ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.972

А.Г. ЧЕНЦОВ

К ВОПРОСУ О КОМПАКТИФИКАЦИИ ПУЧКА ТРАЕКТОРИЙ ОДНОЙ АБСТРАКТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается вопрос о компактификации пучка траекторий линейной управляемой системы с импульсными ограничениями и разрывностью в коэффициентах при управлении. Обсуждается задача о построении замыкания пучка траекторий в тех случаях, когда требуемая компактификация невозможна. В основе предлагаемых представлений лежит построение обобщенной управляемой системы с применением конечно-аддитивных управлений-мер.

1. Введение

Настоящее исследование связано с вопросом о замыкании в топологии поточечной сходимости пучка траекторий линейной управляемой системы с возможным нелинейным безинерционным преобразованием в условиях, когда 1) в коэффициентах при управлении реализуются разрывные зависимости и 2) имеются, возможно, импульсные ограничения того или иного типа. Стало быть, по условиям задачи в системе возможен эффект, имеющий смысл произведения разрывной функции на обобщенную. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)b(t) \tag{1.1}$$

в n-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$, для которой промежуток времени ее функционирования $I_0 = [t_0, \vartheta_0]$ $(t_0 < \vartheta_0)$ конечен. Задано также начальное условие $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Предполагаем, что $A(\cdot) = (A(t),\ t \in I_0)$ есть $n \times n$-матрицант на I_0, все компоненты которого непрерывны. В качестве $b = b(\cdot)$ используем n-вектор-функцию на $I = [t_0, \vartheta_0[$ с компонентами $b_1, \dots, b_n$; последние предполагаем ограниченными борелевскими функциями на I. В качестве f также будем допускать использование (в (1.1)) ограниченных вещественнозначных борелевских функций на I; множество всех таких функций обозначим сейчас через F. Через $\Phi = \Phi(\cdot,\cdot)$ обозначаем фундаментальную матрицу решений однородной системы $\dot{x} = A(t)x$. Для $f \in F$ определяется (единственное) решение φ_f системы (1.1), являющееся непрерывной n-вектор-функцией на I_0 и характеризуемое формулой Коши [1] (см. также [2], с. 39):

$$\varphi_f(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{[t_0, t[} f(\xi)\Phi(t,\xi)b(\xi)m(d\xi) \quad \forall t \in I_0. \tag{1.2}$$

Здесь m — мера Лебега–Бореля на I, т.е. след меры Лебега на σ-алгебру борелевских подмножеств (п/м) I. Предполагаем, что задано непрерывное преобразование $\zeta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, где k — натуральное число, и рассматриваем k-вектор-функцию

$$t \longmapsto \zeta(\varphi_f(t)) : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k \tag{1.3}$$

как траекторию системы, включающей линейный "блок" (см. (1.1), (1.2)) и нелинейный безинерционный преобразователь ζ. Итак, управляющей функции $f \in F$ сопоставляем отображение (1.3). Заметим, что упомянутое комбинирование линейного "блока" и нелинейного безинерционного преобразователя широко используется в современной радиотехнике ([3], гл. 11).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 06-01-00414, 04-01-96093.

Выбор $f \in F$ может быть стеснен весьма традиционным импульсным ограничением

$$\int_I |f(t)| m(dt) \leq c, \tag{1.4}$$

где $c \in [0, \infty[$ — заданное число, определяющее имеющийся энергоресурс. Управление $f \in F$, удовлетворяющее (1.4), назовем допустимым. Множество траекторий (1.3), соответствующее всевозможным допустимым в смысле (1.4) управлениям, назовем пучком траекторий системы; данный пучок не обладает зачастую свойством замкнутости в естественной топологии поточечной сходимости в пространстве $\{I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k\}$ всех k-вектор-функций на I_0. Между тем построение замыкания данного пучка и выяснение вопроса об его компактности является важным при решении экстремальных задач и разного рода задач о достижимости в условиях релаксации траекторных ограничений. Построение замыкания естественно связывать с введением тех или иных обобщенных управлений. В этой связи отметим прежде всего предложенный Н.Н. Красовским подход ([2], §§ 6, 14), с которым связаны многие последующие исследования в области импульсного управления (см., в частности, [4]–[6]).

Заметим, что даже в случае, когда ζ — тождественное отображение (т.е. $k = n$, $\zeta(x) \equiv x$), возникают трудности, связанные с тем, что в (1.2) реализуется эффект, имеющий смысл произведения разрывной функции на обобщенную. Для преодоления этих трудностей в [7]–[9] была предложена конструкция расширения пространства управлений в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер, слабо абсолютно непрерывных [10] относительно m, либо подходящего сужения m (имеется в виду возможность, подробно обсуждаемая во второй части [9], более "экономного" выбора измеримой структуры I, что существенно в связи с применением к.-а. мер; см. в этой связи [11], гл. III). Возвращаясь к (1.2), заметим, что "объектом расширения" является по сути дела второе слагаемое, т.е. интегральное преобразование f. Это наводит на мысль о том, что конструкцию расширения, изложенную фактически в [9] (см. вторую часть статьи), можно применять в более общих случаях, которые уже могут и не быть связанными с какой-либо системой (1.1). Мы учитываем далее возможность таких обобщений, ограничиваясь, однако, случаем скалярного управления (в связи с применением векторных к.-а. мер в конструкциях расширений см., напр., [12]–[14]).

2. Общие обозначения и определения

В дальнейшем кванторы и пропозициональные связки используются только для замены словесных выражений в интересах сокращения соответствующих формулировок; $\triangleq$ обозначает далее равенство по определению. Множество, все элементы которого сами являются множествами, называем семейством. Мы принимаем аксиому выбора.

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем ([15], с. 77) множество всех отображений из A в B; если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ множества C при отображении f ([15], с. 81). Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ (натуральный ряд). В некоторых последующих конструкциях потребуется использовать сходимость по Мору–Смиту [16], [17]; здесь в обозначениях следуем ([9], сс. 60, 61).

Если (X, τ) — топологическое пространство (ТП), то 1) для $M \in \mathcal{P}(X)$ через $\mathrm{cl}(M, \tau)$ обозначаем замыкание множества M в (X, τ), а через $\tau|_M$ обозначаем топологию множества M, индуцированную [16], [17] из (X, τ); 2) через $\mathcal{F}_\tau$ (через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$) обозначаем семейство всех замкнутых (компактных [17], с. 196) в (X, τ) п/м X.

Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — два ТП, то через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1, τ_2)-непрерывных отображений из Y^X; при этих же условиях

$$C_{\mathrm{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \mid f^1(F) \in \mathcal{F}_{\tau_2} \ \ \forall F \in \mathcal{F}_{\tau_1}\} = \\ = \{f \in Y^X \mid f^1(\mathrm{cl}(A, \tau_1)) = \mathrm{cl}(f^1(A), \tau_2) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(X)\} \quad (2.1)$$

есть множество всех (τ_1, τ_2) — замкнутых [16], [17] отображений из Y^X. Если (X, τ_1) — компактное, а (Y, τ_2) — хаусдорфово ТП, то

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) = C_{\mathrm{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2); \quad (2.2)$$

в связи с (2.1), (2.2) и следствиями этих соотношений см. [16], [17]. Далее будем полагать, что элементы $\mathcal{N}$ (натуральные числа) не являются множествами, что исключает двусмысленность в некоторых традиционных обозначениях. Так, например, если S — множество и $r \in \mathcal{N}$, то вместо $S^{\overline{1,r}}$, где (здесь и ниже) $\overline{1,r} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid i \leq r\}$, используем всякий раз символ S^r; в частности, при $S = \mathbb{R}$ получаем традиционное обозначение для r-мерного арифметического пространства.

Если X — непустое множество, а (Y, τ) есть ТП, то через $\otimes^X(\tau)$ обозначаем естественную топологию Y^X, соответствующую тихоновскому произведению [16], [17] экземпляров (Y, τ) с индексным множеством X. В этой связи отметим свойство: если P — непустое множество, (T, τ) есть ТП, $T \neq \emptyset$, $(D, \preceq, f)$ — направленность в множестве T^P и $g \in T^P$, то ([17], с. 141):

$$((D, \preceq, f) \xrightarrow{\otimes^P(\tau)} g) \iff ((D, \preceq, (f(d)(x))_{d \in D}) \xrightarrow{\tau} g(x) \ \ \forall x \in P). \quad (2.3)$$

Всюду в дальнейшем линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных функций понимаются как поточечные.

Фиксируем непустое множество E и полуалгебру (см. [8], гл. 3; [12], гл. 3; [18], гл. 1) $\mathcal{L}$ п/м множества E; итак, $(E, \mathcal{L})$ — измеримое пространство с полуалгеброй множеств. Конус $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ всех неотрицательных вещественнозначных к.-а. мер на $\mathcal{L}$ порождает линейное пространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ всех вещественнозначных к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию. Если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то $v_\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ есть вариация μ, рассматриваемая как функция множеств. Сильная норма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяется как

$$\mu \longmapsto v_\mu(E) : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow [0, \infty[.$$

В пространстве $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных вещественнозначных функций на E выделяем (линейное) многообразие $B_0(E, \mathcal{L})$, определяемое как линейная оболочка множества всех индикаторов ([18], с. 56) множеств из $\mathcal{L}$ (см. [9], с. 63). Оснащая $\mathbb{B}(E)$ традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$ ([11], с. 261), получаем в виде $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$ банахово пространство. Замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в топологии упомянутой sup-нормы обозначаем через $B(E, \mathcal{L})$; $B(E, \mathcal{L})$ с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$, само является банаховым пространством (аналог $B(S, \Sigma)$ [11], гл. IV). Если $\mathcal{L}$ — σ-алгебра п/м E, то $B(E, \mathcal{L})$ есть множество всех ограниченных $\mathcal{L}$-измеримых вещественнозначных функций на E.

Известно [8], [11], [12], что пространство $B^*(E, \mathcal{L})$, топологически сопряженное с $B(E, \mathcal{L})$, и $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (в сильной норме) изометрически изоморфны. Соответствующий изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(E, \mathcal{L})$ определяется простейшей схемой интегрирования ([8], гл. 3), используемой ниже без дополнительных пояснений (см. также [19]), в виде оператора

$$\mu \longmapsto \left(\int_E f \, d\mu \right)_{f \in B(E, \mathcal{L})} : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(E, \mathcal{L}).$$

С учетом вышеупомянутой изометрической изоморфности $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $B^*(E, \mathcal{L})$ оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ естественной $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ ([8], с. 70) (в терминологии ([11], гл. V) $\tau_*(\mathcal{L})$ есть $B(E, \mathcal{L})$-топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$), получая локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})). \quad (2.4)$$

Условия компактности в ТП (2.4) определены известной теоремой Алаоглу ([11], гл. V). Через $\mathbf{B}_*(\mathcal{L})$ обозначаем семейство всех множеств $H \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ таких, что

$$\exists c \in \ [0, \infty[\colon v_\mu(E) \leq c \ \ \forall \mu \in H.$$

Итак, введено семейство всех сильно ограниченных п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; при этом

$$(\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] = \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L})} \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}). \tag{2.5}$$

В (2.5) дана конкретизация теоремы Алаоглу ([11], гл. V); см. ([12], с. 42).

Всюду в дальнейшем фиксируем $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Тогда $(E, \mathcal{L}, \eta)$ — к.-а. аналог пространства с мерой. Полагаем

$$\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ ((\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0))\}, \tag{2.6}$$

получая замкнутое в ТП (2.4) линейное подпространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (см. [8], гл. 4; [12], § 3.7; [20], § 4.9). Элементы (2.6) называют к.-а. мерами, слабо абсолютно непрерывными относительно η (см. [10]). Если $f \in B(E, \mathcal{L})$, то $f * \eta \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ есть def неопределенный η-интеграл f ([12], с. 44), т. е. η-интеграл f как функция множеств ([20], § 4.4). Будем использовать теоремы о плотности множеств, элементами которых являются неопределенные η-интегралы; эти теоремы приведены в [8], [12], [20]. В данной работе достаточно рассматривать свойство $*$-слабой плотности.

Если $f \in \mathbb{R}^E$, то через $|f|$ обозначаем, как обычно, функцию из E в $[0, \infty[$, имеющую значениями числа $|f(x)|$; $x \in E$. Через $B_0^+(E, \mathcal{L})$ и $B^+(E, \mathcal{L})$ обозначаем множества всех неотрицательных функций из $B_0(E, \mathcal{L})$ и $B(E, \mathcal{L})$ соответственно. Ясно, что для $f \in B_0(E, \mathcal{L})$ (для $f \in B(E, \mathcal{L})$) имеем свойство $|f| \in B_0^+(E, \mathcal{L})$ (свойство $|f| \in B^+(E, \mathcal{L})$). Всюду далее

$$\mathfrak{F}_\eta \triangleq \left\{ H \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L})) \,\Big|\, \exists c \in [0, \infty[\colon \ \int_E |f| \, d\eta \leq c \ \ \forall f \in H \right\}; \tag{2.7}$$

множества из семейства (2.7) условимся называть интегрально ограниченными.

Вполне очевидно следующее

Предложение 2.1. *Если* $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$, *то* $\mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$, *причем*

$$\mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \subset \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$, а число $c \in [0, \infty[$ таково (см. (2.7)), что

$$\int_E |f| \, d\eta \leq c \ \ \forall f \in \mathbb{F}. \tag{2.9}$$

Введем $\mathbb{S} \triangleq \{f * \eta : f \in \mathbb{F}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$. Тогда в силу (2.9) для $f \in \mathbb{F}$ и $\mu = f * \eta \in \mathbb{S}$ имеем оценку

$$v_\mu(E) = \int_E |f| \, d\eta \leq c.$$

Это означает, что $v_\mu(E) \leq c \quad \forall \mu \in \mathbb{S}$. Следовательно, $\mathbb{S} \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$. Тогда замыкание $\mathbb{S}$ в ТП (2.4) является подмножеством шара в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ радиуса c в сильной норме ([20], с. 164). Поэтому множество $\mathrm{cl}(\mathbb{S}, \tau_*(\mathcal{L}))$ сильно ограничено и $*$-слабо замкнуто, а потому (см. (2.5), [20], с. 164) компактно в ТП (2.4). Поскольку $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ — замкнутое в ТП (2.4) множество и $\mathbb{S} \subset \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, то выполняется и (2.8). $\square$

В следующем разделе рассмотрим ряд конкретных вариантов предложения 2.1 (см., кроме того, [8], [12], [20]). Сейчас отметим только одно весьма общее

Следствие 2.1. Если $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$, (X, τ) — ТП, $M \triangleq \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L}))$ и $\mathbf{f} \in C_{\mathrm{cl}}(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)$, то

$$\mathrm{cl}(\{\mathbf{f}(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}, \tau) = \mathbf{f}^1(M) \in (\tau - \mathrm{comp})[X].$$

Доказательство. В силу (2.1) имеем для $A \in \mathcal{P}(M)$

$$\mathbf{f}^1(\mathrm{cl}(A, \tau_*(\mathcal{L})|_M)) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(A), \tau) \tag{2.10}$$

и, вместе с тем, справедливо

$$\mathrm{cl}(A, \tau_*(\mathcal{L})|_M) = \mathrm{cl}(A, \tau_*(\mathcal{L})) \cap M = \mathrm{cl}(A, \tau_*(\mathcal{L})), \tag{2.11}$$

поскольку $M \in \mathcal{F}_{\tau_*(\mathcal{L}))}$ и $A \subset M$. Из (2.10) и (2.11) имеем, в частности, при $A = \{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}$ равенство

$$\mathbf{f}^1(\mathrm{cl}(A, \tau_*(\mathcal{L}))) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(A), \tau),$$

что (при данной конкретизации множества A) означает

$$\mathrm{cl}(\{\mathbf{f}(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}, \tau) = \mathbf{f}^1(\mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L}))) = \mathbf{f}^1(M), \tag{2.12}$$

где учтено равенство $\mathbf{f}^1(A) = \{\mathbf{f}(\mu) : \mu \in A\} = \{\mathbf{f}(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}$. При этом в силу предложения 2.1 $M \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$, т. е.

$$(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M)$$

есть компактное ТП, и с учетом (2.1), а также свойства сохранения компактности (в сторону образа) непрерывными отображениями, имеем, что множество (2.12) компактно в (X, τ). $\square$

3. Структура пространства обобщенных элементов

В данном разделе приведем ряд конкретизаций предложения 2.1. Эти конкретизации ориентированы на использование (в следствии 2.1) различных вариантов множества M. Речь идет о представлении $*$-слабого замыкания для целого ряда множеств из $\mathfrak{F}_\eta$, построение которых связано с учетом импульсных ограничений и их аналогов. Будут также рассмотрены некоторые случаи неограниченных в интегральном смысле функциональных множеств.

Заметим, что множество

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ ((\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0))\}$$

является конусом, порождающим (линейное) пространство $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. При этом (см. [8], [12]) $\forall H \in \mathcal{P}'(B^+(E, \mathcal{L}))$

$$(B_0^+(E, \mathcal{L}) \subset H) \Longrightarrow ((\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in H\}, \tau_*(\mathcal{L}))). \tag{3.1}$$

Аналог (3.1) для случая знакопеременных функций на E имеет вид (см. [8], [12]): $\forall H \in \mathcal{P}(B(E, \mathcal{L}))$

$$(B_0(E, \mathcal{L}) \subset H) \Longrightarrow (\mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in H\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]). \tag{3.2}$$

Свойства $*$-слабой плотности (3.1), (3.2) не относятся к компактификациям непосредственно, поскольку касаются вопросов аппроксимативной реализации неограниченных в сильном смысле п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. В ([12], с. 57–60) фактически установлено свойство: если $r \in \mathcal{N}$, $(L_i)_{i \in \overline{1,r}} \in \mathcal{L}^r$, $(c_i)_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbb{R}^r$, причем $c_j \geq 0 \quad \forall j \in \overline{1,r}$, то $\forall H \in \mathcal{P}(B(E, \mathcal{L}))$

$$(B_0(E, \mathcal{L}) \subset H) \Longrightarrow \Big(\{\nu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] |\, v_\nu(L_k) \leq c_k \ \ \forall k \in \overline{1,r}\} =$$
$$= \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in H, \ \int_{L_k} |f|\, d\eta \leq c_k \ \ \forall k \in \overline{1,r}\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right)\Big). \tag{3.3}$$

В (3.1)–(3.3) подчеркивается, что $B_0(E, \mathcal{L})$ достаточно для целей аппроксимативной реализации к.-а. мер, слабо абсолютно непрерывных относительно η. В этой связи отметим и конкретный способ такой реализации в ([12], сс. 244, 245), оперирующий направленностями в $B_0(E,\mathcal{L})$. Напомним теперь несколько версий погружения в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ множеств из $\mathfrak{F}_\eta$; эти версии будут связываться с компактификациями. Сначала рассмотрим случай традиционных импульсных ограничений ([8], с. 87): если $b \in [0,\infty[$, то

$$\{\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \mid v_\mu(E) \le b\} = \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B_0(E,\mathcal{L}), \int_E |f|\,d\eta \le b\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) =$$

$$= \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B(E,\mathcal{L}), \int_E |f|\,d\eta \le b\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \quad (3.4)$$

Напомним также свойство ([8], с. 85): если $c \in [0,\infty[$, то

$$\{\nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \mid \nu(E) \le c\} = \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}), \int_E f\,d\eta \le c\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) =$$

$$= \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}), \int_E f\,d\eta \le c\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})], \quad (3.5)$$

$$\{\nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \mid \nu(E) = c\} = \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}), \int_E f\,d\eta = c\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) =$$

$$= \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}), \int_E f\,d\eta = c\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \quad (3.6)$$

Отметим, наконец, представление, связанное с (3.3): если $r \in \mathcal{N}$, кортеж $(L_i)_{i\in\overline{1,r}} \in \mathcal{L}^r$ есть покрытие E, т. е.

$$E = \bigcup_{i=1}^{r} L_i, \quad (3.7)$$

а $(c_i)_{i\in\overline{1,r}} \in \mathbb{R}^r$ — такой вектор, что $c_j \ge 0 \quad \forall j \in \overline{1,r}$, то

$$\{\nu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \mid v_\nu(L_k) \le c_k \;\; \forall k \in \overline{1,r}\} =$$

$$= \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B_0(E,\mathcal{L}), \int_{L_k} |f|\,d\eta \le c_k \;\; \forall k \in \overline{1,r}\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) =$$

$$= \mathrm{cl}\left(\left\{f * \eta : f \in B(E,\mathcal{L}), \int_{L_k} |f|\,d\eta \le c_k \;\; \forall k \in \overline{1,r}\right\}, \tau_*(\mathcal{L})\right) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]. \quad (3.8)$$

Из сравнения (3.3), (3.8) видна роль свойства (3.7) в вопросах компактифицируемости множества управлений. Отметим теперь, что в (3.4)–(3.6) и (3.8) реализуются конкретные версии предложения 2.1 для следующих случаев $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$ соответственно:

1) $\left\{f \in B_0(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E |f|\,d\eta \le b\right\}$, $\left\{f \in B(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E |f|\,d\eta \le b\right\}$;

2) $\left\{f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E f\,d\eta \le c\right\}$, $\left\{f \in B^+(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E f\,d\eta \le c\right\}$;

3) $\left\{f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E f\,d\eta = c\right\}$, $\left\{f \in B^+(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_E f\,d\eta = c\right\}$;

4) $\left\{f \in B_0(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_{L_k} |f|\,d\eta \le c_k \;\; \forall k \in \overline{1,r}\right\}$, $\left\{f \in B(E,\mathcal{L}) \,\Big|\, \int_{L_k} |f|\,d\eta \le c_k \;\; \forall k \in \overline{1,r}\right\}$.

Разумеется, в последнем случае предполагается выполненным (3.7). Следовательно, множество-замыкание в предложении 2.1 во многих случаях допускает эффективное описание, что оправдывает его последующее использование в следствии 2.1. Заметим, что в этом следствии для случаев 1)–4) и хаусдорфова ТП (X,τ) достаточно полагать, что $\mathbf{f} \in C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)$.

4. Обобщенные траектории и принцип компактификации

В этом разделе фиксируем ТП (X, τ). Отметим один простой аналог следствия 2.1

Предложение 4.1. *Если* $\mathbb{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$, $M \triangleq \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L}))$ *и* $\mathbf{f} \in C_{\mathrm{cl}}(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)$, *то*

$$\mathrm{cl}(\{\mathbf{f}(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}, \tau) = \mathbf{f}^1(M) \in \mathcal{F}_\tau.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}$, M и $\mathbf{f}$ удовлетворяют условиям предложения. Тогда в силу (2.1) (см. второе равенство в (2.1))

$$\mathbf{f}^1(M) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}), \tau) = \mathrm{cl}(\{\mathbf{f}(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}, \tau) \in \mathcal{F}_\tau. \quad \square$$

В этом разделе фиксируем непустое множество Γ и рассматриваем отображения из множеств

$$C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)^\Gamma = \{\Gamma \longrightarrow C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)\},$$

где $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$. В частности, индексы $\gamma \in \Gamma$ могут иметь смысл моментов времени. Через $\otimes^\Gamma(\tau)$ обозначаем естественную топологию множества X^Γ, соответствующую тихоновскому произведению [16], [17] экземпляров ТП (X, τ) с индексным множеством Γ; можно рассматривать

$$(X^\Gamma, \otimes^\Gamma(\tau)) \tag{4.1}$$

как тихоновскую степень ТП (X, τ), отвечающую использованию индексного множества Γ. Если $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$, то полагаем

$$\mathbf{C}_M \triangleq C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)^\Gamma, \tag{4.2}$$

получая множество всех операторов из Γ в $C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)$; при $h \in \mathbf{C}_M$ и $\mu \in M$ имеем

$$h(\cdot)(\mu) \triangleq (h(\gamma)(\mu))_{\gamma \in \Gamma} \in X^\Gamma. \tag{4.3}$$

В терминах (4.2), (4.3) введем определение, имеющее смысл пучка обобщенных "траекторий": если $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$ и $h \in \mathbf{C}_M$, то полагаем

$$\mathbf{S}[M; h] \triangleq \{h(\cdot)(\mu) : \mu \in M\}. \tag{4.4}$$

В условиях, определяющих (4.4), возможна ситуация, когда $M = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L}))$, где $\mathbb{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$; тогда для $f \in \mathbb{F}$ определены функции $h(\cdot)(f * \eta) \in X^\Gamma$, образующие пучок обычных "траекторий".

Предложение 4.2. *Пусть* $\mathbb{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$, $M = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L}))$ *и* $h \in \mathbf{C}_M$. *Тогда*

$$\{h(\cdot)(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\} \subset \mathbf{S}[M; h] \tag{4.5}$$

и, кроме того, имеет место

$$(\mathbf{S}[M; h] \in \mathcal{F}_{\otimes^\Gamma(\tau)}) \Longleftrightarrow (\mathbf{S}[M; h] = \mathrm{cl}(\{h(\cdot)(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}, \otimes^\Gamma(\tau))). \tag{4.6}$$

Доказательство. Вложение (4.5) — очевидное следствие (4.4) и свойств оператора замыкания. Рассмотрим (4.6). Если $\mathbf{S}[M; h]$ — замыкание множества

$$\mathbb{H} \triangleq \{h(\cdot)(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\} \in \mathcal{P}'(X^\Gamma)$$

в ТП (4.1), то $\mathbf{S}[M; h]$ замкнуто в этом ТП. Пусть $\mathbf{S}[M; h] \in \mathcal{F}_{\otimes^\Gamma(\tau)}$. Тогда в силу (4.5) имеем вложение

$$\mathrm{cl}(\mathbb{H}, \otimes^\Gamma(\tau)) \subset \mathbf{S}[M; h]. \tag{4.7}$$

Пусть (в условиях замкнутости $\mathbf{S}[M;h]$) $u \in \mathbf{S}[M;h]$. С учетом (4.4) выберем $\mu \in M$ так, что $u = h(\cdot)(\mu)$. Тогда по определению M имеем ([17], с. 89) для некоторой направленности $(D, \preceq, \rho)$ в множестве $\mathbf{H} \triangleq \{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}$ сходимость

$$(D, \preceq, \rho) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \mu. \tag{4.8}$$

Разумеется, из (4.8) вытекает аналогичная сходимость $(D, \preceq, \rho)$ к μ в топологии $\tau_*(\mathcal{L})|_M$. Как следствие, из определения $\mathbf{H}$ имеем: существует направленность $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, r)$ в $\mathbb{F}$, для которой

$$(\mathbf{D}, \sqsubseteq, (r(d) * \eta)_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})|_M} \mu \tag{4.9}$$

(можно использовать соглашение $(\mathbf{D}, \sqsubseteq) = (D, \preceq)$; существование оператора $r \in \mathbb{F}^{\mathbf{D}}$ в этом случае обеспечивается аксиомой выбора). Поскольку $h(\gamma) \in C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)$, то из (4.9) вытекает

$$(\mathbf{D}, \sqsubseteq, (h(\gamma)(r(d) * \eta))_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau} h(\gamma)(\mu) \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{4.10}$$

Из (2.3) и (4.10) получаем сходимость

$$(\mathbf{D}, \sqsubseteq, (h(\cdot)(r(d) * \eta))_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\otimes^{\Gamma}(\tau)} h(\cdot)(\mu). \tag{4.11}$$

В (4.11) используем следующую конкретизацию (2.3): $P = \Gamma$, $f = (h(\cdot)(r(d) * \eta))_{d \in \mathbf{D}}$, $g = h(\cdot)(\mu)$. Заметим, что $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, (h(\cdot)(r(d) * \eta))_{d \in \mathbf{D}})$ есть направленность в $\mathbb{H}$, а тогда из (4.11) имеем ([17], с. 89) свойство $u = h(\cdot)(\mu) \in \mathrm{cl}(\mathbb{H}, \otimes^{\Gamma}(\tau))$. Вложение $\mathbf{S}[M;h] \subset \mathrm{cl}(\mathbb{H}, \otimes^{\Gamma}(\tau))$ установлено, что с учетом (4.7) означает равенство в правой части (4.6). $\square$

Если $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$ и $h \in \mathbf{C}_M$, то полагаем

$$\mathbf{p}_M[h] \triangleq (h(\cdot)(\mu))_{\mu \in M}, \tag{4.12}$$

получая оператор из M в X^{Γ}.

Предложение 4.3. *Если $M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$ и $h \in \mathbf{C}_M$, то*

$$\mathbf{p}_M[h] \in C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X^{\Gamma}, \otimes^{\Gamma}(\tau)).$$

Доказательство является (фактически) вариантом свойства в ([16], с. 128). Однако в целях полноты изложения рассмотрим схему доказательства, опираясь на (2.3). Фиксируем M и h в согласии с условиями. С учетом (4.2) имеем в виде h оператор из Γ в $C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)$, т. е.

$$h(\gamma) \in C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau) \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{4.13}$$

Выберем произвольно направленность $(D, \preceq, \varphi)$ в M и к.-а. меру $\mu \in M$, для которых

$$(D, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})|_M} \mu. \tag{4.14}$$

В силу (4.13), (4.14) имеем свойство

$$(D, \preceq, h(\gamma) \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} h(\gamma)(\mu) \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{4.15}$$

Заметим, что $h(\gamma)(\mu) = \mathbf{p}_M[h](\mu)(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma$. Рассмотрим далее

$$\mathbf{p}_M[h] \circ \varphi = (h(\cdot)(\varphi(d)))_{d \in D}, \tag{4.16}$$

получая оператор из D в X^{Γ}. Теперь можно использовать (2.3) при условии, что $f = \mathbf{p}_M[h] \circ \varphi$ и $g = h(\cdot)(\mu)$. Тогда в силу (4.16) имеем при $\gamma \in \Gamma$

$$((\mathbf{p}_M[h] \circ \varphi)(d)(\gamma))_{d \in D} = (h(\gamma)(\varphi(d)))_{d \in D} = h(\gamma) \circ \varphi. \tag{4.17}$$

С учетом (4.15), (4.17) и упомянутого ранее представления для $h(\gamma)(\mu)$ имеем

$$(D, \preceq, ((\mathbf{p}_M[h] \circ \varphi)(d)(\gamma))_{d \in D}) \xrightarrow{\tau} \mathbf{p}_M[h](\mu)(\gamma) \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{4.18}$$

Ввиду (2.3) и (4.18) имеем сходимость

$$(D, \preceq, \mathbf{p}_M[h] \circ \varphi) \xrightarrow{\otimes^\Gamma(\tau)} \mathbf{p}_M[h](\mu). \tag{4.19}$$

Итак, (4.14) $\Longrightarrow$ (4.19), что означает в силу произвольного выбора $(D, \preceq, \varphi)$ и μ требуемое свойство непрерывности $\mathbf{p}_M[h]$ (см. [16], с. 122). $\square$

Отметим одно представление, связанное с (4.12): если $\mathbb{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$, $M = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L}))$ и $h \in \mathbf{C}_M$, то

$$\{h(\cdot)(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\} = \mathbf{p}_M[h]^1(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}). \tag{4.20}$$

В частности, можно применять (4.20) при $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$. Напомним здесь же, что $(\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \cap \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$ есть семейство всех непустых компактных в ТП (2.4) п/м $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$; из предложения 2.1 имеем

$$\mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \cap \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]) \ \ \forall \mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta. \tag{4.21}$$

К множествам, определенным в (4.21), вполне применимо предложение 4.3.

Теорема 4.1. *Если* (X, τ) *— хаусдорфово ТП и* $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$*, то для* $M \triangleq \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L}))$ *(см. (4.21)) имеем*

$$\mathrm{cl}(\{h(\cdot)(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}, \otimes^\Gamma(\tau)) = \mathbf{S}[M; h] \in (\otimes^\Gamma(\tau) - \mathrm{comp})[X^\Gamma] \ \ \forall h \in \mathbf{C}_M.$$

Доказательство. Пусть (X, τ) — хаусдорфово ТП. Фиксируем $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$ и конструируем непустой компакт M по правилу (4.21). Фиксируем $h \in \mathbf{C}_M$, получая в силу предложения 4.3 непрерывный оператор $\mathbf{p}_M[h]$ из M в X^Γ; при этом M оснащается относительной $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})|_M$, а X^Γ топологизируется в согласии с (4.1). Само пространство (4.1) является при этом хаусдорфовым ([16], [17]). Тогда

$$\mathbf{p}_M[h]^1(M) \in (\otimes^\Gamma(\tau) - \mathrm{comp})[X^\Gamma] \tag{4.22}$$

(непрерывный образ компакта компактен). В силу отделимости ТП (4.1), (4.4), (4.12) и (4.22) получаем

$$\mathbf{S}[M; h] = \mathbf{p}_M[h]^1(M) \in \mathcal{F}_{\otimes^\Gamma(\tau)}.$$

Из предложения 4.2, (4.22) имеем теперь равенство

$$\mathrm{cl}(\{h(\cdot)(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}, \otimes^\Gamma(\tau_\mathbb{R})) = \mathbf{S}[M; h],$$

откуда, вновь используя (4.22), получаем требуемое утверждение, т. к. выбор h был произвольным. $\square$

Итак, для $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$ согласно предложению 2.1 можно построить компакт обобщенных управлений (элементы M), реализующих "траектории", пучок которых является замыканием пучка обычных "траекторий" в топологии поточечной сходимости.

5. Конкретизация общих конструкций

В данном разделе вернемся к проблеме, намеченной в разделе 1. Полагаем здесь $E = I$, а относительно полуалгебры $\mathcal{L}$ п/м I будем предполагать, что (см. раздел 1)

1) $[a, b[\in \mathcal{L} \ \ \forall a \in I_0, \ \ \forall b \in I_0$,

2) $\mathcal{L}$ содержится в σ-алгебре борелевских п/м I,

3) $b_j \in B(I, \mathcal{L}) \ \ \forall j \in \overline{1, n}$.

Через η условимся обозначать сужение m на полуалгебру $\mathcal{L}$, т. е. след меры Лебега на $\mathcal{L}$. Разумеется, η есть счетно-аддитивная положительная мера на $\mathcal{L}$. Если $f \in B(I, \mathcal{L})$, то посредством формулы, аналогичной (1.2), но использующей вместо m меру η, определяется f-траектория системы (1.1); разумеется, используем в векторном варианте интеграл ([8], гл. 3), что не влияет на результат. Здесь напомним, что равномерно непрерывные вещественнозначные функции на I суть элементы $B(I,\mathcal{L})$; в качестве таких функций можно использовать сужения на I непрерывных функций на I_0. С использованием упомянутой трансформации (1.2) ([11], сс. 182, 183) определяем при $f \in B(I,\mathcal{L})$ обычную траекторию φ_f системы (1.1) с начальным условием $\varphi_f(t_0) = x_0$, для которой затем строим вектор-функцию (1.3).

Разумеется, нужно условиться о выборе, в естественных для инженерной практики случаях ресурсно ограниченных задач, того или иного варианта множества из $\mathfrak{F}_\eta$. Условие (1.4) подсказывает традиционный вариант такого выбора, отвечающий естественным импульсным ограничениям. В разделе 3 встречались и с другими вариантами; их конкретизация для задачи управления системой (1.1) не вызывает затруднений.

Сейчас будем полагать, что, в условиях соглашения $(E,\mathcal{L}) = (I,\mathcal{L})$, множество $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_\eta$ выбрано и зафиксировано. Как следствие, в виде

$$M = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}\}, \tau_*(\mathcal{L})) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \cap \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]) \tag{5.1}$$

получаем множество всех обобщенных элементов (управлений; см. [9]). При этом каждому обобщенному управлению $\mu \in M$ согласно второй части работы [9], сопоставляем “движение” $\widetilde{\varphi}_\mu$ в виде функции, действующей из I_0 в $\mathbb{R}^n$ по правилу

$$\widetilde{\varphi}_\mu(t) \triangleq \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{[t_0,t[} \Phi(t,\xi)\, b(\xi)\, \mu(d\xi), \tag{5.2}$$

где учитывается 3); интеграл в правой части (5.2) определяется покомпонентно. Далее, при $\mu \in M$ определяем функцию

$$\zeta \circ \widetilde{\varphi}_\mu : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k,$$

которую рассматриваем в качестве обобщенной траектории. Интересны соотношение пучков

$$\Sigma \triangleq \{\zeta \circ \varphi_f : f \in \mathbb{F}\}, \quad \widetilde{\Sigma} \triangleq \{\zeta \circ \widetilde{\varphi}_\mu : \mu \in M\}$$

и их топологические свойства. Из определений легко следует, что при $f \in \mathbb{F}$ и $\mu = f * \eta$ ([9], с. 70)

$$\zeta \circ \varphi_f = \zeta \circ \widetilde{\varphi}_\mu. \tag{5.3}$$

Как следствие, $\Sigma \subset \widetilde{\Sigma}$. Рассмотрим замыкание множества Σ в топологии поточечной сходимости в пространстве всех k-вектор-функций на I_0. Для представления упомянутого замыкания будем использовать конкретизацию теоремы 4.1.

Далее полагаем $X = \mathbb{R}^k$, а τ есть топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^k$. Пусть $\Gamma = I_0$. Введем для каждого $\gamma \in \Gamma$ отображение h_γ вида

$$\mu \longmapsto (\zeta \circ \widetilde{\varphi}_\mu)(\gamma) : M \longrightarrow X. \tag{5.4}$$

В силу (5.2) имеем, что отображение (5.4) непрерывно как суперпозиция двух непрерывных отображений:

$$\mu \longmapsto \widetilde{\varphi}_\mu(\gamma) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{5.5}$$

и ζ; при этом $\mathbb{R}^n$ оснащается естественной топологией покоординатной сходимости $\mathbf{t}$ (отображение (5.5) — элемент $C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$, что следует из определения $\tau_*(\mathcal{L})$). Итак,

$$h_\gamma \in C(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Это означает с учетом (4.2), что в изучаемом случае

$$\mathbf{h} \triangleq (h_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbf{C}_M. \tag{5.6}$$

Рассмотрим теперь конкретизацию конструкции раздела 4, соответствующую (5.6). Прежде всего из (4.3), (5.4) и (5.6) получаем при $\mu \in M$

$$\mathbf{h}(\cdot)(\mu) = (h_\gamma(\mu))_{\gamma \in \Gamma} = \zeta \circ \widetilde{\varphi}_\mu. \tag{5.7}$$

С учетом (4.4) имеем теперь равенство $\mathbf{S}[M;\mathbf{h}] = \widetilde{\Sigma}$, получая пучок обобщенных траекторий (в данном случае речь действительно идет о траекториях системы, включающей линейный “блок” и нелинейный безинерционный преобразователь [9]). Заметим, что в силу (5.3) и (5.7) имеем при $f \in \mathbb{F}$

$$\mathbf{h}(\cdot)(f * \eta) = \zeta \circ \varphi_f.$$

Поэтому $\Sigma = \{\mathbf{h}(\cdot)(f * \eta) : f \in \mathbb{F}\}$. Поскольку (X, τ) — хаусдорфово ТП, то с использованием M (5.1) из теоремы 4.1 получаем

$$\mathrm{cl}(\Sigma, \otimes^{\Gamma}(\tau)) = \widetilde{\Sigma} \in (\otimes^{\Gamma}(\tau) - \mathrm{comp})[X^{\Gamma}]. \tag{5.8}$$

Свойство (5.8) означает, что замыкание пучка Σ (обычных траекторий) в топологии поточечной сходимости пространства $\{I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^k\}$ всех k-вектор-функций на отрезке I_0 есть компакт, совпадающий с множеством $\widetilde{\Sigma}$ всех обобщенных траекторий на I_0. Детализируя $\mathbb{F}$, с учетом представлений раздела 3 можем получать конкретные версии компактификации пучка для типичных вариантов импульсных ограничений (см. (3.4)–(3.6), (3.8)). В этой связи отметим сводку вариантов $\mathbb{F}$ 1)–4) в заключении раздела 3. Представление (5.8) — конкретный вариант компактификации пучка траекторий, построенный с учетом эффекта произведения разрывной функции на обобщенную в исходной системе (1.1).

В заключение отметим очевидную детализацию предложения 4.1, связанную с вопросом о построении замыкания области достижимости. Сохраняем предположение относительно (X, τ): используется $\mathbb{R}^k$ в обычной топологии покоординатной сходимости. Введем произвольно $\mathbb{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$ и определяем M согласно предложению 4.1, получая непустое п/м $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. Пусть $\mathbf{f}$ есть оператор

$$\mu \longmapsto (\zeta \circ \widetilde{\varphi}_\mu)(\vartheta_0) : M \longrightarrow X; \tag{5.9}$$

его непрерывность уже устанавливалась в связи с (5.4). Тогда имеет место свойство: если $\mathbf{f} \in C_{\mathrm{cl}}(M, \tau_*(\mathcal{L})|_M, X, \tau)$ в условиях конкретизации (5.9), то (см. (5.3))

$$\mathrm{cl}(\{\zeta(\varphi_f(\vartheta_0)) : f \in \mathbb{F}\}, \tau) = \{\zeta(\widetilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0)) : \mu \in M\} :$$

замыкание обычной области достижимости совпадает с обобщенной областью достижимости.

Литература

1. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М: Наука, 1965. – 331 с.
2. Красовский Н.Н. *Теория управления движением. Линейные системы.* – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Баскаков С.И. *Радиотехнические цепи и сигналы.* – М.: Высш. школа, 1988. – 448 с.
4. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы. Модели и приложения.* – М.: Наука, 1991. – 256 с.
5. Завалищин Д.С., Завалищин С.Т. *Динамическая оптимизация обтекания.* – М.: Физматлит, 2002. – 220 с.
6. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Оптимальное импульсное управление с приложениями.* – М.: Физматлит, 2000. – 255 с.
7. Серов В.П., Ченцов А.Г. *Об одной конструкции расширения задачи управления с интегральными ограничениями* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 4. – С. 607–617.
8. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* – New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. – 244 p.
9. Ченцов А.Г. *К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 2. – С. 58–80.
10. Rao K. P. S. B., Rao M.B. *Theory of charges. A study of finitely additive measures.* – London: Academic Press, 1983. – 253 p.

11. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
12. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Publishers, 1997. – 322 p.
13. Ченцов А.Г. *К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63. – С. 185–223.
14. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and problems of asymptotic analysis* // Non-smooth and discontinuous problems of control and optimization. Proc. volume from the IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998, Pergamon, 1999. – P. 1–12.
15. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1970. – 416 с.
16. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 431 с.
17. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
18. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
19. Ченцов А.Г. *Приложения теории меры к задачам управления.* – Свердловск: Ср.-Уральское книжное изд-во, 1985. – 127 с.
20. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and Relaxations.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 408 p.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила
05.05.2004