ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 517.518

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ ИНВОЛЮТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Известно, что оператор сингулярного интегрирования

$$(S\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (\tau - t)^{-1}\varphi(\tau)d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, при достаточно общих предположениях на плотность $\varphi(t)$ и простую замкнутую кривую Γ является инволютивным оператором. Достаточно потребовать, например, чтобы $\varphi(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$ ([1], с. 13). Множество неподвижных точек оператора совпадает с множеством функций, голоморфных внутри Γ, а решения уравнения

$$S\varphi = -\varphi \tag{1}$$

голоморфны вне Γ и исчезают на бесконечности.

В данной работе изучаются свойства биортогональных систем, порождаемых инволютивными операторами, ядра которых имеют более сложную структуру, чем ядро Коши. Пусть R — квадрат с вершинами в точках $t_1 = -t_3 = -\frac{1}{2}(1+i)$, $t_2 = -t_4 = \frac{1}{2}(1-i)$, перечисленными в порядке положительного обхода границы, и $\Gamma = \partial R$. Цель статьи — исследование интегрального оператора

$$(S\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma E(\tau - t)\varphi(\tau)d\tau \tag{2}$$

с нечетной ядерной функцией

$$E(z) = z^{-1} + (z+1+i)^{-1} + (z+1-i)^{-1} + (z-1+i)^{-1} + (z-1-i)^{-1}, \tag{3}$$

а также порождаемых им биортогонально сопряженных систем. Заметим, что оператор (2) является сингулярным возмущенным оператором с неподвижными особенностями (общую теорию см., напр., в [1], [2]).

В разделе 1 проводится равносильная регуляризация уравнения (1) и описывается множество ее решений. В разделе 2 вводится система функций

$$\{\varphi_m\} : S\varphi_m = -\varphi_m + q_m^+; \quad q_m(z) = (-1)^m (m!)^{-1}(z^m - p_m), \quad m = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

где p_m — некоторые постоянные, определяемые ниже. Доказывается, что она биортогонально сопряжена на Γ с системой

$$\{E^{(k)}(\tau)\}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00914).

в том смысле, что

$$(\varphi_m, E^{(k)}) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi_m(\tau)E^{(k)}(\tau)d\tau = \delta_{m,k}. \tag{6}$$

В разделе 3 получены биортогональные разложения по системе функций

$$\{F_k = E^{(k)} - f^{(k)},\ k = 1, 2, \dots\ ;\ F_0 \equiv 1\}. \tag{7}$$

Здесь $f(z)$ — квазиэллиптическая функция, имеющая в $\overline{R}$ единственный простой полюс в нуле с вычетом, равным 1, причем

$$f(z+1) = f(z+i) = -f(z). \tag{8}$$

Изложен также общий принцип трансформации биортогональных систем оператором (2), обсуждено возможное обобщение полученных результатов, указана их связь с теорией целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т) и преобразования Бореля.

В статье приняты следующие обозначения: l_k, $k = \overline{1,4}$, — стороны квадрата, пронумерованные в порядке положительного обхода границы, начиная с нижней стороны; $\alpha(t) = \{t + i^k,\ t \in l_k\}$ — обратный сдвиг Карлемана ($\alpha(t) : \Gamma \to \Gamma$ с изменением ориентации), индуцированный порождающими преобразованиями соответствующей двоякопериодической группы и разрывный в вершинах; $W : \varphi(t) \to \varphi[\alpha(t)]$ — инволютивный оператор сдвига; $(Vf)(z) \equiv f(z+1+i) + f(z-1-i) + f(z-1+i) + f(z+1-i)$ — линейный разностный оператор с постоянными коэффициентами.

1. О решениях уравнения (1)

Будем считать, что оператор (2) действует на линейном пространстве Q — множестве функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на каждой закрытой стороне квадрата, причем сумма скачков в противоположных вершинах равна нулю. Такой выбор обусловлен тем, что $S : Q \to Q$. Доказательство этого утверждения (т. е. выяснение характера возможных особенностей у интеграла (2)) проводится по схеме, указанной в ([3], с. 9). Для интеграла $(S\varphi)(t)$ справедливы формулы Сохоцкого $S^{\pm} = S \pm J$. Отсюда непосредственно вытекает, что неподвижными точками оператора S являются только граничные значения аналитических в R функций.

При исследовании уравнения (1) возникают трудности, обусловленные тем, что интеграл $(S\varphi)(t)$ вне R является функцией не голоморфной, а кусочно-голоморфной с линиями разрывов $\Gamma \pm i \pm 1$ (знаки не согласованы). Поэтому применим следующий прием: вместо исходного возьмем неоднородное уравнение

$$S\varphi = -\varphi + 2g^+, \tag{9}$$

где $g(z)$ отлична от постоянной и $g^+ \in Q$. Другие требования на эту функцию будут наложены ниже. Очевидно, одним из решений уравнения (9) является функция g^+. Остается найти еще одно решение φ, которое заведомо не будет граничным значением аналитической в R функции. Тогда нетривиальным решением уравнения (1) является разность

$$\theta = \varphi - g^+. \tag{10}$$

Разумеется, надо будет доказать, что любое решение (1) представимо в виде (10), причем разным функциям g соответствуют разные решения θ.

Построим решения уравнения (9), удовлетворяющие условию

$$\varphi = -W\varphi. \tag{11}$$

Такие функции голоморфны лишь в случае $\varphi \equiv 0$. Перепишем с учетом (11) соотношение (9) в виде $-WSW\varphi = \varphi + 2Wg^+$. Вычитая из уравнения (9) полученное, имеем

$$T\varphi = 2g^+ - 2Wg^+; \quad T \equiv 2J + S + WSW. \tag{12}$$

Ограниченность ядра этого уравнения

$$K(t,\tau) = E(\tau - t) - E[\alpha(\tau) - \alpha(t)] \tag{13}$$

была установлена в [4]. Его частные производные также ограничены на Γ.

Теорема 1. *Неоднородное уравнение Фредгольма* (12) *разрешимо, причем всегда существует такое его решение, что* $\varphi = -W\varphi$, $\varphi \in Q$ *и*

$$\int_\Gamma \varphi(t)dt = 0. \tag{14}$$

Фундаментальная система решений (ф. с. р.) соответствующего однородного уравнения

$$T\varphi = 0 \tag{15}$$

состоит из единственной нечетной и разрывной в вершинах функции $\varphi_0(\tau)$, *причем* $\varphi_0 \in Q$, $W\varphi_0 = -\varphi_0$, $S(\varphi_0) = -\varphi_0$ *и*

$$\int_\Gamma \varphi_0(\tau)d\tau \neq 0. \tag{16}$$

Ф. с. р. союзного уравнения

$$T'\psi = 0 \tag{17}$$

содержит лишь постоянную.

Доказательство разобьем на ряд лемм. Предварительно приведем несколько достаточно очевидных утверждений, которыми будем пользоваться далее,

а) $\varphi \in Q \Leftrightarrow W\varphi \in Q$;

б) $\alpha(i\tau) = -i\alpha(\tau)$, $E(i\tau) = -iE(\tau)$, $K(it, i\tau) = -iK(t,\tau)$;

в) $(\varphi, S\psi) = -(\psi, S\varphi)$ (см. обозначение в (6));

г) если $\varphi \in L_2(\Gamma)$ и выполнено (15), то $\varphi \in Q$.

Пусть B — множество четных функций со свойством (11) или нечетных функций со свойством $\varphi = W\varphi$. Тогда

$$b(t) \in B \;\Rightarrow\; \int_{l_j} b(t)dt = 0. \tag{18}$$

Четные функции удовлетворяют одному из условий $\varphi(t) = \pm\varphi(it)$, а нечетные — одному из условий $\varphi(t) = \pm i\varphi(it)$.

Лемма 1. *Ф. с. р. уравнений* (15) *или* (17) *не содержат функций из множества* B.

Доказательство. Допустим, что модуль такого решения принимает свое наибольшее значение M в некоторой точке $t \in l_1$. Оценим модуль интегрального слагаемого в уравнении (15), разбивая его на слагаемые по отдельным сторонам. При $\tau \in l_1$ имеем $K(t,\tau) = 0$. При $\tau \in l_3$ получим $\tau - t = \beta + i$, $\alpha(\tau) - \alpha(t) = \beta - i$, $\beta \in [-1;1]$, $K(t,\tau) = -2if(\beta^2)$, где $f(x) = (x+1)^{-1} + 4(x+5)(x^2+6x+25)^{-1}$. Воспользуемся тождеством $\int\limits_{l_3} \varphi(\tau)K(t,\tau)d\tau = \int\limits_{l_3} \frac{K(t,\tau)-K(t,-\alpha(\tau))}{2}\varphi(\tau)d\tau$. Вычисляя наибольшее значение $|f(\beta_1) - f(\beta_2)|$ при $\beta_1, \beta_2 \in [0,1]$, придем к неравенству $\left|\int\limits_{l_3}\right| \leq 0{,}55M$.

При $\tau \in l_4$ и $\gamma = \tau - t$ имеем

$$K(t,\tau) = (\gamma+1+i)^{-1} + (\gamma-1-i)^{-1} + (\gamma-1+i)^{-1} - (\gamma+2)^{-1} - (\gamma+2i)^{-1} - (\gamma+2-2i)^{-1}.$$

Интегралы с плотностью $\varphi(\tau)$ от соответствующих слагаемых в этой сумме обозначим через $J_j(t)$. Оценим первый из этих интегралов, "подправляя" его ядро слагаемым, интеграл от которого равен нулю в силу (18), а именно,

$$|J_1(t)| = \left|\int_{l_4} \varphi(\tau)[(\tau - t + 1 + i)^{-1} + (t - 1/2 - i)^{-1}]d\tau\right| = \left|\int_{l_4} \frac{\tau + 1/2}{(\tau - t + 1 + i)^{-1}(t - 1/2 - i)}\varphi(\tau)d\tau\right| \le \frac{M}{3}.$$

"Подправляющее" слагаемое выбирается из тех соображений, чтобы появился множитель $\tau + 0,5$ — линейный сдвиг, переводящий данную сторону в отрезок мнимой оси. Применяя аналогичный прием, получим оценки $|J_j(t)| \le \theta_j M$; $\theta_2 = 1/3$, $\theta_3 = \theta_4 = \sqrt{5}/5$, $\theta_5 = \sqrt{3}/3$, $\theta_6 = \sqrt{26}/26$. Поэтому справедливо суммарное неравенство $\left|\int\limits_{l_4}\right| \le 2{,}34M$. Точно такая же оценка верна и для модуля интеграла по стороне l_2. В итоге из уравнения (15) имеем $2\pi M \le 5,23M$ и $M = 0$.

Заметим, что четная функция $\varphi \in Q$ непрерывна. Поэтому вместе с четным решением $\varphi(t)$ ф. с. р. содержит и нечетную функцию $\varphi'(t)$. Достаточно продифференцировать уравнение (15) и в интегральном слагаемом применить формулу интегрирования по частям, воспользовавшись равенством $\partial K/\partial t = -\partial K/\partial \tau$. Сумма скачков произведения $\varphi(\tau)E[\alpha(\tau) - \alpha(t)]$ по переменной τ в противоположных вершинах равна нулю и внеинтегральное слагаемое исчезает. $\square$

Лемма 2. *Ф. с. р. уравнения $T\varphi = 0$ не содержит решений со свойством $\varphi = W\varphi$. Ф. с. р. союзного уравнения содержит единственную такую функцию — постоянную.*

Доказательство. В силу леммы 1 такое решение обязательно четно, т. е. его производная $\varphi'(t) \equiv 0$ как решение однородного уравнения из множества B, а постоянная удовлетворяет союзному уравнению.

Лемма 3. *Ф. с. р. союзного уравнения не содержит функций со свойством $\varphi = -W\varphi$. Ф. с. р. уравнения $T\varphi = 0$ содержит единственную такую функцию.*

Доказательство. По альтернативе Фредгольма и в силу леммы 2 ф. с. р. уравнения (15) содержит хотя бы одну такую функцию $\varphi_0(\tau)$, а по лемме 1 эта функция нечетна. Поскольку для такой функции $T = S^+ - WS^+$, то

$$(S\varphi_0)(z) = 0, \quad z \in R. \tag{19}$$

Предположим, что для решения φ_0 не выполнено условие (16). Рассмотрим квазипериодический аналог интеграла типа Коши, введенный в [5]:

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \varphi_0(\tau)\zeta(\tau - z)d\tau, \tag{20}$$

где дзета-функция Вейерштрасса построена по примитивным периодам 1 и i. В силу сделанного допущения интеграл (20) является уже двоякопериодическим аналогом интеграла типа Коши. Справедлив аналог формулы Сохоцкого $\psi^+ = \varphi_0 - W\varphi_0 + \psi$, т. е. в данном случае $\psi^+ = 2\varphi_0 + \psi$. Имеем $(S\psi)(z) = (S\psi^+)(z) = 2\psi(z)$, $z \in R$ (см. (19)). Складывая равенства $S^+\psi = 2\psi^+$ и $WS^+\psi = 2W\psi^+$, получим $S^+\psi + WS^+\psi = 4\psi \Rightarrow T'\psi = 0$, т. е. приходим к противоречию с леммой 1. Итак, решение φ_0 удовлетворяет (16), т. е. единственно.

Заметим, что $\varphi_0(i\tau) = -i\varphi_0(\tau)$ и $\varphi_0 \notin C(\Gamma)$. Первое утверждение выполнено в силу (16). Если предположить, что данная функция непрерывна, то ее производная была бы четным решением из класса B и по лемме 1 имели бы $\varphi_0' \equiv 0$. $\square$

Получим формулу для вычисления решения φ_0, которое играет в дальнейшем важную роль. Введем разность

$$\beta(t, \tau) = \zeta(\tau - t) - \zeta[\alpha(\tau) - \alpha(t)]. \tag{21}$$

Здесь и всюду в дальнейшем, если только это особо не оговорено, уже считаем, что дзета-функция Вейерштрасса построена по примитивным периодам $1 \pm i$, т. е. по диагоналям квадрата.

Разность (21) в зависимости от взаимного расположения точек τ и t на сторонах квадрата принимает девять различных значений: 0, $\pm\eta_1$, $\pm\eta_2$, $\pm(\eta_1 \pm \eta_2)$, где $\eta_{1,2} = 2\zeta(\frac{1\pm i}{2})$, т. е. является кусочной постоянной с точками разрыва в вершинах. Введем еще одну кусочную постоянную

$$c_\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \beta(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{22}$$

Если выполнено (14), то кусочная постоянная (22) является просто постоянной (непосредственным подсчетом скачков в вершинах убеждаемся, что они равны нулю).

Рассмотрим компактный оператор

$$(A\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma D(\tau - t)\varphi(\tau)d\tau \tag{23}$$

с ядерной функцией

$$D(z) = \zeta(z) - E(z), \tag{24}$$

голоморфной в круге $|z| < 2$. Решение φ_0 удовлетворяет неоднородному уравнению $(T_1\varphi) = -c_{\varphi_0}(t)$, $T_1 = 2J - A + WA$. Оператор T_1 обладает важным преимуществом по сравнению с оператором T.

Теорема 2. *Оператор T_1 обратим.*

Доказательство. Любое решение однородного уравнения

$$T_1\varphi = 0 \tag{25}$$

удовлетворяет условию (11) из-за структуры его ядра. Непосредственным интегрированием уравнения (25) убеждаемся, что выполнено условие (14). Кусочная постоянная (22) является в таком случае постоянной, антиинвариантной относительно сдвига, т. е. просто нулем. Тогда выполнено равенство (15) и $\varphi \equiv 0$ в силу теоремы 1.

Следствие 1. Справедливо представление $\varphi_0(t) = \lambda T_1^{-1} a_t$, где кусочная постоянная $a_t = \{(-i)^k,\ t \in l_k;\ k = \overline{1,4}\}$, а постоянная λ выбрана так, что $(\varphi_0, 1) = 1$.

Рассмотрим вопрос об эквивалентности уравнений (9) и (12). Было доказано, что если φ — решение (9) со свойством (11), то такое решение удовлетворяет и уравнению (12). Обратное, вообще говоря, неверно, хотя уравнение (12) разрешимо — ф. с. р. союзного уравнения (15) содержит только постоянную. Существует решение, удовлетворяющее условиям (11) и (14), но оно может не удовлетворять (9). Действительно, перепишем (12) в виде $S^+\varphi - WS^+\varphi = g^+ - Wg^+$, откуда

$$(S\varphi)(t) = -\varphi(t) + 2g^+(t) + c. \tag{26}$$

Остается выяснить, когда постоянная является нулем, и вопрос о равносильности уравнений (9) и (12) будет решен. Умножим обе части уравнения (26) на φ_0 и проинтегрируем по Γ, воспользовавшись равенствами $(\varphi_0, S\varphi) = 0$ и $(\varphi_0, \varphi) = 0$. Первое равенство справедливо в силу (19), второе очевидно. Другими словами, постоянная исчезает, если

$$(g^+, \varphi_0) = 0. \tag{27}$$

Условие (27) впредь считаем выполненным.

Приступим к непосредственному изучению исходного уравнения (1), которое перепишем в виде

$$S\theta = -\theta. \tag{28}$$

Напомним, что под функцией φ понимается вполне определенное решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям (11) и (14).

Теорема 3. *Любое решение уравнения* (28) *представимо в виде* (10). *Разным функциям* g^+ *соответствуют разные решения* θ.

Доказательство. Положим $\varphi = \theta - W\theta$. Без ограничения общности считаем, что выполнено (14), т. к. функция φ определена с точностью до слагаемого $\lambda\varphi_0$ и функции φ_0 в разности (10) соответствует $g^+ \equiv 0$. Тогда при $z \in R$ в силу (28) справедливо тождество $S\varphi \equiv -SW\theta$, т. е. функция φ удовлетворяет уравнению (12) при $g(z) = -(SW\theta)(z) + \lambda$, где постоянная выбрана так, чтобы выполнялось равенство (27).

Теперь предположим, что конечной системе линейно независимых функций $\{g_j^+\}$ соответствует линейно зависимая система решений $\{\theta_j\}$. Равенство $\sum \lambda_j(\varphi_j - g_j^+) = 0$ возможно лишь в случае, когда для функции $F^+ = \sum \lambda_j g_j^+$ имеем $F^+ = -WF^+$, т. е. $F^+ \equiv 0$. $\square$

Теорема 3 позволяет получить ряд важных следствий. Обозначим через Q_1 множество решений уравнения (28), удовлетворяющих условию (14). Множество функций $g(z)$, голоморфных в R и удовлетворяющих условиям $g^+ \in Q$ и (27), обозначим через Q_2. Ясно, что Q_1 и Q_2 — подпространства линейного пространства Q. Формула (10) определяет некоторый гомеоморфизм $B : Q_2 \to Q_1$. Найдем представление для оператора B. Для этого перейдем к описанию множества Q_1. Уравнение (25) имеет лишь тривиальное решение. Союзное к нему уравнение с учетом теоремы Коши запишется в виде $T_2\mu = 0$, $T_2 \equiv 2J + AW$.

Теорема 4. *Пусть* φ *— решение неоднородного уравнения* (12), *удовлетворяющее условиям* (11) *и* (14), *а* μ^+ *— решение уравнения*

$$T_2\mu^+ = 2g^+. \tag{29}$$

Тогда $\varphi = \mu^+ - W\mu^+$.

Доказательство. По альтернативе Фредгольма уравнение (29) безусловно разрешимо. Запишем его в равносильном виде $2\mu^+ - A\varphi = 2g^+$, поскольку по теореме Коши $A\mu^+ = 0$. Применяя к обеим частям уравнения оператор сдвига и вычитая из него полученное, имеем $T_1\varphi = 2(g^+ - Wg^+)$. Отсюда уже легко перейти к уравнению (12), поскольку кусочная постоянная (22) исчезает (см. доказательство теоремы 2).

Следствие 2. Справедливы соотношения $\theta = \mu^+ - W\mu^+ - g^+ \Leftrightarrow \theta = Bg^+$, где μ^+ удовлетворяет уравнению (29), а $B = -J + T_2^{-1} - WT_2^{-1}$.

2. Построение биортогональных систем и некоторые их свойства

Приступим к построению биортогонально сопряженных систем. Выберем в формуле (4) постоянные p_m так, чтобы $q_m^+ \in Q_2$, т. е. выполнялись условия (27). При $m = 0$ положим $p_0 = -1$. Система функций (4) со свойством (11) выбрана так, чтобы выполнялось и условие (14), $m \geq 1$. Систему производных (5) пополним единицей и положим

$$E_k = E^{(k)}, \quad k \geq 1; \quad E_0 = 1. \tag{30}$$

Систему функций (4) пополним функцией φ_0.

Теорема 5. *Системы функций* (30) *и* (4) *биортогональны на* Γ *в смысле* (6).

Доказательство. При $m = 0$ имеем $(\varphi_0, 1) = 1$, $(\varphi_0, E_j) = 0$, $j \geq 1$. Первое из этих равенств выполняется за счет выбранной нормировки, а остальные — в силу равенства (19). Кроме того, из (14) получим $(\varphi_m, 1) = 0$, $m \geq 1$. Во всех остальных случаях имеем $(S\varphi_m)(z) = 2q_m(z)$, $z \in R$, $\Rightarrow (\varphi_m, E_j) = \delta_{m,j}$. Механизм образования биортогональности совершенно элементарен и основан на простейших равенствах $q_m^{(k)}(0) = \{0,\ k \neq m; m!,\ k = m\}$, $k \geq 1$. $\square$

Теорема 6. *Система функций* (4) *полна в том смысле, что если* $g^+ \in Q_2$ *и* $(g^+, \varphi_m) = 0$, $m \geq 1$, *то* $g^+ \equiv 0$.

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через φ решение соответствующего уравнения (9), удовлетворяющее условиям (11) и (14). Умножим обе части уравнения (9) на функции (4) и проинтегрируем по Γ. В итоге получим $(\varphi, \tau^m) = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi^+$, а с учетом (11) имеем $\varphi \equiv 0$ и $g \equiv 0$. $\square$

Замечание 1. Теорема останется справедливой, если функции (4) заменить на собственные функции $\theta_m = Bq_m$ оператора (2).

Теорема 7. *Пусть функция $b(z)$ голоморфна вне Γ, исчезает на бесконечности и $b^- \in Q$. Тогда система $\{\theta_m\}$ полна в том смысле, что если $(b^-, \theta_m) = 0$, $m \geq 1$, то $b^- \equiv 0$.*

Доказательство. С учетом соотношения (28) перепишем условие теоремы в виде $(b^-, S\theta_m) = -(\theta_m, Sb^-) = -(\theta_m, Sb^- + b^-) = -(\theta_m, Vb)$, причем последнее равенство вытекает из теоремы Коши и функция $(Vb)(z)$ голоморфна в R. Если ее подправить некоторой постоянной (для функции исходной системы выполнено (14)), то она будет принадлежать подпространству Q_2. Применяя теорему 6 и замечание 1, придем к линейному разностному уравнению

$$(Vb)(z) = \lambda, \quad z \in R. \tag{31}$$

Сумма в левой части уравнения (31) голоморфна в связной внешности четырех конгруэнтных квадратов без общих точек, которая содержит наряду с R бесконечно удаленную точку. Поэтому постоянная исчезает и $b(z) \equiv 0$ ([6], с. 229). $\square$

Следствие 3. Если $\psi^- \in Q_1$ и $\psi(\infty) = 0$, то $\psi \equiv 0$.

Рассмотрим интегралы типа Коши

$$\Omega_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\tau - z)^{-1} \theta_m(\tau) d\tau, \tag{32}$$

где $\theta_0 = \varphi_0$, $\theta_m = Bq_m$, $m \geq 1$ (см. замечание 1 и следствие 2). Это кусочно-голоморфные функции с линией разрывов Γ, причем $\Omega_m^+ - \Omega_m^- = \theta_m$. Далее используем пространства аналитических функций $A(D)$, $A(cD)$, $A[D]$, $A[cD]$ [7].

Теорема 8. *Если область $D \subset R$, то система* (32) *полна в $A(D)$.*

Теорема 9. *Если $R \subset D$, то система* (32) *полна в $A(cD)$.*

Доказательство непосредственно следует из теорем 5 и 6 в силу известного критерия Банаха. Подчеркнем еще раз, что речь идет о разных системах функций $\{\Omega_m^+\}$ и $\{\Omega_m^-\}$, связанных на Γ формулой Сохоцкого.

Элементы пространства Q_1 из-за нечетности ядерной функции ортогональны в том смысле, что $(f, \psi) = 0 \ \forall f, \psi \in Q_1$. Справедлив в некотором смысле обратный результат: $f \in Q_1 \Leftrightarrow (f, \psi) = 0 \ \forall \psi \in Q_1 \Leftrightarrow (f, \theta_m) = 0 \ \forall m$. Действительно, из (28) и последнего равенства имеем $(f, S\theta_m) = 0 \Rightarrow (\theta_m, Sf) = 0$, т. е. для функции $g^+ = S^+ f$ выполнены условия теоремы 6 и $f \in Q_1$.

Пусть f — квазиэллиптическая функция с простым полюсом в нуле (вычет равен 1), удовлетворяющая условиям (8), т. е. $Wf = -f$. Систему мероморфных в R (за исключением E_0) функций (30) заменим системой функций (7), которая также биортогональна на Γ системе решений (4) в силу своей структуры. Она состоит из голоморфных в $\overline{R}$ функций, чем выгодно отличается от функций системы (30). Действительно, у функций (7) полюсы расположены в точках $mi + n$, $m^2 + n^2 \neq 0$, и 2.

3. Свойства биортогональных рядов. Приложения

Обозначим через D_0 область, ограниченную дугами окружностей $|z - i^k| = \sqrt{2}/2$, $k = \overline{1,4}$, и содержащую начало координат. Возьмем четную функцию $\Phi \in A[cD_0]$ и поставим ей в соответствие биортогональный ряд

$$\Phi \sim \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \Omega_m \tag{33}$$

с естественным образом определенными коэффициентами $\alpha_m = (\Phi, F_m)$.

Теорема 10. *Ряд* (33) *сходится к функции, по которой он построен, равномерно на замыкании* cD_0.

Доказательство идентично рассуждениям, приведенным в [8]. Разность между Φ и суммой биортогонального ряда (33) на Γ является четной гёльдеровской функцией ψ. Поскольку $\forall j$ $(\psi, F_j) = 0$ в силу равномерной сходимости ряда на Γ, то здесь вместо ψ можно взять функцию $\varphi = \psi + a^+$ и за счет подбора голоморфной в R функции $a(z)$ потребовать, чтобы $\varphi = -W\varphi \Rightarrow T\varphi = 0$. Тогда в силу (14) имеем $\varphi \equiv 0$ и по теореме Лиувилля $\psi \equiv 0$.

Замечание 2. Ряд (33) на cD_0 сходится абсолютно.

Замечание 3. В случае произвольной функции $\Phi \in A[cD_0]$ теорема 10 и замечание 2 остаются справедливыми, если замыкание cD_0 заменить на произвольный компакт $\overline{H} \subset \overline{cD_0}$.

Теперь возьмем четную функцию $a(z) \in A(D_0)$, $a^+ \in C^2(\partial D_0)$ и поставим ей в соответствие ряд

$$a \sim \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m F_m \tag{34}$$

с естественным образом определенными коэффициентами $\beta_m = (a^+, \Omega_m^-)$.

Теорема 11. *Ряд* (34) *сходится к функции, по которой он построен, равномерно на замыкании* $\overline{D}_0$.

Доказательство с учетом предыдущей теоремы проводится по стандартной схеме, основанной на разложении ядра Коши в биортогональный ряд ([9], гл. 4, § 6, п. 3). Справедливы также замечания, аналогичные замечаниям к теореме 10.

Теоремы 4 и 5 позволяют ввести системы

$$\{WF_m\}, \quad \{\mu_k^+\}, \tag{35}$$

где $\mu_k^+ = 2T_2^{-1}q_k$, $m, k \geq 1$. Они также биортогональны на Γ в смысле (6). Заметим, что $\mu_k^+ = \mu_k$, т. к. эти функции голоморфны в круге $|z| < 1{,}5$, содержащем Γ. Это прямо следует из вида ядерной функции (24) и формулы (29). Заменим (с сохранением биортогональности) первую из систем (35) на систему интегралов типа Коши

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_m[\alpha(\tau)](z - \tau)^{-1} d\tau \right\}, \quad |z| > \sqrt{2}/2.$$

Полученную систему пополним Ω_0, а вторую — единицей. Кусочно-линейный сдвиг аналитически продолжим с соответствующей стороны квадрата в четыре сегмента, дополняющих R до круга $|z| \leq \sqrt{2}/2$. Для таких биортогонально сопряженных на окружности $|z| = \sqrt{2}/2$ систем остаются справедливыми теоремы 8 и 9 с заменой области D_0 на этот круг.

Вообще, рассмотрим трансформации оператором S произвольных биортогонально сопряженных на Γ систем $\{a_m\}$, $\{b_k\}$; $a_m \in A(R)$, $b_k \in A(cR)$. Предполагаем, что для функций второй системы выполнено условие (14), т. е. $b_k^- = \gamma_k^+ + W\sigma_k^+$, где $\gamma, \sigma \in A(R)$. Из теории краевых задач со сдвигом Карлемана и гёльдеровскими коэффициентами следует, что такое представление существует и единственно. Вторую систему заменим системой $\{W\sigma_k^+\}$ с сохранением биортогональности. Тогда непосредственно проверяется, что система антиинвариантных относительно сдвига функций

$$\varphi_m : S\varphi_m = -\varphi_m + a_m^+ \tag{36}$$

биортогональна системе $\{2S^+\sigma_k^+ - 2S^+W\sigma_k^+\}$. Заметим, что функции первой системы в силу (14) определяются с точностью до произвольной постоянной, за счет выбора которой добьемся разрешимости уравнения (36).

Пусть теперь $a(z)$ и $b(z)$ — голоморфные соответственно внутри и вне Γ функции, совпадающие на этих связных компонентах с интегралом типа Коши Ω_0 (см. (32)). Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$a(z) = -(Vb)(z), \quad z \in R. \tag{37}$$

Соотношение (37) несколько неудобно тем, что оно связывает значения двух функций с разными областями голоморфности (правда, представимые в виде одного интеграла типа Коши с плотностью, антиинвариантной относительно сдвига). Справедлива формула Сохоцкого $a^+ - b^+ = \varphi_0$. Исключая отсюда плотность и используя соотношение (37), придем к частному случаю задачи

$$(Mb^-)(t) + G(t)(WMb^-)(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{38}$$

при $G \equiv 1$ и $g \equiv 0$. Здесь $M = J + V$. Задачу (38) трактуем как внешнюю многоэлементную краевую задачу, содержащую наряду со сдвигом Карлемана еще и сдвиги, переводящие контур во внутренность области. Решение ищется в классе функций, голоморфных вне Γ и исчезающих на бесконечности, граничные значения которых на каждой открытой стороне квадрата удовлетворяют условию Гёльдера, а в вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Коэффициенты задачи G и g удовлетворяют всем ограничениям, накладываемым на них при постановке классической задачи Карлемана со сдвигом ([10], гл. IV, § 13, п. 1), в том числе и условиям, гарантирующим от переопределенности задачи. Равносильную регуляризацию задачи (38) в общем случае можно провести по схеме, предложенной в [4], если только $G(t_j) = 1$, $j = \overline{1,4}$. При этом существенно используется компактность оператора (23). Более подробно остановимся на частном случае $G \equiv 1$ (т. е. $g = Wg$), поскольку в этом случае исследование задачи тесно связано со свойствами ранее введенных операторов. Будем искать решение в виде

$$b(z) = \lambda z^{-1} + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \psi(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau, \quad z \in c\overline{R}, \tag{39}$$

где λ — некоторая постоянная, а $\psi = W\psi$ — неизвестная плотность. Структура представления (39) обусловлена тем, что интеграл типа Коши с такой плотностью имеет на бесконечности нуль не менее чем второго порядка. Любое решение указанного частного случая задачи (38) представимо в виде (39). Это прямо следует из того факта, что задача Карлемана $F^+ - WF^+ = \varphi$ имеет единственное условие разрешимости (14). В итоге вместо задачи (38) имеем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$T'\psi = g_1, \tag{40}$$

где $g_1(t) = \lambda t^{-1} + \lambda\alpha(t)^{-1} - g(t)$. Из ранее установленных свойств функции φ_0 следует, что уравнение (40) разрешимо тогда и только тогда, когда $(g_1, \varphi_0) = 0 \Leftrightarrow (g, \varphi_0) = 0 \Leftrightarrow (g^+, \varphi_0) = 0$. Здесь g^+ определяется из безусловно разрешимой краевой задачи Карлемана $g^+ + Wg^+ = g_1$, решение которой можно выписать в явном виде ([5], с. 26). Если уравнение (40) разрешимо, то любое его решение обладает свойством $\psi = W\psi$ и определено с точностью до произвольной постоянной. Оператор T' несколько неудобен тем, что он не является обратимым. Поэтому, рассуждая аналогично доказательству теоремы 4, можно получить следующий результат: пусть $\mu^+ = T_3^{-1}g^+$, где $T_3 = 2J - AW$, тогда $\psi = \mu^+ + W\mu^+ + c$.

Вернемся к исходному соотношению (37). Поскольку функция $b(z)$ голоморфна вне R и исчезает на бесконечности, то функция $a(z)$ голоморфна вне четырех конгруэнтных квадратов, имеющих общие вершины с R, причем $a(\infty) = 0$. Поэтому и функция $a(z)$, и функция $b(z)$ являются нижними функциями, ассоциированными по Борелю соответственно с ц. ф. э. т. $A(z)$ и $B(z)$. Сопряженной индикаторной диаграммой (наименьшим выпуклым множеством, содержащим все особенности нижней функции) для первой функции является квадрат $3R$, для второй — квадрат R. В силу ранее установленных свойств функции φ_0 искомые функции представимы в виде $A_1(z^4)$ и $B_1(z^4)$, где $A_1(z)$ и $B_1(z)$ — целые функции порядка $\rho = 0,25$ и типа $\sigma = \sqrt{2}/2$. Умножая обе части уравнения (37) на множитель $\exp(\lambda z)dz$ и интегрируя по окружности $|z| = r$ достаточно большого радиуса (т. е. применяя преобразование Бореля в окрестности бесконечно удаленной точки), имеем

$$A(z) = 4\cos z \operatorname{ch} z\, B(z). \tag{41}$$

Индикаторы искомых целых функций являются $\pi/2$-периодическими функциями и полностью определяются из формул

$$h_B(\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta), \quad \theta \in [0, \pi/2]; \quad h_A(\theta) = 3h_B(\theta).$$

Теорема 12. *Целые функции $A(z)$ и $B(z)$ являются функциями вполне регулярного роста (в. р. р.) во всей плоскости, т. е. множество их корней правильно распределено* ([11], гл. II–III).

Доказательство. С учетом формулы (41) достаточно ограничиться рассмотрением целой функции

$$B(z) = -\int_\Gamma \varphi_0(\tau)\exp(z\tau)d\tau. \tag{42}$$

Дважды применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$B(z) = -z^{-1}\varphi_0(\tau)\exp(z\tau)\big|_\Gamma + z^{-2}\Big[\varphi_0'(\tau)\exp(z\tau)\big|_\Gamma - \int_\Gamma \varphi_0''(\tau)\exp(z\tau)d\tau\Big].$$

Луч $\arg z = \pi/4$ является одним из четырех лучей, на которых значение индикатора равно типу (направление наибольшего роста). Первое из приращений не исчезает из-за разрывности плотности в вершинах. Именно оно определяет асимптотическое поведение целой функции на данном луче, поскольку любая производная плотности ограничена в силу структуры ядра (13). Итак, функция (42) в. р. р. на данном луче. Поскольку ее индикатор является тригонометрическим в любом из координатных углов, то она в. р. р. внутри этих углов ([11], гл. III, § 7, теорема 6). Кроме того, множество лучей в. р. р. целой функции либо пусто, либо замкнуто ([11], гл. III, § 1), т.е. функция (42) в. р. р. во всей плоскости. □

Следствие 4. Множество корней ц. ф. э. т. (42) внутри каждого из координатных углов имеет нулевую плотность ([11], с. 202). Другими словами, "почти все" корни целых функций (41) и (42) лежат в "окрестностях" координатных осей.

Теперь воспользуемся одной из формул преобразования Бореля ([12], § 1, теорема 1.1.4)

$$b(z) = \int_0^\infty B(x)\exp(-zx)dx, \quad \operatorname{Re} z > 0,5. \tag{43}$$

В уравнении (37) для двух слагаемых $b(z+1\pm i)$ эта формула справедлива, т. к. $z \in R$. Для двух других слагаемых $b(z-1\pm i)$ формула неприменима, т. к. несобственный интеграл (43) расходится. Однако здесь можно воспользоваться нечетностью функции $b(z)$ и переписать уравнение (37) в виде

$$a(z) = 4\int_0^\infty B(x)\exp(-x)\cos x \operatorname{sh}(zx)dx, \quad |\operatorname{Re} z| < 0,5.$$

Заменяя здесь z на iz с учетом условия $a(iz) = -ia(z)$ и пользуясь формулой обращения синус-преобразования Фурье, имеем

$$\pi A(x) = -2\cos x \operatorname{ch} x \int_0^\infty a(t)\sin(xt)dt.$$

Последнее равенство справедливо лишь на вещественной оси, где интеграл сходится абсолютно и равномерно, т. к. нижняя функция имеет на бесконечности нуль третьего порядка и голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} z| < 0,5$.

В заключение рассмотрим вопрос об обобщении полученных результатов. Ядерная функция (3) представляет собой сумму первых пяти слагаемых разложения дзета-функции Вейерштрасса, построенной по примитивным периодам $1 \pm i$, в ряд простейших дробей. Если в формуле (3) взять большее число слагаемых (среди которых обязательно есть пять уже указанных) так, чтобы опять выполнялось условие $E(iz) = -iE(z)$, то создается впечатление, что основные результаты статьи можно перенести на этот случай. Однако это, вообще говоря, не так. Дело в том, что при доказательстве леммы 1, которая обеспечивала "хорошую разрешимость" уравнения (12), применялись специфические оценки, существенно использующие конкретный вид ядерной функции (3). Все же можно утверждать следующее: если таких слагаемых "достаточно много" (но конечное число), то картина разрешимости уравнения (12) по-прежнему описывается теоремой 1 (см. по этому поводу схему рассуждений, впервые предложенную в [13]). При этом возможны два случая. Рассмотрим внешность всех квадратов, в которые преобразования группы, вошедшие в ядерную функцию, переводят R. Если это множество связно или распадается на связные компоненты, одна из которых вместе с R содержит и бесконечно удаленную точку, то все результаты статьи и схема, по которой они получены, переносятся на данный случай (с понятными изменениями формул (41)–(43) и т. д.). В других случаях теоремы 7 и 9, по всей видимости, неверны, а рассуждения, проведенные после формулы (37), вообще не имеют смысла, т. к. наличие такой связной компоненты при выводе этих результатов имело определяющее значение.

Автор выражает благодарность проф. Л.А. Аксентьеву за ряд ценных советов и замечаний.

Литература

1. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. *Уравнения с инволютивными операторами и их приложение.* – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1988. – 192 с.
2. Дудучава Р.В. *Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики* // Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрузССР. – 1974. – Т. 60. – 134 с.
3. Гарифьянов Ф.Н. *Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 7–16.
4. Гарифьянов Ф.Н. *Интегральное представление аналитической функции внутри параллелограмма и его приложение* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 12. – С. 8–12.
5. Чибрикова Л.И. *О граничных задачах для прямоугольника* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1963. – Т. 123. – № 9. – С. 15–39.
6. Коробейник Ю.Ф. *О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях* // Матем. сб. – 1968. – Т. 75. – № 2. – С. 225–234.
7. Хавин В.П. *Пространства аналитических функций* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1966. – С. 76–174.
8. Гарифьянов Ф.Н. *Трансформации биортогональных систем и некоторые их приложения.* I // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 5–16.
9. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
10. Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* – М.: Наука, 1977. – 448 с.
11. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

12. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* – М.: Наука, 1967. – 239 с.
13. Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 43–51.

Казанский государственный энергетический университет

Поступила 10.11.2002