ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.925

*Ю.А. КОНЯЕВ*

# МЕТОД УНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

При исследовании устойчивости решения неавтономных линейных, квазилинейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в отличие от линейных однородных систем с постоянной матрицей (когда поведение их решения полностью определяется спектром матрицы системы) возникает большое количество проблем, лишь частично изученных, например, в [1]–[11].

Известен ряд теорем [2], [6], [7], позволяющих исследовать устойчивость тривиального решения неавтономных систем при "малых" возмущениях постоянной матрицы системы или при наличии "малых" нелинейных неоднородностей в системах с постоянной матрицей (напр., теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению).

Можно выделить также некоторый класс "приводимых" линейных неавтономных систем, для которых существует (и в некоторых случаях может быть построено) невырожденное преобразование [1]–[7], приводящее исходную систему к системе с постоянной матрицей (напр., известна теорема Флоке–Ляпунова о приводимости периодических линейных систем). Отметим результат Важевского [2], [7], относящийся к линейной неавтономной системе, матрица которой коммутирует с интегралом от этой матрицы. При этом поведение решения такой системы (как и в случае системы с постоянной матрицей) полностью определяется спектром матрицы системы. Однако для произвольной линейной неавтономной системы этот факт не имеет места.

**Пример 1.** Тривиальное решение системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 - 2\cos 4t & -2 + 2\sin 4t \\ 2 + 2\sin 4t & -1 + 2\cos 4t \end{pmatrix}$$

неустойчиво, что доказано в ([9], с. 123) с помощью показателей Ляпунова, хотя собственные значения матрицы $A(t)$, равные $\lambda_{1,2} = -1$, лежат в левой полуплоскости.

**Пример 2.** Для линейной системы с периодической матрицей

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ \sin\omega t & -\cos\omega t \end{pmatrix},$$

предложенной автору проф. А.Ф. Филипповым, удалось доказать (при наличии постоянных собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm 1$ матрицы $A(t)$), что поведение решения системы при $t \to +\infty$ существенно зависит от частоты $\omega$. Была построена невырожденная унитарная замена

$$x = U(t)y, \quad U(t) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\omega t}{2} & \cos\frac{\omega t}{2} \\ \cos\frac{\omega t}{2} & \sin\frac{\omega t}{2} \end{pmatrix},$$

приводящая исходную систему к системе с постоянной матрицей

$$\dot{y} = U^*(t)(A(t)U(t) - \dot{U}(t))y \equiv Cy, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0,5\omega \\ -0,5\omega & 1 \end{pmatrix},$$

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования Российской Федерации, грант № Е00-10-158.

что позволило (с учетом спектра $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-\frac{\omega^2}{4}}$ матрицы $C$) сделать вывод о неустойчивости тривиального решения при $\omega < 2$ и устойчивости при $\omega \geq 2$.

В последнее время изучен большой класс линейных и квазилинейных регулярно и сингулярно возмущенных неавтономных периодических систем, а также линейных систем с полиномиально периодической матрицей [11], достаточно часто встречающихся в прикладных задачах, для которых получены новые конструктивные алгоритмы исследования устойчивости.

В заключении этого, далеко не полного, обзора можно отметить, что в общем случае анализ устойчивости неавтономных линейных, квазилинейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений остается и в настоящее время далеко не тривиальной задачей и каждый новый результат в этой области представляет интерес.

В данной работе предложен метод исследования устойчивости, который с помощью унитарных преобразований позволяет изучать достаточно большой класс неавтономных линейных и квазилинейных систем с нормальной и "почти нормальной" матрицей, что приводит к обобщениям известных теорем для аналогичных систем с постоянной матрицей [1]–[7], некоторых результатов Важевского [2], [7], а также теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению [1], [2] на указанный класс систем.

Алгоритм метода унитарных преобразований достаточно прост и конструктивен. Он дает возможность для систем с нормальной матрицей (используя их свойства ([8], с. 279)) записать дифференциальное неравенство для квадрата нормы их решения, напрямую связанное со спектром матрицы исходной системы (см. теоремы 1–5), позволяя заметно расширить класс систем дифференциальных уравнений, для которых применим спектральный метод исследования устойчивости.

**Теорема 1.** *Тривиальное решение линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывной нормальной матрицей $A(t)$ $(A(t)A^*(t) \equiv A^*(t)A(t))$ асимптотически устойчиво, если все собственные значения $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $A(t)$ удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leq \gamma(t), \quad a(t) = \int_0^t \gamma(s)ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad (j = \overline{1,n});$$

*устойчиво при $a(t) \leq C$ $(t \geq 0)$ и неустойчиво, если*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t) \geq \gamma(t), \quad a(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \quad (j = \overline{1,n}).$$

**Доказательство.** Для любой нормальной матрицы $A(t)$ всегда [8] существует (при любом фиксированном $t$) унитарная матрица $U(t)$ $(U^*(t) \equiv U^{-1}(t))$ такая, что $U^*(t)A(t)U(t) \equiv \Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$, т. е. любая нормальная непрерывная матрица унитарно подобна диагональной непрерывной матрице из ее собственных значений. При этом квадрат евклидовой нормы решения исходной системы удовлетворяет [2], [9], [10] дифференциальному соотношению

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \operatorname{Re}(x^*A(t)x) = \operatorname{Re}(y^*\Lambda(t)y) = \sum_1^n \lambda_j(t)|y_j|^2 \leq \gamma(t)|x|^2$$

(с учетом унитарной замены $x = U(t)y$ и равенства $|x(t)| \equiv |y(t)|$, $t \geq 0$), откуда следует асимптотическая устойчивость (или устойчивость) тривиального решения. Для доказательства неустойчивости следует воспользоваться аналогичным дифференциальным неравенством обратного знака. $\square$

**Теорема 2.** *Тривиальное решение квазилинейной системы $\dot{x} = A(x,t)x$ с непрерывной (при $t \geq 0$, $|x| < R$) нормальной матрицей $A(x,t)$ асимптотически устойчиво, если ее спектр $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ удовлетворяет условиям*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(x,t) \leq \gamma(t), \quad a(t) = \int_0^t \gamma(s)ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad (j = \overline{1,n}; \quad |x| < R, \quad t \geq 0);$$

*устойчиво при* $a(t) \le C$ $(t \ge 0;\ j = \overline{1,n})$ *и неустойчиво при выполнении соотношений*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(x,t) \ge \gamma(t), \quad a(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \quad (j = \overline{1,n};\quad |x| < R,\quad t \ge 0).$$

**Доказательство.** С учетом непрерывного унитарного преобразования

$$x = U(x,t)y \quad (U^*(x,t)A(x,t)U(x,t) \equiv \Lambda(x,t))$$

нужный результат следует из дифференциального соотношения

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \operatorname{Re}(x^*A(x,t)x) = \operatorname{Re}(y^*\Lambda(x,t)y) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x,t)|y_j|^2 \quad (|x(t)| \equiv |y(t)|,\quad t \ge 0). \quad \square$$

**Следствие 1.** Тривиальное решение линейной $\dot{x} = A(t)x$ или квазилинейной системы $\dot{x} = A(x,t)x$ с непрерывной кососимметрической (или косоэрмитовой) матрицей всегда устойчиво, т. к. указанные матрицы являются нормальными и имеют чисто мнимый спектр.

Для линейных $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ и квазилинейных $\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x$ систем с нормальными матрицами имеет место некоторый аналог принципа суперпозиции.

**Теорема 3.** *Тривиальное решение квазилинейной системы* $\dot{x} = (A(x,t) + B(x,t))x$ *с непрерывными (при* $t \ge 0$, $|x| < R$*) нормальными матрицами* $A(x,t)$ *и* $B(x,t)$ *асимптотически устойчиво, если их спектр* $\{\lambda_{A_j}(x,t)\}_1^n$ *и* $\{\lambda_{B_j}(x,t)\}_1^n$ *удовлетворяет условиям*

$$\operatorname{Re}\lambda_{A_j}(x,t) \le \gamma_A(t), \quad \operatorname{Re}\lambda_{B_j}(x,t) \le \gamma_B(t),$$
$$a(t) = \int_0^t (\gamma_A(s) + \gamma_B(s))ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad (t \ge 0,\quad |x| < R,\quad j = \overline{1,n});$$

*устойчиво при* $a(t) \le C$ $(t \ge 0,\ j = \overline{1,n})$ *и неустойчиво в случае, если*

$$\operatorname{Re}\lambda_{A_j}(x,t) \ge \gamma_A(t), \quad \operatorname{Re}\lambda_{B_j}(x,t) \ge \gamma_B(t) \quad (j = \overline{1,n};\quad t \ge 0,\quad |x| < R),$$
$$a(t) \to +\infty \quad (t \to +\infty).$$

**Доказательство.** С учетом непрерывных унитарных замен

$$x = U(x,t)p = S(x,t)q \quad (|x(t)| \equiv |p(t)| \equiv |q(t)|,\quad t \ge 0),$$
$$U^*(x,t)A(x,t)U(x,t) = \Lambda_A(x,t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{A_1}(x,t), \dots, \lambda_{A_n}(x,t)\},$$
$$S^*(x,t)B(x,t)S(x,t) = \Lambda_B(x,t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{B_1}(x,t), \dots, \lambda_{B_n}(x,t)\}$$

устойчивость и асимптотическая устойчивость тривиального решения следует из дифференциального неравенства

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \operatorname{Re}(x^*A(x,t)x) + \operatorname{Re}(x^*B(x,t)x) =$$
$$= \operatorname{Re}(p^*\Lambda_A(x,t)p) + \operatorname{Re}(q^*\Lambda_B(x,t)q) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{A_j}(x,t)|p_j|^2 + \sum_{j=1}^{n}\lambda_{B_j}(x,t)|q_j|^2 \le$$
$$\le \gamma_A(t)|p|^2 + \gamma_B(t)|q|^2 = (\gamma_A(t) + \gamma_B(t))|x|^2.$$

Неустойчивость тривиального решения следует из анализа аналогичного дифференциального неравенства обратного знака. $\square$

**Следствие 2.** Если спектр нормальных матриц $A$ и $B$ лежит в левой полуплоскости ($\operatorname{Re}\lambda_{A_j} < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{B_j} < 0$, $j = \overline{1,n}$), тогда и спектр матрицы $C = A + B$ также лежит в левой полуплоскости ($\operatorname{Re}\lambda_{C_j} < 0$, $j = \overline{1,n}$). (Сумма нормальных матриц в общем случае не является нормальной.)

**Доказательство.** В силу теоремы 3 тривиальное решение системы $\dot{x} = (A+B)x$ асимптотически устойчиво, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_{C_j} < 0$.

Для произвольных матриц этот результат не имеет места, например,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_{A_j} = \lambda_{B_j} = -1 \pm i\sqrt{5} \ \ (j = 1, 2), \quad \lambda_{C_1} = -6, \quad \lambda_{C_2} = 2. \quad \square$$

**Пример 3.** Квазилинейная система $\dot{x} = (E\sin t + A(x,t))x$, где $A(x,t)$ — кососимметрическая матрица, имеет устойчивое тривиальное решение, что доказано в ([4], с. 68) с помощью метода сравнения. Этот результат сразу следует из теоремы 3 с учетом чисто мнимого спектра кососимметрической матрицы $A(x,t)$ и соотношения

$$\int_0^t \sin\tau \, d\tau \le 2 \quad (t \ge 0).$$

**Пример 4.** Устойчивость тривиального решения системы $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$, где $A(t) = \operatorname{diag}\{a_1(t), \dots, a_n(t)\}$ — диагональная матрица ($a_j(t) \le 0$, $j = \overline{1,n}$) и $B(t)$ — кососимметрическая матрица, доказана в ([4], с. 23) с помощью аппарата функций Ляпунова. Этот результат сразу следует из теоремы 3 и при менее жестких ограничениях $\int\limits_0^t a_j(s)ds \le C$ ($j = \overline{1,n}$, $t \ge 0$).

**Пример 5.** Тривиальное решение системы ([4], с. 156)

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \{a_{jk}(t)\}_1^2,$$
$$a_{11}(t) = -b + a\cos^2 bt, \quad a_{12}(t) = b - a\sin bt\cos bt,$$
$$a_{21}(t) = -b - a\sin bt\cos bt, \quad a_{22}(t) = -b + a\sin^2 bt$$

при $b < a < 2b$ является неустойчивым, хотя спектр $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a - 2b \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}\,)$ матрицы $A(t)$ является постоянным и лежит в этом случае в левой полуплоскости. Поведение решения данной системы становится понятным, если матрицу системы записать (после обозначения $\tau = bt$) в виде суммы двух нормальных матриц $A(\tau) = A_0 + B(\tau)$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\tau) = \begin{pmatrix} -1 + C_0\cos^2\tau & -C_0\sin\tau\cos\tau \\ -C_0\sin\tau\cos\tau & -1 + C_0\sin^2\tau \end{pmatrix},$$

где кососимметрическая матрица $A_0$ имеет чисто мнимый спектр, а спектр матрицы $B(\tau)$ равен $\lambda_{B_1} = -1$, $\lambda_{B_2} = C_0 - 1$ ($C_0 = a/b$). Таким образом, тривиальное решение исходной системы при $a < b$ асимптотически устойчиво, при $a = b$ устойчиво, а в случае $a > b$ имеем неустойчивое тривиальное решение.

**Теорема 4.** *Тривиальное решение системы $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ с непрерывной нормальной матрицей $A(t)$ и произвольной непрерывной матрицей $B(t)$ асимптотически устойчиво, если спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $A(t)$ и норма $\|B(t)\|$ удовлетворяют соотношениям*

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t) \le \gamma(t), \quad a(t) = \int_0^t (\gamma(s) + \|B(s)\|)ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad (j = \overline{1,n}; \ \ t \ge 0),$$

*и устойчиво при $a(t) \le C$ ($j = \overline{1,n}$; $t \ge 0$).*

**Доказательство** с учетом унитарной замены

$$x = U(t)y \quad (U^*(t)A(t)U(t) \equiv \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\} = \Lambda(t))$$

следует из дифференциального неравенства

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \operatorname{Re}(x^*A(t)x) + \operatorname{Re}(x^*B(t)x) \le \operatorname{Re}(y^*\Lambda(t)y) + \|B(t)\|\,|x|^2 \le (\gamma(t) + \|B(t)\|)|x|^2$$

и последующей оценки

$$|x(t)| \leq |x(0)| \exp\left(\int_0^t (\gamma(s) + \|B(s)\|)ds\right). \quad \square$$

**Теорема 5.** *Тривиальное решение квазилинейной системы* $\dot{x} = A(t)x + f(x,t)$ $(f(0,t) \equiv 0)$ *с непрерывной нормальной матрицей* $A(t)$ *и непрерывной функцией* $f(x,t)$ *(при* $t \geq 0$, $|x| < R$*) асимптотически устойчиво, если спектр* $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ *матрицы* $A(t)$ *удовлетворяет неравенствам* $\mathrm{Re}\,\lambda_j(t) \leq -\delta$ $(\delta > 0,\ t \geq 0,\ j = \overline{1,n})$ *и для функции* $f(x,t)$ *при достаточно малых* $|x|$ *и любом* $t \geq 0$ *справедлива оценка* $|f(x,t)| \leq C|x|^{1+\alpha}$ $(\alpha, C > 0)$.

**Доказательство** (с учетом аналогичной предыдущему замены $x = U(t)y$) следует из дифференциального неравенства

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \mathrm{Re}(x^*A(t)x) + \mathrm{Re}(x^*f(x,t)) \leq \mathrm{Re}(y^*\Lambda(t)y) + C|x|^{2+\alpha} \leq$$
$$\leq (-\delta + C|x|^{\alpha})|x|^2 \leq (-\delta_1)|x|^2 \quad (0 < \delta_1 < \delta). \quad \square$$

Последняя теорема является в определенном смысле обобщением известной теоремы Ляпунова [1], [2] об асимптотической устойчивости по первому приближению для неавтономных систем с нормальной матрицей.

Автор благодарит Наутина Владимира Ивановича за полезные советы и помощь в работе.

## Литература


1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Розо М. *Нелинейные колебания и теория устойчивости.* – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* – М.: Мир, 1980. – 300 с.
5. Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова.* – М.: Наука, 1970. – 240 с.
6. Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения.* – М.: Наука, 1987. – 304 с.
7. Морозов В.М., Каленова В.И. *Оценивание и управление в нестационарных линейных системах.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 144 с.
8. Воеводин В.В. *Линейная алгебра.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
9. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.
10. Коняев Ю.А. *Достаточные условия устойчивости решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений в критических случаях* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 4. – С. 709–712.
11. Коняев Ю.А. *Спектральный метод исследования устойчивости некоторых классов неавтономных дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 5. – С. 51–61.


*Российский университет*
*Дружбы народов*

*Поступила*
23.07.1999