеровой плотностью — аналитическая функция в конечной области D^Γ с границей Γ, непрерывно продолжимая на Γ, в том числе и в точки $w = \pm a$.

Аналитическая в D функция $\widetilde{\Phi}(w) = \zeta_1(w) - \Phi_0(w)$ имеет нулевые краевые условия вида (2) и может иметь в точках $w = \pm a$ логарифмические особенности. Таким образом, граница $\widetilde{\Phi}(D)$ расположена на осях координат, но в образах точек $w = \pm a$ будет образовывать прямые углы, только если значения $\widetilde{\Phi}(\pm a)$ конечны. В этом случае область $\widetilde{\Phi}(D)$, лежащая в конечной части плоскости, является вырожденной, т. е. $\widetilde{\Phi}(w) \equiv 0$ или $\Phi_0(w) \equiv \zeta_1(w)$, $w \in D$. Отсюда следует непрерывная продолжимость $\Phi_0(w)$ в точки $\pm a$. Так как $\zeta_0'(w)$ ограничена в D, $\widetilde{\Omega}(\tau)$ гёльдерова с показателем α, $\Phi_0(u+iv) \sim L_0 + L_1\exp\frac{\pi v}{4a}$ при $v \to -\infty$, то $\Phi_0'(w) \equiv \zeta_1'(w) \in L_p(D)\bigcap L_1(D)$ $\forall p \in (2, (1-\alpha)^{-1})$ согласно ([3], с. 69) и благодаря тому, что

$$\Phi_0'(u+iv) \simeq \frac{\pi e^{v - i\pi u/(2a)}}{2a^2}\int_{-a}^{a}\Omega(\tau)\sin\frac{\pi\tau}{2a}\,d\tau \quad \text{при } v \le v_0 < 0.$$

Заметим, что в [2] было более жесткое ограничение на p_0, обусловленное менее удачным выбором вспомогательной функции $\zeta_0(w)$.

Решение задачи (1), (2) в общем случае будем искать в виде

$$g(w) = \Phi_0(w) + \widetilde{T}[\omega](w), \tag{5}$$

где $\Phi_0(w)$ из (3), а оператор

$$\widetilde{T}[\omega] = -\frac{1}{4a}\int\int_D \omega(\tau)\Big[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-w)}{4a} + \operatorname{tg}\frac{\pi(\tau+w)}{4a}\Big]d\sigma_\tau +$$
$$+\frac{1}{4a}\int\int_D \overline{\omega(\tau)}\Big[\operatorname{tg}\frac{\pi(\overline{\tau}+w)}{4a} + \operatorname{ctg}\frac{\pi(\overline{\tau}-w)}{4a}\Big]d\sigma_\tau,$$

что легко проверить, удовлетворяет нулевым краевым условиям вида (2) при любой плотности $\omega(\tau)$, $\tau \in D$.

Используя представление

$$\widetilde{T}[\omega] = -\frac{1}{4a}\int\int_{\widetilde{D}} \Psi[\omega(\tau)]\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-w)}{4a}d\sigma_\tau,$$

где $\widetilde{D} = \{\tau \in C : |\operatorname{Re}\tau| < 2a\}$,

$$\Psi[\omega(\tau)] = \begin{cases} \omega(\tau), & \tau \in D; \\ -\overline{\omega(2a-\overline{\tau})}, & \operatorname{Im}\tau < 0, \operatorname{Re}\tau \in (a, 2a); \\ -\overline{\omega(-2a-\overline{\tau})}, & \operatorname{Im}\tau < 0, \operatorname{Re}\tau \in (-2a, -a); \\ -\overline{\Psi[\omega(\overline{\tau})]}, & \operatorname{Im}\tau > 0, \operatorname{Re}\tau \in (-2a, 2a), \end{cases}$$

как и в [2], нетрудно показать, что функция $f(w) = \widetilde{T}[\omega](w)$ гёльдерова с показателем $1-2/p$ и ограничена в D, если $\omega(\tau) \in L_p(D)\bigcap L_1(D)$ $\forall p > 2$.

Таким образом, представление $g(w)$ в виде (5) не выводит из нужного класса непрерывных вплоть до границы D функций. Теперь для того чтобы функция $g(w)$ была решением уравнения (1), потребуем, чтобы $\omega(\tau)$ была решением уравнения

$$\omega = \lambda(w)\widetilde{S}[\omega] + \lambda(w)\Phi_0'(w) + h(w), \tag{6}$$

где интеграл

$$\widetilde{S}[\omega] = -\frac{\pi}{16a^2}\int\int_{\widetilde{D}} \Psi[\omega(\tau)]\sin^{-2}\frac{\pi(\tau-w)}{4a}d\sigma_\tau$$

понимается в смысле главного значения и является обобщенной производной функции $f(w) = \widetilde{T}[\omega](w)$ по w.

Тем же методом, который применялся в [2] для подобного оператора при $a = 1/2$, можно показать, что оператор $\widetilde{\sigma}[\omega] \equiv \lambda(w)\widetilde{S}[\omega]$, рассматриваемый на пространстве $L_p(D)\bigcap\widetilde{L}^1(D)$ $\forall p > 2$ с нормой $\|\omega\|_{L_p\cap\widetilde{L}^1} = \|\omega\|_{L_p} + \|\omega\|_{\widetilde{L}^1}$, переводит это пространство в себя. Обозначая $t(w) = \widetilde{\sigma}[\omega](w)$, имеем

$$\|t\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1} \le (\lambda_0 + \|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0)\|\omega\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1}, \quad \|\widetilde{\sigma}\| \le (\lambda_0 + \|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0),$$

где $B(p_0)$ то же, что и в (3). Согласно теореме об обратном операторе, если

$$(\lambda_0 + \|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0) < 1 \quad \text{и} \quad (\lambda\Phi_0' + h) \in L_{p_0}(D)\bigcap\widetilde{L}^1(D),$$

то уравнение (6) имеет единственное решение

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{\sigma}^k[\lambda\Phi_0' + h] \tag{7}$$

в пространстве $L_{p_0}(D)\bigcap \widetilde{L}^1(D)$.

Заметим, что $\lambda\Phi_0'\in L_{p_0}(D)$, т. к.

$$\int\int_D |\lambda\Phi_0'|^{p_0}d\sigma_w \le \lambda_0^{p_0}\int\int_D |\Phi_0'|^{p_0}d\sigma_w.$$

Кроме того, $\lambda\Phi_0'\in \widetilde{L}^1(D)$, т. к.

$$\sup_{A\ge 0}\left\{(1+A)\int\int_{w\in D:\operatorname{Im}w<-A}|\lambda\Phi_0'|d\sigma_w\right\}\le$$
$$\le \sup_{A\ge 0}\left\{(1+A)\left[\int\int_{w\in D:\operatorname{Im}w<-A}|\lambda|^q d\sigma_w\right]^{1/q}\left[\int\int_D|\Phi_0'|^p d\sigma_w\right]^{1/p}\right\}=\|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}}\|\Phi_0'\|_{L_{p_0}}.$$

Итак, если $(\lambda_0+\|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0)<1$, то решение уравнения (6), найденное по формуле (7), удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1}\le \|\lambda\Phi_0'+h\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1}[1-(\lambda_0+\|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0)]^{-1}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи (5) с плотностью оператора $\widetilde{T}$, найденной по формуле (7), построено. Покажем, что задача 1 имеет единственное решение, если $\sup\limits_{w\in D}\operatorname{vrai}|\lambda(w)|\le\lambda_0<1$. Пусть $g(w)$ и $g_1(w)$ — два решения этой задачи. Тогда $g_0(w)=g(w)-g_1(w)$ является решением уравнения

$$g'_{0\overline{w}}=\lambda(w)g'_{0w},\quad w\in D, \tag{8}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Re}g_0(w)|_{w=u\in(-a,a)}=0;\\ \operatorname{Im}g_0(w)|_{w=\pm a+iv,\ v\in(-\infty,0)}=0,\end{cases} \tag{9}$$

причем $g_0(w)$ непрерывна в D и непрерывно продолжима в точки границы ∂D. Согласно (8) и ограничению на λ_0 функция $g_0(w)$ осуществляет отображение, сохраняющее область, а из краевых условий (9) следует, что граница $g_0(D)$ расположена на осях координат. Вследствие ограниченности область $g_0(D)$ вырожденная, и, значит, $g_0(w)\equiv 0$. $\square$

Применим полученное ограниченное решение смешанной задачи в случае, когда решение неограниченно в окрестности бесконечно удаленной точки, но задается его поведение.

При решении обратных задач фильтрации в бесконечном слое с заданной скоростью на неизвестном контуре [1] используется функция $g=\ln\frac{dz}{dw}$, где $z(w)$ — искомая функция, отображающая полуполосу в плоскости комплексного потенциала на область фильтрации. В случае неоднородного грунта функция $g(w)$ удовлетворяет уравнению вида (1) и имеет на вертикальных компонентах границы полуполосы постоянные значения мнимой части. Поэтому представляет интерес

Задача 2. Требуется найти в полуполосе $D=\{w:|\operatorname{Re}w|<a,\operatorname{Im}w<0\}$ функцию $g(w)$, непрерывную в D, с локально интегрируемыми производными и непрерывно продолжимую в конечные точки границы ∂D, $|g(w)-\pi i\frac{w}{2a}|=o(|w|)$ при $w\to\infty$, если удовлетворяются уравнения (1) и условия

$$\begin{cases}\operatorname{Re}g(w)|_{w=u\in(-a,a)}=\Omega(u);\\ \operatorname{Im}g(w)|_{w=\pm a+iv,\ v\in(-\infty,0)}=\pm\pi/2.\end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2. *Задача* 2 *имеет единственное решение в классе непрерывных в D функций с локально интегрируемыми обобщенными производными, непрерывно продолжимых в конечные точки границы ∂D, $|g(w)-\pi i\frac{w}{2a}|=o(|w|)$ при $w\to\infty$, если $\Omega(u)\in H_\alpha[-a,a]$, $1\ge\alpha>1/2$, $h(w)\in L_{p_0}(D)\bigcap\widetilde{L}^1(D)$, $p_0\in(2,(1-\alpha)^{-1})$, $\sup\limits_{w\in D}\operatorname{vrai}|\lambda(w)|\le\lambda_0<1$, $\lambda(w)\in\widetilde{L}^{q_0}(D)\bigcap\widetilde{L}^1(D)$, $q_0=p_0(p_0-1)^{-1}$ и $(\lambda_0+\|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0)<1$, где $B(p)$ из* (3).

Доказательство. Как и в предыдущем пункте, рассмотрим сначала решение задачи 2 при условии, что $\lambda(w)\equiv 0$, $h(w)\equiv 0$, $w\in D$. В этом случае $g(w)\equiv\Phi_1(w)$, где с учетом (4)

$$\Phi_1(w)=i\frac{\pi w}{2a}+\Phi_0(w), \tag{11}$$

причем краевые условия (10) и поведение в бесконечности выполнены. Заметим, что функция $\Phi_1'(u+iv)$ является ограниченной при $v\le v_0<0$, $\Phi_1'(w)\in L_p(\grave{D})$, где $\grave{D}$ — любая конечная подобласть полуполосы D, $p\in(2,(1-\alpha)^{-1})$.

В общем случае решение задачи 2 ищем в виде $g(w)=\Phi_1(w)+\widetilde{T}[\omega](w)$, где оператор $\widetilde{T}$ из предыдущего пункта, Φ_1 из (11). Так представленная функция $g(w)$ будет удовлетворять краевым условиям и поведению в окрестности бесконечности, и, значит, является решением задачи, если плотность оператора $\omega(w)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega=\lambda(w)\widetilde{S}[\omega]+\lambda(w)\Phi_1'(w)+h(w). \tag{12}$$

В соответствии с доказанным выше требуется показать, что $(\lambda\Phi_1'+h)\in L_{p_0}(D)\bigcap\widetilde{L}^1(D)$, и тогда уравнение (12) имеет единственное решение

$$\omega=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{\sigma}^k[\lambda\Phi_1'+h] \tag{13}$$

в пространстве $L_{p_0}(D)\bigcap\widetilde{L}^1(D)$.

Прежде всего, заметим, что $\lambda\in L_{p_0}(D)$, т. к.

$$\int\int_D|\lambda(w)|^{p_0}d\sigma_w\le\int\int_D|\lambda(w)|d\sigma_w\le\|\lambda\|_{\widetilde{L}^1}.$$

Убедимся, что $\lambda\Phi_1'\in L_{p_0}(D)$. Действительно,

$$\int\int_D|\lambda\Phi_1'|^{p_0}d\sigma_w=\int\int_{D_M}|\lambda\Phi_1'|^{p_0}d\sigma_w+\int\int_{D\setminus D_M}|\lambda\Phi_1'|^{p_0}d\sigma_w\le$$
$$\le\lambda_0^{p_0}\|\Phi_1'\|^{p_0}_{L_{p_0}(D_M)}+\sup_{D\setminus D_M}|\Phi_1'|^{p_0}\|\lambda\|^{p_0}_{L_{p_0}},$$

где $D_M=\{w\in D\mid \operatorname{Im}w>-M\}$. Кроме того, $\lambda\Phi_1'\in\widetilde{L}^1(D)$, т. к.

$$\sup_{A\ge 0}\left\{(1+A)\int\int_{w\in D:\operatorname{Im}w<-A}|\lambda\Phi_1'|d\sigma_w\right\}\le$$
$$\le\max\{2(\lambda_0\|\Phi_1'\|_{L_1(D_1)}+\|\lambda\|_{L_1(D\setminus D_1)}\sup_{w\in D\setminus D_1}|\Phi_1'(w)|),\quad\sup_{w\in D:\operatorname{Im}w<-1}|\Phi_0'(w)|\|\lambda\|_{\widetilde{L}^1}\}.$$

Итак, если $(\lambda_0+\|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0)<1$, то решение уравнения (12) в силу (13) удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1}\le\|\lambda\Phi_1'+h\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1}[1-(\lambda_0+\|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0)]^{-1}.$$

Таким образом, решение задачи 2 в виде (12), где ω из (13), построено. Покажем, что задача 2 имеет единственное решение, если $\sup\limits_{w\in D}\operatorname{vrai}|\lambda(w)|\le\lambda_0<1$, $\lambda(u+iv)\to 0$ при $v\to-\infty$ для п. в. $u\in[-a,a]$.

Пусть $g(w)$ и $g_1(w)$ — два решения этой задачи. Тогда $g_0(w)=g(w)-g_1(w)$ является решением уравнения (8) с краевыми условиями (9), причем $g_0(w)$ непрерывна в D и непрерывно продолжима в конечные точки границы ∂D и $|g_0(w)|=o(|w|)$ при $w\to\infty$. Согласно (8) и ограничению на λ_0 функция $g_0(w)$ осуществляет отображение, сохраняющее область, а из краевых условий (9) следует, что граница $g_0(D)$ расположена на осях координат. Если предположить, что $|g_0(\infty)|<\infty$, то $g_0(w)<\infty$, $w\in D$, т. е. область $g_0(D)$ вырожденная, и, следовательно, $g_0(w)\equiv 0$.

Предположим $g_0(\infty) = \infty$. Рассмотрим образ отрезка $\gamma_N = \{w : \mathrm{Im}\, w = -N,\ \mathrm{Re}\, w \in [-a, a]\}$ при достаточно большом $N > 0$, $g_0(\gamma_N)$ — кривая, соединяющая две точки на оси абсцисс и вместе с лучами, исходящими из этой точки, образующая границу образа области $\{w \in D : \mathrm{Im}\, w < -N\}$. При движении w по γ_N от $(a, -N/2)$ до $(-a, -N/2)$ точка $g_0(w)$ движется по кривой $g_0(\gamma_N)$ от одной точки вещественной оси до другой. Учитывая, что образ области $D(-iN/2, N/2)$ содержит на границе 0, получим $\left|\int\limits_{\gamma_N} d\arg g_0(w)\right| = \pi n$, $n \in N$. Следовательно, в соответствии с условием на поведение $\lambda(w)$ при $w \to \infty$ имеем $|g_0(w)|_{w\in\gamma_N} \sim Ce^{mN}$, $m > 0$, при $N \to \infty$, что противоречит ограничению $|g_0(w)| = o(|w|)$ при $w \to \infty$. $\square$

При решении обратных задач фильтрации в бесконечном слое с границами бьефов, расположенными на одной высоте, при задании эпюры фильтрационного давления [1] в случае неоднородного грунта функция $g = z(w)$, отображающая полуполосу в плоскости комплексного потенциала на область фильтрации, удовлетворяет уравнению вида (1) и краевому условию вида (2). Поэтому формулируется

Задача 3. Требуется найти в полуполосе $D = \{w : |\mathrm{Re}\, w| < a,\ \mathrm{Im}\, w < 0\}$ функцию $g(w)$, непрерывную в D, с локально интегрируемыми производными и непрерывно продолжимую в конечные точки границы ∂D, $\ln|g(w) - iB\exp(\pi i \frac{w}{2a})| = o(|w|)$ при $w \to \infty$ и при заданном $B \in \mathbf{R}$, если удовлетворяются (1), (2).

Теорема 3. *Задача* 3 *имеет единственное решение в классе непрерывных в D функций с локально интегрируемыми обобщенными производными, непрерывно продолжимых в конечные точки границы ∂D, $\ln|g(w) - iB\exp(\pi i\frac{w}{2a})| = o(|w|)$ при $w \to \infty$ и при заданном $B \in \mathbf{R}$, если $\Omega(u) \in H_\alpha[-a, a]$, $1 \geq \alpha > 1/2$, $h(w) \in L_{p_0}(D) \bigcap \widetilde{L}^1(D)$, $p_0 \in (2, (1-\alpha)^{-1})$, $\sup\limits_{w\in D} \mathrm{vrai}\, |\lambda(w)| \leq \lambda_0 < 1$, $\lambda(w) \in \widetilde{L}^{q_0}(D)$, $q_0 = p_0(p_0 - 1)^{-1}$, $\lambda(w)\exp\frac{\pi i w}{2a} \in \widetilde{L}^1(D)$ и $(\lambda_0 + \|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0) < 1$, где $B(p)$ из* (3).

Доказательство. Как и при решении предыдущих задач, рассмотрим сначала решение задачи 3 при условии, что $\lambda(w) \equiv 0$, $h(w) \equiv 0$, $w \in D$. В этом случае $g(w) \equiv \Phi_2(w)$, где с учетом (4)

$$\Phi_2(w) = 2iB\cos\frac{\pi w}{2a} + \Phi_0(w). \tag{14}$$

Очевидно, что краевые условия и поведение в бесконечности выполняются. Заметим, что функция $\Phi_2'(u + iv)$ уже не будет ограниченной при $v \to \infty$, $\Phi_2'(w) \in L_p(\grave{D})$, где $\grave{D}$ — любая конечная подобласть полуполосы D, $p \in (2, (1-\alpha)^{-1})$.

В общем случае решение задачи 3 ищем в виде

$$g(w) = \Phi_2(w) + \widetilde{T}[\omega](w), \tag{15}$$

где $\Phi_2(w)$ из (14), а оператор $\widetilde{T}$ — тот же, что был использован при решении первых двух задач. Так представленная функция $g(w)$ будет удовлетворять краевым условиям и поведению в окрестности бесконечности, и, значит, будет решением задачи, если плотность оператора $\omega(w)$ будет удовлетворять уравнению

$$\omega = \lambda(w)\widetilde{S}[\omega] + \lambda(w)\Phi_2'(w) + h(w). \tag{16}$$

В соответствии с доказанным выше требуется показать, что $(\lambda\Phi_2' + h) \in L_{p_0}(D) \bigcap \widetilde{L}^1(D)$, и тогда уравнение (16) имеет единственное решение

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\sigma}^k[\lambda\Phi_2' + h] \tag{17}$$

в пространстве $L_{p_0}(D) \bigcap \widetilde{L}^1(D)$.

Докажем, что $m(w) \equiv \lambda(w)\exp\frac{\pi i w}{2a} \in L_p(D)$ $\forall p > 1$. Действительно, из условия на $m(w)$ следует, что $\exists M > 0 : |m(w)| < 1$ для п.в. $w \in D$, $\operatorname{Im} w < -M$, т.е. для п.в. $w \in D \setminus D_M$. Следовательно, для $p > 1$

$$\int\!\!\int_D |m(w)|^p d\sigma_w \le M 2a\lambda_0^p \exp\frac{\pi M p}{2a} + \int\!\!\int_D |m(w)| d\sigma_w \le$$

$$\le M 2a\lambda_0^p \exp\frac{\pi M p}{2a} + \left\|\lambda(w)\exp\frac{\pi i w}{2a}\right\|_{\widetilde{L}^1(D)}.$$

Для $w \in D \setminus D_1$ имеем $\lambda(w)\Phi_2'(w) = \lambda(w)\exp\frac{\pi i w}{2a} r(w)$, $r(w)$ ограничена в $D \setminus D_1$, $\lambda(w)\Phi_2'(w) \in L_{p_0}(D_1)$, $D_1 = \{w \in D \mid \operatorname{Im} w > -1\}$. Убедимся, что $\lambda\Phi_2' \in L_{p_0}(D)$. Действительно,

$$\int\!\!\int_D |\lambda\Phi_2'|^{p_0} d\sigma_w = \int\!\!\int_{D_1} |\lambda\Phi_2'|^{p_0} d\sigma_w + \int\!\!\int_{D\setminus D_1} |\lambda\Phi_2'|^{p_0} d\sigma_w \le$$

$$\le \lambda_0^{p_0} \|\Phi_2'\|^{p_0}_{L_{p_0}(D_1)} + \sup_{D\setminus D_1} |r(w)|^{p_0} \|m(w)\|^{p_0}_{L_{p_0}}.$$

Кроме того, $\lambda\Phi_2' \in \widetilde{L}^1(D)$, т.к.

$$\sup_{A\ge 0}\left\{(1+A)\int\!\!\int_{w\in D:\operatorname{Im} w<-A} |\lambda\Phi_2'| d\sigma_w\right\} \le 2(\lambda_0\|\Phi_2'\|_{L_1(D_1)} + \sup_{D\setminus D_1}|r(w)|\,\|m(w)\|_{\widetilde{L}^1(D)}).$$

Итак, если $(\lambda_0 + \|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0) < 1$, то решение уравнения (16), найденное по формуле (17), удовлетворяет неравенству

$$\|\omega\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1} \le \|\lambda\Phi_2' + h\|_{L_{p_0}\cap\widetilde{L}^1}[1 - (\lambda_0 + \|\lambda\|_{\widetilde{L}^{q_0}})B(p_0)]^{-1}.$$

Решение задачи 3 (15) с плотностью ω из (17) построено.

Единственность решения задачи 3 доказывается дословным повторением доказательства единственности решения задачи 2 с заменой поведения $|g_0(w)| = o(|w|)$ при $w \to \infty$ в задаче 2 на поведение $|g_0(w)| = \exp o(|w|)$ в задаче 3. $\square$

Литература

1. Нужин М.Т., Ильинский Н.Б. *Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1963. – 139 с.
2. Широкова Е.А. *Об одной смешанной задаче в полуполосе для уравнения эллиптического типа* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 61–67.
3. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 510 с.
5. Насыров Р.М., Насыров С.Р. *Сходимость приближенного метода С.А. Христиановича решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 3. – С. 60–67.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 02.03.2001
окончательный вариант 30.01.2002