ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 514.764

С.М. МИНЧИЧ, Л.С. ВЕЛИМИРОВИЧ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, СОДЕРЖАЩИХ РИМАНОВЫ ПОДПРОСТРАНСТВА

В работе получены условия, при которых обобщенное риманово пространство может содержать подпространство с симметричным индуцированным основным тензором в двух случаях. В первом случае подпространство предполагается заданным и определяется кососимметричная часть основного тензора пространства. Во втором случае кососимметричная часть основного тензора задана и определяется подпространство такое, что индуцированный основной тензор является симметричным. Все результаты имеют локальный характер.

1. Введение

Обобщенным римановым пространством GR_N называется [1] N-мерное дифференцируемое многообразие, снабженное несимметричным основным тензором $G_{ij}(x^1,\dots,x^N) \equiv G_{ij}(x) \neq G_{ji}(x)$, где x^i — локальные координаты на многообразии. Пусть H_{ij} и K_{ij} являются соответственно симметричной и кососимметричной частями тензора G_{ij}. Предполагая, что $\det(H_{ij}) \neq 0$, можно определить тензор H^{ij}, удовлетворяющий условию $H_{ip}H^{pj} = \delta_i^j$. Тензоры H_{ij} и H^{ij} будут использоваться для опускания и поднятия индексов в пространстве GR_N.

Рассмотрим подпространство в GR_N, заданное уравнениями

$$x^i = x^i(u^1,\dots,u^M) \quad (i=1,\dots,N, \ \ \operatorname{rank}(x^i_\alpha) = M, \quad x^i_\alpha = \partial x^i/\partial u^\alpha). \tag{1.1}$$

Основной тензор

$$g_{\alpha\beta} = x^i_\alpha x^j_\beta G_{ij} \quad (\alpha,\beta,\dots = 1,\dots,M),$$

индуцируемый на этом подпространстве, в общем случае является также несимметричным [2].

Пусть $h_{\alpha\beta}$ и $k_{\alpha\beta}$ — соответственно симметричная и кососимметричная части тензора $g_{\alpha\beta}$. При этом

$$\text{a)} \ \ h_{\alpha\beta} = x^i_\alpha x^j_\beta H_{ij}, \quad \text{b)} \ \ k_{\alpha\beta} = x^i_\alpha x^j_\beta K_{ij}. \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что равенство $K_{ij}=0$ влечет равенство $k_{\alpha\beta}=0$, т. е. на всяком подпространстве риманова пространства индуцируется симметричный основной тензор.

В данной работе изучается следующий вопрос, поставленный М. Прванович в личном сообщении: *может ли данное обобщенное риманово пространство GR_N содержать подпространство R_M с симметричным индуцированным основным тензором*? Из соотношений

$$\text{a)} \ \ g_{\alpha\beta} = x^i_\alpha x^j_\beta (H_{ij} + K_{ij}), \quad \text{b)} \ \ H_{ij} = H_{ji} \tag{1.3}$$

очевидно, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ тогда и только тогда, когда

$$x^i_\alpha x^j_\beta K_{ij} = 0. \tag{1.4}$$

В работе исследуются условия, при которых соотношение (1.3) имеет место и компоненты K_{ij} не обращаются в нуль одновременно.

2. Случай, когда подмногообразие задано

Предполагается, что уравнения (1.1), определяющие подмногообразие $\mathcal{M}_M$, заданы и нужно определить пространство GR_N таким образом, чтобы $\mathcal{M}_M$ оказалось римановым подпространством $R_M \subset GR_N$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}_M$ — подмногообразие дифференцируемого многообразия $\mathcal{M}_N$, $2 \leq M < N$, заданное уравнениями (1.1). Тогда на $\mathcal{M}_N$ в окрестности точки из $\mathcal{M}_M$ можно определить несимметричный основной тензор $G_{ij}(x^1, \ldots, x^N)$ таким образом, что индуцированный основной тензор на $\mathcal{M}_M$ будет симметричным.*

Доказательство. Уравнения (1.3) для неизвестных функций $K_{ij} = -K_{ji}$ переменных x^i можно переписать следующим образом:

$$K_{12}(x^1_\alpha x^2_\beta - x^2_\alpha x^1_\beta) + \cdots + K_{1N}(x^1_\alpha x^N_\beta - x^N_\alpha x^1_\beta) + \cdots + K_{N-1N}(x^{N-1}_\alpha x^N_\beta - x^N_\alpha x^{N-1}_\beta) = 0. \quad (2.1)$$

Число неизвестных K_{ij} в (2.1) равно $\binom{N}{2}$, а число уравнений — $\binom{M}{2}$. Поэтому из уравнений (2.1) можно определить самое большее $\binom{M}{2}$ неизвестных, в то время как $\binom{N}{2} - \binom{M}{2}$ неизвестных K_{ij} можно положить равными произвольным функциям координат x^i, т. е. они не обязаны быть нулевыми. Из (1.2) и (1.3) при этом следует $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, т. е. подмногообразие $\mathcal{M}_M$ становится римановым пространством R_M, вложенным в GR_N.

Пространство GR_N может содержать несколько римановых подпространств $R_{M_1}, \ldots, R_{M_p}$. Точнее, имеет место

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}_{M_1}, \ldots, \mathcal{M}_{M_p}$ — подмногообразия дифференцируемого многообразия $\mathcal{M}_N$, заданные уравнениями*

$$x^i = \overset{a}{x}{}^i(\overset{a}{u}{}^1, \ldots, \overset{a}{u}{}^{M_a}), \quad i = 1, \ldots, N; \quad a = 1, \ldots, p, \quad (2.2)$$

и

$$\binom{M_1}{2} + \cdots + \binom{M_p}{2} < \binom{N}{2}. \quad (2.3)$$

Если $\mathcal{M}_{M_1} \bigcap \cdots \bigcap \mathcal{M}_{M_p} \neq \emptyset$, то в окрестности точки $x_0 \in \mathcal{M}_{M_1} \bigcap \cdots \bigcap \mathcal{M}_{M_p}$ можно ввести на $\mathcal{M}_N$ несимметричный основной тензор $G_{ij}(x)$ такой, что индуцированный основной тензор $\overset{a}{g}_{\alpha\beta}$ на соответствующей окрестности в $\mathcal{M}_{M_a}$, $a = 1, \ldots, p$, будет симметричным.

Если

$$\binom{M_1}{2} + \cdots + \binom{M_p}{2} \geq \binom{N}{2} \quad (2.4)$$

и число независимых уравнений среди уравнений вида (2.1), записанных для всех подмногообразий $\mathcal{M}_{M_1}, \ldots, \mathcal{M}_{M_p}$, равно $\binom{N}{2}$, то $K_{ij} = 0$, т. е. пространство GR_N сводится к риманову пространству R_N в окрестности рассматриваемой точки x_0.

Доказательство. Уравнения (2.2) дают $\binom{M_1}{2} + \cdots + \binom{M_p}{2}$ уравнений вида (2.1). Если выполняется условие (2.3), то из компонент K_{ij} по меньшей мере $\binom{N}{2} - [\binom{M_1}{2} + \cdots + \binom{M_p}{2}]$ можно выбрать произвольным образом и, значит, можно выбрать ненулевыми. При этом подмногообразия $\mathcal{M}_{M_1}, \ldots, \mathcal{M}_{M_p}$ оказываются римановыми подпространствами $R_{M_1}, \ldots, R_{M_p}$ в обобщенном римановом пространстве GR_N.

Если выполняется условие (2.4) и число независимых уравнений вида (2.1) равно $\binom{N}{2}$, то единственным решением этой системы уравнений будет $K_{ij} = 0$, при этом пространство GR_N оказывается римановым пространством.

Пример 1. Рассмотрим дифференцируемое многообразие $\mathcal{M}_5$ с локальными координатами $x^1, \dots, x^5$ и подмногообразие $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_5$, заданное уравнениями

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = u^3, \quad x^4 = x^4(u^1, u^2, u^3), \quad x^5 = x^5(u^1, u^2, u^3),$$

где x^4, x^5 — данные дифференцируемые функции. Пусть симметричная часть $H_{ij}(x^1, \dots, x^5)$ основного тензора $\mathcal{M}_5$ также задана.

В этом случае $(\alpha, \beta) \in \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, $(i,j) \in \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5);\ (2,3),(2,4),(2,5);\ (3,4),(3,5),(4,5)\}$, и из (2.1) получим

$$\begin{aligned}
K_{12} &= -K_{14}x^4_2 - K_{15}x^5_2 + K_{24}x^4_1 + K_{25}x^5_1 - K_{45}(x^4_1 x^5_2 - x^5_1 x^4_2),\\
K_{13} &= -K_{14}x^4_3 - K_{15}x^5_3 + K_{34}x^4_1 + K_{35}x^5_1 - K_{45}(x^4_1 x^5_3 - x^5_1 x^4_3),\\
K_{23} &= -K_{24}x^4_3 - K_{25}x^5_3 + K_{34}x^4_2 + K_{35}x^5_2 - K_{45}(x^4_2 x^5_3 - x^5_2 x^4_3).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Если компоненты K_{ij} в правых частях уравнений (2.5) выбраны таким образом, что хотя бы одна из них не равна нулю, то из уравнений (2.5) можно найти K_{12}, K_{13}, K_{23} и $G_{ij} = H_{ij} + K_{ij}$. При этом $G_{ij} \neq G_{ji}$, и $\mathcal{M}_3$ с тензором $g_{\alpha\beta}$, определенным уравнениями (1.2), оказывается римановым подпространством $R_3 \subset GR_5$.

Пример 2. Пусть помимо подмногообразия $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_5$ из примера 1 задано еще одно подмногообразие $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_5$ ($\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 \neq \emptyset$) уравнениями

$$x^1 = \widetilde{u}^1, \ \ x^2 = \widetilde{u}^2, \ \ x^3 = x^3(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2), \ \ x^4 = x^4(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2), \ \ x^5 = x^5(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2).$$

Для $\mathcal{M}_2$ имеем $(\alpha, \beta) = (1,2)$, и из (2.1) получаем уравнение

$$\begin{aligned}
K_{12} + K_{13}x^3_{\tilde 2} + K_{14}x^4_{\tilde 2} + K_{15}x^5_{\tilde 2} - K_{23}x^3_{\tilde 1} - K_{24}x^4_{\tilde 1} - K_{25}x^5_{\tilde 1} + {}&\\
+ K_{34}(x^3_{\tilde 1}x^4_{\tilde 2} - x^4_{\tilde 1}x^3_{\tilde 2}) + K_{35}(x^3_{\tilde 1}x^5_{\tilde 2} - x^5_{\tilde 1}x^3_{\tilde 2}) + K_{45}(x^4_{\tilde 1}x^5_{\tilde 2} - x^5_{\tilde 1}x^4_{\tilde 2}) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $x^i_{\tilde\alpha} = \partial x^i / \partial \widetilde{u}^\alpha$. Из уравнений (2.5) и (2.6) можно определить самое большее четыре неизвестных компоненты K_{ij}, в то время как остальные компоненты могут быть выбраны произвольно. В результате получим два римановых подпространства $R_2, R_3 \subset GR_5$.

3. Нахождение риманова подпространства R_M в GR_N

Теорема 3. *Пусть GR_N — обобщенное риманово пространство с локальными координатами x^i и кососимметричной частью K_{ij} основного тензора. Подпространство в GR_N, заданное уравнениями*

$$x^i = u^i, \quad i = 1, \dots, M; \quad x^i = x^i(u^1, \dots, u^M), \quad i = M+1, \dots, N, \tag{3.1}$$

является римановым подпространством $R_M \subset GR_N$ тогда и только тогда, когда функции x^i удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
&A_{\beta c}x^c_\alpha - A_{\alpha c}x^c_\beta = B^c_{\alpha\beta} \quad (\textit{по индексу } c \textit{ нет суммирования}),\\
&(\alpha, \beta) = (1,2),(1,3),\dots,(1,M),(2,3),\dots,(2,M),\dots,\\
&\qquad\qquad (M-2,M-1),(M-2,M),(M-1,M); \quad c \in \{M+1,\dots,N\},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&A_{\alpha c}B^c_{\alpha+1\beta} - A_{\alpha+1c}B^c_{\alpha\beta} + A_{\beta c}B^c_{\alpha\alpha+1} = 0 \quad (\textit{по индексу } c \textit{ нет суммирования}),\\
&(\alpha, \beta) = (1,3),\dots,(1,M),(2,4),\dots,(2,M),\dots,\\
&\qquad\qquad (M-3,M-1),(M-3,M),(M-2,M); \quad c \in M+1,\dots,N,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$A_{\alpha c} = K_{\alpha c} + \sum_{\substack{M+1\le a\le N\\ a\ne c}} K_{ac}x^a_\alpha \quad (\alpha = 1,\dots,M), \tag{3.4}$$

$$B^c_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} + \sum_{\substack{M+1\le a\le N\\ a\ne c}} (K_{\alpha a}x^a_\beta - K_{\beta a}x^a_\alpha) + \sum_{\substack{M+1\le a\le N-1\\ a\ne c}} \ \sum_{\substack{a+1\le b\le N\\ b\ne c}} K_{ab}(x^a_\alpha x^b_\beta - x^b_\alpha x^a_\beta), \tag{3.5}$$
$$(\alpha,\beta) = (1,2),(1,3),\dots,(1,M),(2,3),\dots,(2,M),\dots,(M-1,M),$$

в уравнениях (3.2) c — *некоторое фиксированное значение из* $\{M+1,\dots,N\}$, *а в* (3.3) c *принимает все значения из указанного множества.*

Доказательство. а) Докажем, что условия (3.2), (3.3) являются необходимыми. Если $R_M \subset GR_N$ задано уравнениями (3.1), то $x^i_\alpha = \partial x^i/\partial u^\alpha = \delta^i_\alpha$ при $i = 1,\dots,M$, и из (2.1) имеем

$$\begin{aligned}K_{\alpha\beta} &+ K_{\alpha,M+1}x^{M+1}_\beta + \dots + K_{\alpha N}x^N_\beta - K_{\beta,M+1}x^{M+1}_\alpha - \dots - K_{\beta N}x^N_\alpha + \\ &+ K_{M+1,M+2}(x^{M+1}_\alpha x^{M+2}_\beta - x^{M+2}_\alpha x^{M+1}_\beta) + \dots + K_{M+1,N}(x^{M+1}_\alpha x^N_\beta - x^N_\alpha x^{M+1}_\beta) + \dots + \\ &+ K_{N-1,N}(x^{N-1}_\alpha x^N_\beta - x^N_\alpha x^{N-1}_\beta) = 0.\end{aligned}$$

Выделяя в этом уравнении слагаемые, содержащие x^c_α, x^c_β, где $c \in \{M+1,\dots,N\}$ — фиксированное значение, получаем

$$\begin{aligned}&(K_{\beta c} + \sum_{\substack{M+1\le a\le N\\ a\ne c}} K_{ac}x^a_\beta)x^c_\alpha - \Big(K_{\alpha c} + \sum_{\substack{M+1\le a\le N\\ a\ne c}} K_{ac}x^a_\alpha\Big)x^c_\beta = \\ &\quad = K_{\alpha\beta} + \sum_{\substack{M+1\le a\le N\\ a\ne c}} (K_{\alpha a}x^a_\beta - K_{\beta a}x^a_\alpha) + \sum_{\substack{M+1\le a\le N-1\\ a\ne c}} \ \sum_{\substack{a+1\le b\le N\\ b\ne c}} K_{ab}(x^a_\alpha x^b_\beta - x^b_\alpha x^a_\beta), \\ &\qquad c \in \{M+1,\dots,N\} \ \text{(по индексу } c \text{ нет суммирования)},\end{aligned} \tag{3.6}$$

что можно переписать в виде (3.2), где $A_{\alpha c}$, $B^c_{\alpha\beta}$ определяются формулами (3.4) и (3.5). Отметим, что в (3.6) при фиксированном c имеем $\binom{M}{2}$ уравнений:

$$\begin{aligned}A_{\alpha c}x^c_1 - A_{1c}x^c_\alpha &= B^c_{1\alpha} \quad (\alpha = 2,3,\dots,M),\\ A_{\alpha c}x^c_2 - A_{2c}x^c_\alpha &= B^c_{2\alpha} \quad (\alpha = 3,4,\dots,M),\\ &\dots\\ A_{\alpha c}x^c_{M-2} - A_{M-2c}x^c_\alpha &= B^c_{M-2\alpha} \quad (\alpha = M-1,M),\\ A_{Mc}x^c_{M-1} - A_{M-1c}x^c_M &= B^c_{M-1M}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассматривая (3.7) как систему линейных уравнений по отношению к $x^c_1,\dots,x^c_M$, приведем расширенную матрицу P этой системы к эквивалентной матрице $P \sim \binom{P_1}{R}$, где

$$P_1 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x^c_1 & x^c_2 & x^c_3 & x^c_4 & & x^c_{M-2} & x^c_{M-1} & x^c_M \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} A_{2c} & -A_{1c} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & B^c_{12}\\ 0 & A_{3c} & -A_{2c} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & B^c_{23}\\ 0 & 0 & A_{4c} & -A_{3c} & \cdots & 0 & 0 & 0 & B^c_{34}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{M,c} & -A_{M-1,c} & B^c_{M-1,M}\end{array}\right)\end{array}$$

и R — матрица, у которой первые M столбцов являются нулевыми, а последний столбец состоит из элементов $H^c_{13}, H^c_{14}, \dots, H^c_{1M}; H^c_{24}, H^c_{25}, \dots, H^c_{2M}; \dots; H^c_{M-3,M-1}, H^c_{M-3,M}; H^c_{M-2,M}$. Коэффициенты $A_{\alpha c}$, $B^c_{\alpha\beta}$ определяются формулами (3.4) и (3.5), а

$$\begin{aligned}&H^c_{\alpha\beta} = (B^c_{\alpha\beta}A_{\alpha+1c} - B^c_{\alpha\alpha+1}A_{\beta c} - B^c_{\alpha+1\beta}A_{\alpha c})/A_{\alpha+1c},\\ &(\alpha,\beta) = (1,3),(1,4),\dots,(1,M),\quad (2,4),\dots,(2,M),\dots,\\ &\qquad\qquad (M-3,M-1),(M-3,M),(M-2,M);\quad c = M+1,\dots,N.\end{aligned}$$

Если Q — матрица системы (3.7), то $\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} Q$ тогда и только тогда, когда $H^c_{\alpha\beta} = 0$, т. е. тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.3).

b) Предположим, что условия (3.2), (3.3) выполнены, т. е. функции (3.1) удовлетворяют уравнениям (3.7), которые совместны ввиду (3.3). Поскольку уравнения (3.7) — уравнения (1.3) для функций (3.1), а (1.3) — необходимое и достаточное условие для римановости подмногообразия, заданного уравнениями (3.1), то теорема доказана.

Пример 3. Пусть кососимметричная часть K_{ij} основного тензора пространства GR_4 имеет вид

$$K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0, \quad K_{i4} = x^i, \quad i = 1,2,3. \tag{3.8}$$

Рассмотрим подмногообразие $\mathcal{M}_3$ в GR_4, определенное уравнениями

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = u^3, \quad x^4 = x^4(u^1,u^2,u^3). \tag{3.9}$$

Выясним, может ли такое подмногообразие являться римановым подпространством $R_3 \subset GR_4$. Нужно найти такую функцию x^4, чтобы выполнялись условия (3.2) и (3.3). В рассматриваемом случае $M = 3$, $N = 4$, $c = 4$. Из (3.2) следует (индекс c в $B^c_{\alpha\beta}$ опускаем)

$$A_{24}x^4_1 - A_{14}x^4_2 = B_{12}, \quad A_{34}x^4_1 - A_{14}x^4_3 = B_{13}, \quad A_{34}x^4_2 - A_{24}x^4_3 = B_{23}, \tag{3.10}$$

а из (3.3) следует

$$A_{14}B_{23} - A_{24}B_{13} + A_{34}B_{12} = 0. \tag{3.11}$$

Равенства (3.4) и (3.5) в рассматриваемом случае принимают вид $A_{\alpha c} = K_{\alpha c} = K_{\alpha 4}$, $B_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}$. Из (3.8) и (3.9) следует, что при этом уравнения (3.10) и (3.11) принимают соответственно вид

$$u^2x^4_1 - u^1x^4_2 = 0, \quad u^3x^4_1 - u^1x^4_3 = 0, \quad u^3x^4_2 - u^2x^4_3 = 0, \tag{3.10$'$}$$

$K_{14}K_{23} - K_{24}K_{13} + K_{34}K_{12} \equiv 0$, т. е. условия (3.3) в этом случае выполняются тождественно.

Общее решение системы уравнений (3.10$'$) имеет вид $x^4 = \psi((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2)$, где $\psi(u)$ — некоторая дифференцируемая функция, соответствующие уравнения (3.9) задают римановы подпространства $R_3 \subset GR_4$.

Литература

1. Eisenhart L.P. *Generalized Riemann spaces* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1951. – V. 37. – P. 311–315.
2. Prvanović M. *Équations de Gaus d'un sous-espace plongé dans l'espace Riemannien généralisé* // Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. sci. – 1955. – V. 37. – P. 615–621.

Университет г. Ниш (Сербия)

Поступила
04.09.2006