

*И.В. ЧЕРНЫШЕВ***ФОРМИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПРОФИЛЯ ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАНАЛА**

Задача о развитии однородного профиля течения вязкой жидкости на входе в канал привлекала внимание многих авторов и исследовалась различными методами. Так в ([1], с. 159) приводятся расчеты Г. Шлихтинга, а также результаты, полученные Л. Шиллером и Б. Пуннисом, как для плоского, так и для цилиндрического каналов. Эти расчеты были выполнены на основе уравнений ламинарного пограничного слоя методом сращиваемых асимптотических разложений и хорошо согласуются с экспериментальными данными И. Никурадзе.

В настоящее время задача о входном участке стала одним из тестовых примеров для проверки новых численных схем, поэтому имеются многочисленные конечно-разностные решения этой задачи на основе полных уравнений Навье–Стокса (напр., [2]; [3], с. 572). В ([4], с. 203) в качестве демонстрации операторного метода Лапласа приводится аналитическое решение задачи о формировании параболического профиля в круглой трубе в предположениях, при которых исходные уравнения переходят в линеаризованные уравнения пограничного слоя. Однако все упомянутые выше результаты относились к случаю, когда на срезе канала профиль скорости является однородным.

В данной работе предлагается аналитическое решение задачи о развитии во входном участке цилиндрического канала неоднородного осесимметричного профиля течения жидкости при тех же предположениях, что и в [4]. Формулы для расчета полей продольной и поперечной компонент скорости представлены в виде рядов по функциям Бесселя. Полученное решение наиболее пригодно в тех случаях, когда поперечные перетоки жидкости малы, чему соответствует профиль входной скорости, задаваемый достаточно гладкой выпуклой функцией. Процесс формирования параболического профиля скорости в канале демонстрируется расчетами некоторых задач с неоднородным входным распределением скорости жидкости. Приводятся оценки входной длины.

Полученное решение обобщает упомянутые выше решения задачи об эволюции плоского профиля и может, в частности, применяться для расчета развития струйных течений с гладким входным профилем скорости. Рассмотренная в статье постановка моделирует реальную физическую ситуацию о подводе жидкости из другого канала, бака, сопла и т. п. в прямолинейный участок канала. При этом считается, что сформирован какой-то начальный профиль продольной скорости, а поперечная скорость на входе отсутствует, например, поток подводится через систему формирующих устройств — сеток, хонейкомбов и т. п.

1. Пусть на входе в круглую полубесконечную цилиндрическую трубу радиуса a имеется стационарный поток вязкой жидкости с заданным осесимметричным профилем скорости $U(r)$. Под влиянием сил вязкости по мере движения жидкости вдоль трубы профиль скорости деформируется, принимая параболическую форму. Решение задачи о продольной эволюции профиля будем строить методом, аналогичным примененному в работе [4], в которой рассмотрен случай развития однородного профиля ($U(r) = u_0 = \text{const}$). Учитывая осевую симметрию задачи, удобно записать определяющие уравнения ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрических

координатах r , φ , z , направив ось z вдоль оси канала. Поток на входе в канал прямолинейный и осесимметричный, краевые условия также не зависят от угловой координаты φ , поэтому течение является осесимметричным и угловая составляющая скорости равна нулю. Стационарные уравнения Навье–Стокса в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right), \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u , v — продольная и поперечная компоненты вектора скорости; p — давление; ρ , ν — соответственно плотность и кинематическая вязкость жидкости. Система решается при следующих краевых условиях:

$$u(a, z) = 0, \quad v(a, z) = 0, \quad u(r, 0) = U(r), \quad v(r, 0) = 0. \quad (1.2)$$

Кроме того, учитывая ограниченность и осесимметричность решения, потребуем

$$|u(r, z)| < \infty, \quad v(0, z) = 0.$$

Полагая, что поперечная составляющая скорости гораздо меньше продольной ($v \ll u$), в уравнениях движения можно пренебречь слагаемыми, содержащими v . Тогда из первого уравнения (1.1) получим $\partial p / \partial r = 0$, $p = p(z)$. Следовательно, давление во всех поперечных сечениях канала постоянно. Далее, поскольку изменение скорости в поперечном направлении происходит быстрее, чем в продольном, в уравнении можно пренебречь производной $\partial^2 u / \partial z^2$, оставив $\partial^2 u / \partial r^2$. Для линеаризации второго уравнения (1.1) заменим множитель u в произведении $u \partial u / \partial z$ средней по расходу скоростью

$$u_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a U(r) r \, dr.$$

В результате этих упрощений второе уравнение в (1.1) примет вид

$$u_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad z > 0, \quad r \in (0, a). \quad (1.3)$$

Проведенная редукция системы уравнений (1.1) является приближением пограничного слоя и вполне оправдана при условии, что число Рейнольдса $Re = u_0 a / \nu$ достаточно велико. Однако правомерность пренебрежения слагаемым $v \partial u / \partial r$ по сравнению с $u \partial u / \partial z$ при линеаризации уравнений требует специального исследования ([5], с. 497). Разложение выражений для конвективных слагаемых в ряд Тейлора в некоторой характерной точке входного сечения ($r = r^*$, $z = 0$) позволяет получить в линейном приближении оценку для характерного входного профиля

$$\left| \frac{\partial U(r^*)}{\partial r} \right| \ll \left| \frac{U(r^*)}{r} \right|, \quad (1.4)$$

гарантирующую справедливость дальнейших рассуждений.

Из уравнения неразрывности, учитывая второе из условий (1.2), получаем

$$\int_0^a r \frac{\partial u}{\partial z} \, dr = - \int_0^a \frac{\partial}{\partial r} (rv) \, dr = -rv \Big|_0^a = 0.$$

Используя это соотношение, исключим давление из уравнения (1.3). Для этого умножим (1.3) на r и проинтегрируем в пределах от 0 до a , откуда найдем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2\rho\nu}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

Подставляя выражение для $\partial p/\partial z$ в уравнение (1.3) и раскрывая производную, получаем уравнение с единственной неизвестной $u(r, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2\sigma}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_a + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (1.5)$$

где введено обозначение $\nu/u_0 = \sigma$.

Для решения (1.5) применим операционный метод с преобразованием Лапласа по переменной z ([6], с. 520). Тогда для изображения

$$V(r, s) = \int_0^\infty u(r, z) e^{-sz} dz,$$

имеем

$$sV - u(r, 0) = -\frac{2\sigma}{a} \left(\frac{dV}{dr} \right)_a + \sigma \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dV}{dr}.$$

Учитывая, что $u(r, 0) = U(r)$, преобразуем уравнение к неоднородному модифицированному уравнению Бесселя ([7], с. 112)

$$r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + r \frac{dV}{dr} - \frac{r^2 s}{\sigma} V = \frac{2r^2}{a} \left(\frac{dV}{dr} \right)_a - \frac{r^2 U(r)}{\sigma}.$$

Общее ограниченное решение этого уравнения имеет вид

$$V = V_0 + V_1 + V_2,$$

где $V_0 = AI_0(qr)$ ($q = \sqrt{s/\sigma}$, $A = \text{const}$) — общее решение однородного уравнения, $V_1 = -\frac{2\sigma}{sa} \left(\frac{dV}{dr} \right)_a$, а функция V_2 удовлетворяет уравнению

$$r^2 \frac{d^2 V_2}{dr^2} + r \frac{dV_2}{dr} - \frac{r^2 s}{\sigma} V_2 = -\frac{r^2 U(r)}{\sigma}.$$

Будем искать частное решение этого уравнения в виде ряда по собственным функциям однородной задачи

$$V_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_0(q_k r), \quad q_k = \alpha_k/a = \sqrt{s_k/\sigma}, \quad (1.6)$$

где α_k , $k = 1, 2, \dots$, — корни модифицированной функции Бесселя нулевого порядка $I_0(\alpha_k) = 0$ (как известно, они чисто мнимые). Разложим $U(r)$ в ряд по этой же системе функций

$$U(r) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k I_0(q_k r), \quad B_k = -\frac{2}{I_1^2(q_k a) a^2} \int_0^a r U(r) I_0(q_k r) dr. \quad (1.7)$$

Подставляя разложения (1.6), (1.7) в уравнение для функции V_2 , проведя ряд упрощений и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых функциях $I_0(q_k r)$, найдем коэффициенты

$$A_k(q) = \frac{B_k}{\sigma(q^2 - q_k^2)} = \frac{B_k}{s - s_k}.$$

Используя найденные функции V_0 , V_1 , V_2 , получим

$$V(r, s) = AI_0(qr) - \frac{2}{q^2 a} \left(\frac{dV}{dr} \right)_a + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(q) I_0(q_k r).$$

Дифференцируя это равенство по r и полагая $r = a$, найдем

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_a = AqI_0'(qa) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(q)q_kI_0'(q_ka) = AqI_1(qa) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(q)q_kI_1(q_ka),$$

$$V(r, s) = A\left(I_0(qr) - \frac{2}{qa}I_1(qa)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(q)\left(I_0(q_kr) - \frac{2q_k}{q^2a}I_1(q_ka)\right).$$

Из первого граничного условия (1.2) ($V(a, s) = 0$) определим постоянную

$$A = \frac{2}{q^2aI_2(qa)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(q)q_kI_1(q_ka).$$

Итак, изображение искомого решения найдено. После упрощения его можно записать в виде

$$V(r, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{\sigma(q^2 - q_k^2)} \left(\frac{2q_kI_1(q_ka)}{q^2a} \frac{(I_0(qr) - I_0(qa))}{I_2(qa)} + I_0(q_kr) \right). \quad (1.8)$$

Перейдем к отысканию оригинала $u(r, z)$, применив к (1.8) обратное преобразование Лапласа. Полученные интегралы посчитаем с помощью вычетов ([6], с. 409). Особыми точками функции $V(r, s)$ являются 1) точка $q = 0$ ($s = 0$); 2) точки $q = p_m$, $m = 1, 2, \dots$ ($s = s_m = p_m^2\sigma$), где $I_2(p_ma) = 0$.

Заметим, что в точках $q = q_k$, $k = 1, 2, \dots$ ($s = s_k = q_k^2\sigma$), где $I_0(q_ka) = 0$, функция $V(r, s)$ особенностей не имеет, хотя слагаемые ряда (1.8) содержат в знаменателе $q^2 - q_k^2$. Действительно,

$$\lim_{q \rightarrow q_k} \left(\frac{2q_k}{q^2aI_2(qa)} (I_0(qr) - I_0(qa))I_1(q_ka) + I_0(q_kr) \right) = \frac{I_0(q_kr)I_0(q_ka)}{I_2(q_ka)} = 0.$$

Следовательно, $\lim_{s \rightarrow s_k} V(r, s) = 0/0$, но эта особенность устранимая, по правилу Лопиталья легко показать, что предел конечен.

По основной теореме разложения

$$u(r, z) = \operatorname{res}_{s=0} V(r, s) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{s_m z} \operatorname{res}_{s=s_m} V(r, s).$$

Функция (1.8) в точке $s = 0$ имеет простой полюс, поскольку в соответствии с разложениями для функций I_0, I_2

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{I_0(qa) - I_0(qr)}{I_2(qa)} = \lim_{s \rightarrow 0} 2 \frac{q^2(a^2 - r^2) + o(s^2)}{q^2a^2(1 + o(s))} = 2(1 - r^2/a^2) \neq 0 \quad \text{при } r < a.$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{s=0} V(r, s) = \lim_{s \rightarrow 0} sV(r, s) = 2(1 - r^2/a^2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2B_kI_1(q_ka)}{aq_k}.$$

Так как для средней по расходу скорости u_0 в силу (1.7) справедливо разложение

$$u_0 = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_kI_1(q_ka)}{q_k},$$

то

$$\operatorname{res}_{s=0} V(r, s) = 2u_0(1 - r^2/a^2).$$

В точках $s = s_m$, где $I_2(p_ma) = 0$, функция $V(r, s)$ тоже имеет простые полюсы. Опуская промежуточные выкладки, выпишем

$$\operatorname{res}_{s=s_m} V(r, s) = -\frac{8}{p_m^2a^3} \left(1 - \frac{I_0(p_mr)}{I_0(p_ma)} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_kq_kI_1(q_ka)}{p_m^2 - q_k^2}.$$

Итак, найдены все вычеты функции $V(r, s)$, продольную компоненту скорости можно записать в виде

$$u(r, z) = 2u_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) - \frac{8}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_m^2} \left(1 - \frac{I_0(p_m r)}{I_0(p_m a)}\right) \exp\left(\frac{\beta_m^2 z}{\text{Re } a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k q_k I_1(q_k a)}{p_m^2 - q_k^2}.$$

Перепишем полученную формулу в терминах функций Бесселя первого рода, более удобных для расчета конкретных задач

$$u(r, z) = 2u_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m^2} \left(1 - \frac{J_0(\mu_m r/a)}{J_0(\mu_m)}\right) \exp\left(-\frac{\mu_m^2 z}{\text{Re } a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k \lambda_k J_1(\lambda_k)}{\mu_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (1.9)$$

где $\lambda_k, \mu_m, k, m = 1, 2, \dots$, — соответственно корни функций Бесселя J_0 и J_2 , $J_0(\lambda_k) = 0$, $J_2(\mu_m) = 0$, а

$$C_k = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k) a^2} \int_0^a r U(r) J_0(\lambda_k r/a) dr.$$

Из уравнения неразрывности найдем поперечную составляющую скорости

$$v(r, z) = \frac{8}{\text{Re}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} - \frac{J_1(\mu_m r/a)}{J_0(\mu_m) \mu_m}\right) \exp\left(-\frac{\mu_m^2 z}{\text{Re } a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k \lambda_k J_1(\lambda_k)}{\mu_m^2 - \lambda_k^2}. \quad (1.10)$$

Из формул (1.9), (1.10) видно, что по мере удаления от начального сечения ($z \rightarrow \infty$), как и предполагалось, устанавливается параболический профиль Пуазейля $u = 2u_0(1 - r^2/a^2)$, $v = 0$.

2. Для различных входных профилей скорости жидкости были выполнены численные расчеты по формулам (1.9), (1.10). Возвращаясь к вопросу о редукции исходной системы уравнений (1.1) к уравнению (1.5) и мотивации при пренебрежении конвективным слагаемым $v \partial u / \partial r$, заметим, что проведенные многочисленные тестирования для различных входных профилей и сравнение их с прямыми расчетами двумерных уравнений пограничного слоя позволяют утверждать, что допущение $|v \partial u / \partial r| \ll |u \partial u / \partial z|$ оправдано в той или иной степени для ряда достаточно гладких профилей без возвратных течений, не только удовлетворяющих оценке (1.4).

Некоторые из полученных картин развития безразмерной продольной компоненты скорости u/u_0 вдоль канала показаны на рис. а)–г). Входные профили отнормированы так, что во всех приведенных примерах полный расход одинаков $Q = u_0 \pi a^2$. Расстояние z (см. рис.) в каждом примере выбрано так, что отличие расчетного профиля от развитого параболического составляет примерно 1%. На рис. а) показано решение классической задачи о развитии однородного профиля $U(r) = u_0 = \text{const}$. Рис. б) демонстрирует развитие степенных профилей из семейства

$$U(r)/u_0 = (n+1)(1 - r^2/a^2)^n \quad (2.1)$$

при $n = 4$. Такие входные распределения скорости аппроксимируют струйное втекание в канал. Исследовалась также задача о расширении цилиндрической струи, втекающей вдоль оси канала: $U(r)/u_0 = a^2/h^2$ при $0 \leq r/a \leq h/a$, $U(r)/u_0 = 0$ при $h/a < r/a \leq 1$. На рис. в) изображен случай при $h/a = 0,1$. Чтобы понять качественную картину установления профиля с возвратными течениями, брались функции

$$U(r)/u_0 = \frac{\lambda_k}{2J_1(\lambda_k)} J_0(\lambda_k r/a), \quad (2.2)$$

т. е. отдельные слагаемые ряда (1.7). На рис. г) представлен один из профилей этого семейства при $k = 2$, для которого жидкость втекает вдоль стенок, а в центре канала имеет место интенсивное вытекание.

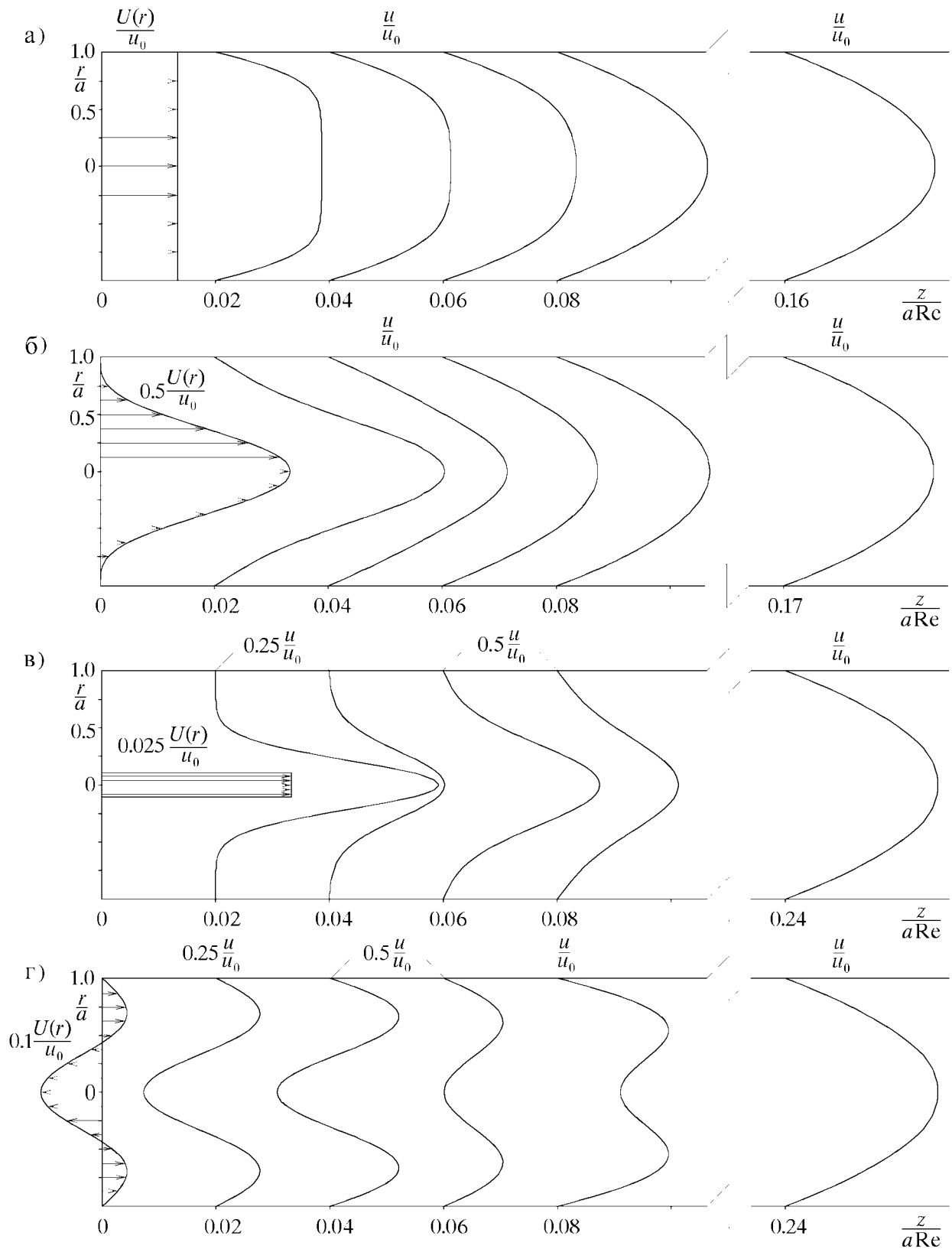


Рис. а)–г). Развитие профиля безразмерной скорости u/u_0 по длине канала для различных входных профилей скорости жидкости: а) — однородный поток; б) — степенной профиль (2.1) при $n = 4$; в) — цилиндрическая струя радиуса $h = 0,1a$; г) — профиль формы (2.2) при $k = 2$.

Для цилиндрической струи, представленной на рис. в), из-за разрыва скорости имеются области с интенсивными поперечными перетоками и слагаемое $v\partial u/\partial r$ в некоторых сечениях даже больше, чем $u\partial u/\partial z$. Поэтому применяемая нами процедура линеаризации для таких сильноградиентных профилей не оправдана. Такая же неоднозначная ситуация наблюдается для входных профилей с возвратными течениями.

В различных приложениях, связанных с течениями в трубопроводах, важно знать входную длину, т. е. то расстояние от входа в канал, на котором профиль скорости уже практически не претерпевает изменения. Проведенные расчеты для однородного и струйного профилей, изображенных на рис. а), б), а также для втекающих профилей формы (2.2) позволяют сделать следующие выводы. Наименьшая входная длина наблюдается у профиля (2.2) при $k = 1$. Уже на расстоянии $L = 0,11a \text{ Re}$ профиль отличается от параболического менее, чем на 1%. Такое быстрое установление очевидно, поскольку

$$\frac{\lambda_1}{2J_1(\lambda_1)} J_0\left(\frac{\lambda_1 r}{a}\right) = \frac{\lambda_1}{2J_1(\lambda_1)} \left(1 - \left(\frac{\lambda_1 r}{2a}\right)^2 + O\left(\frac{\lambda_1 r}{2a}\right)^4\right) \approx 2,32 \left(1 - 1,44 \frac{r^2}{a^2}\right),$$

т. е. форма уже на входе близка к параболическому профилю Пуазейля. Входная длина в случае развития однородного профиля составляет примерно $L = 0,16a \text{ Re}$.

В общем случае входная длина — не только функция числа Рейнольдса, а функционал, зависящий от вида входного профиля скорости $U(r)$. Отметим однако, что для всех рассмотренных примеров для входной длины можно приближенно использовать формулу $L \leq 0,24a \text{ Re}$. На таком расстоянии даже для довольно интенсивных струйных входных течений сформировавшийся профиль будет отличаться от параболического менее, чем на 1%.

Заключение. Полученное в работе решение позволяет рассчитывать гидродинамические поля во входном участке цилиндрического канала, а также оценивать входную длину для различных неоднородных втекающих потоков без возвратных течений, с малыми поперечными перетоками жидкости и с достаточно гладкими выпуклыми функциями профиля $U(r)$. Дальнейшим шагом в улучшении полученного решения могло бы быть использование разной линеаризации при малых и больших z ($u\partial u/\partial z \approx U(r)\partial u/\partial z$ при $z \rightarrow 0$, $u\partial u/\partial z \approx 2u_0(1 - r^2/a^2)\partial u/\partial z$ при $z \rightarrow \infty$) с последующим сращиванием двух частей решения.

Литература

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. — М.: Ин. лит., 1956. — 528 с.
2. Тейлор Т.Д., Ндефо Э. *Расчет течения вязкой жидкости в канале при помощи метода расщепления* // Числ. методы в механ. жидкостей. — М.: Мир, 1973. — С. 218–229.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. *Вычислительная гидродинамика и теплообмен*. — М.: Мир, 1990. — 728 с.
4. Котляр Я.М. *Методы математической физики и задачи гидроаэродинамики*. — М.: Высш. школа, 1991. — 208 с.
5. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1988. — 688 с.
7. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. *Специальные функции математической физики*. — М.: Наука, 1978. — 319 с.

Волгоградский государственный
университет

Поступили
первый вариант 21.07.2003
окончательный вариант 11.05.2004