ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В предлагаемой статье изучается асимптотическое поведение и устанавливаются оценки сильных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, а также анализируются некоторые спектральные вопросы, включающие в себя доказательство базисности Рисса системы экспоненциальных решений указанных уравнений в пространствах Соболева на промежутке запаздывания.

1. Определения, обозначения. Формулировки результатов

Рассмотрим начальную задачу для дифференциально-разностного уравнения вида

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(B_j u(t-h_j)+D_j\frac{du}{dt}(t-h_j)\Big)=0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(t)=y(t), \quad t\in[-h,0), \quad u(+0)=y(-0). \tag{2}$$

Здесь B_j, D_j $(j=0,1,\dots,n)$ — матрицы размера $m\times m$ с постоянными комплексными элементами, числа h_j таковы, что $0=h_0<h_1<\dots<h_n=h$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\lambda)$ матрицу-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}(B_j+\lambda D_j)\exp(-\lambda h_j),$$

через $l(\lambda)=\det\mathcal{L}(\lambda)$ — характеристический квазимногочлен [1] уравнения (1), через λ_q — нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные по возрастанию модулей с учетом кратности, через Λ — множество всех нулей функции $l(\lambda)$.

Собственные векторы, входящие в каноническую систему [2] собственных и присоединенных (корневых) векторов $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающих числу λ_q, обозначим через $x_{q,j,0}$, их присоединенные порядка s — через $x_{q,j,s}$ (индекс j показывает, каким по счету является вектор $x_{q,j,0}$ в специально выбранном базисе подпространства решений уравнения $\mathcal{L}(\lambda_q)x=0$).

Введем систему экспоненциальных решений уравнения (1)

$$y_{q,j,s}(t)=\exp(\lambda_q t)\Big(\frac{t^s}{s!}x_{q,j,0}+\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}x_{q,j,1}+\dots+x_{q,j,s}\Big). \tag{3}$$

Обозначим через $W_{2,\gamma}^p((a,b),\mathbb{C}^m)$, $(-\infty<a<b\le+\infty)$, $p=1,2,\dots$, весовые пространства Соболева вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$, снабженные нормами

$$\|v\|_{W_{2,\gamma}^p(a,b)}=\Big(\int_a^b\exp(-2\gamma t)\Big(\sum_{j=0}^{p}\|v^{(j)}(t)\|_{\mathbb{C}^m}^2\Big)dt\Big)^{1/2}, \quad \gamma\ge 0.$$

Здесь и в дальнейшем $W_{2,0}^p=W_2^p$, $v^{(j)}(t)=\frac{d^j}{dt^j}v(t)$, $p,j=1,2,\dots$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 99-01-01079, 96-15-96091.

Определение. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W^1_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}_+$, назовем сильным решением задачи (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, а также условию (2).

Лемма 1. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда найдется такое число* $\gamma_0 \geq 0$, *что при всех* $\gamma \geq \gamma_0$ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ *для любой вектор-функции* $y(t) \in W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *и для ее решения* $u(t)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(-h,+\infty)} \leq d_0 \|y\|_{W^1_2(-h,0)}$$

с постоянной d_0, *не зависящей от функции* $y(t)$.

Принимая во внимание лемму 1, введем аналогично [3] полугруппу U_t $(t \geq 0)$ ограниченных операторов, действующих в пространстве $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ согласно правилу

$$(U_t y)(s) = u(t+s), \quad t \geq 0, \quad s \in [-h,0],$$

где $u(\cdot)$ — решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $y(s)$.

Лемма 2. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда семейство операторов* U_t $(t \geq 0)$ *образует* C^0*-полугруппу в пространстве* $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *с генератором* $\mathbb{D}$, *имеющим область определения*

$$\mathrm{Dom}(\mathbb{D}) = \left\{\varphi \in W^2_2((-h,0),\mathbb{C}^m),\ \sum_{j=0}^{n}(B_j\varphi(-h_j) + D_j\varphi^{(1)}(-h_j)) = 0\right\}$$

и действующим по правилу $(\mathbb{D}\varphi)(s) = \varphi^{(1)}(s)$, $s \in (-h,0)$.

Предложение 1. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда спектр оператора* $\mathbb{D}$ *совпадает с множеством нулей* Λ *функции* $l(\lambda)$, *а экспоненциальные решения* (3) *являются его корневыми векторами и образуют минимальную систему в пространстве* $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Лемма 3. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. *Тогда найдутся такие постоянные* α_1 *и* α_2, *что множество* Λ *лежит в полосе* $\{\lambda : \alpha_1 < \operatorname{Re}\lambda < \alpha_2\}$, *а система экспоненциальных решений* $\{y_{q,j,s}(t)\}$ *полна в пространстве* $W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Обозначим через $B(\lambda_q,\rho)$ круг радиуса ρ с центром в точке λ_q и пусть

$$G(\Lambda,\rho) \equiv \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{\lambda_q\in\Lambda} B(\lambda_q,\rho)).$$

Лемма 4. *Если* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, *то найдется такая система замкнутых контуров*

$$\Gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \alpha_2,\ c_n \leq \operatorname{Im}\lambda \leq c_{n+1}\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \alpha_2,\ \operatorname{Im}\lambda = c_{n+1}\} \cup$$
$$\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \alpha_1,\ c_n \leq \operatorname{Im}\lambda \leq c_{n+1}\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \alpha_2,\ \operatorname{Im}\lambda = c_n\},$$

целиком принадлежащих области $G(\Lambda,\rho)$ *при некотором достаточно малом* $\rho > 0$. *При этом выполняются следующие условия*:

(i) *последовательность вещественных чисел* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *такова, что* $0 < \delta \leq c_{n+1} - c_n \leq \Delta < +\infty$, *где* δ *и* Δ — *некоторые положительные постоянные*;

(ii) *количество* $N(\Gamma_n)$ *нулей функции* $l(\lambda)$ *(с учетом кратности), лежащих в областях, границами которых являются контуры* Γ_n, *равномерно ограничено по* n, *т. е.*

$$\max_n N(\Gamma_n) \leq M;$$

(iii) *найдется такая постоянная* K_0, *что выполнена оценка*

$$\sup_{\lambda\in\Gamma_n} |\lambda|\, \|\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\| \leq K_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ семейство риссовских спектральных проекторов оператора $\mathbb{D}$, соответствующих контурам Γ_n,

$$(\mathcal{P}_n f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} R(\lambda,\mathbb{D})f\,d\lambda. \tag{4}$$

Здесь $R(\lambda,\mathbb{D})$ — резольвента оператора $\mathbb{D}$; контуры Γ_n обходятся против часовой стрелки.

Теорема 1. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. *Тогда система подпространств* $\mathcal{W}_n = \mathcal{P}_n W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$, *отвечающая семейству проекторов* $\{\mathcal{P}_n\}$ *из* (4) *с контурами* Γ_n, *удовлетворяющими условиям* (i)–(iii) *леммы* 4, *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Приведем утверждение об оценке сильных решений задачи (1), (2).

Теорема 2. *Если* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, *то для любого сильного решения* $u(t)$ *задачи* (1), (2) *выполнено неравенство*

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^1(-h,0)} \equiv \|(U_t y)(s)\|_{W_2^1(-h,0)} \leq d(t+1)^{M-1}\exp(\varkappa t)\|y\|_{W_2^1(-h,0)}, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

где $\varkappa = \sup\limits_{\lambda_q} \operatorname{Re}\lambda_q$, *величина* M *фигурирует в утверждении* (ii) *леммы* 4, *а постоянная* d *не зависит от функции* $y(t)$.

Следующие теоремы 3 и 4 уточняют и дополняют теоремы 1 и 2 в случае, когда множество Λ нулей функции $l(\lambda)$ отделимо.

Теорема 3. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$ *и множество* Λ *отделимо, т. е.* $\inf\limits_{\lambda_p\neq\lambda_q}|\lambda_p-\lambda_q| > 0$. *Тогда система подпространств* $\{V_{\lambda_q}\}$, *где* V_{λ_q} — *линейные оболочки элементарных решений* (3), *отвечающих характеристическим числам* λ_q, *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Следствие. При выполнении условий теоремы 4 элементарные решения $\{y_{q,j,s}(t)\}$ уравнения (1) могут быть выбраны таким образом, что они образуют базис Рисса пространства $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для любого сильного решения задачи* (1), (2) *выполнено неравенство*

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^1(-h,0)} \equiv \|(U_t y)(s)\|_{W_2^1(-h,0)} \leq d(t+1)^{N-1}\exp(\varkappa t)\|y\|_{W_2^1(-h,0)}, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

где N — *максимальная кратность нулей* λ_q *функции* $l(\lambda)$, *а постоянная* d *не зависит от* $y(t)$.

Замечание. Известно (напр., [4], с. 26–27), что для квазимногочленов величина N, равная максимальной кратности их нулей, конечна. При этом в [4] указана ее оценка.

2. Доказательство основных результатов

Основное внимание уделим доказательству теоремы 1, перед которым приведем два утверждения, необходимые в дальнейшем.

Предложение 2. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда резольвента* $R(\lambda,\mathbb{D})$ *оператора* $\mathbb{D}$ *в точках существования представима в виде*

$$(R(\lambda,\mathbb{D})f)(t) = -((\lambda I - \mathbb{D})^{-1}f)(t) =$$

$$= -\exp(\lambda t)\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\left[\sum_{j=0}^{n}\exp(-\lambda h_j)D_j f(0) - \sum_{j=0}^{n}\exp(-\lambda h_j)\int_{-h_j}^{0}\exp(-\lambda\tau)(D_j f^{(1)}(\tau)+B_j f(\tau))d\tau\right] +$$

$$+\exp(\lambda t)\int_0^t \exp(-\lambda\tau)f(\tau)d\tau, \quad t\in[-h,0], \tag{7}$$

и является компактным оператором в пространстве $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Предложение 3. *Если* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, *то матрица-функция* $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ *удовлетворяет оценкам*

$$\|\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\| \le c(|\lambda|+1)^{-1}, \qquad \lambda \in G(\Lambda,\rho)\cap\{\operatorname{Re}\lambda > 0\}, \tag{8}$$

$$\|\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\| \le c_0(|\lambda|+1)^{-1}\exp(\operatorname{Re}\lambda h), \quad \lambda \in G(\Lambda,\rho)\cap\{\operatorname{Re}\lambda < 0\}; \quad c,\ c_0 \text{ — const}. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1. Принимая во внимание (7), заметим, что справедливо представление

$$-R(\lambda,\mathbb{D})f = F(\lambda,t) = \exp(\lambda t)F(\lambda) + \frac{\exp(\lambda t)}{\lambda}f(0) - \\ - \exp(\lambda t)\int_0^t \exp(-\lambda\tau)f(\tau)d\tau, \quad f(t)\in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m), \tag{10}$$

в котором

$$F(\lambda) = -\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\Big[\frac{1}{\lambda}\Big(\sum_{j=0}^{n}\exp(-\lambda h_j)B_j\Big)f(0) + \sum_{j=0}^{n}\exp(-\lambda h_j)\int_{-h_j}^{0}\exp(-\lambda\tau)(D_jf^{(1)}(\tau)+B_jf(\tau))d\tau\Big].$$

Представим вектор-функцию $F(\lambda)$ в виде

$$F(\lambda) = -[Q(\lambda) + \mathcal{L}^{-1}(\lambda)P(\lambda)], \tag{11}$$

где

$$Q(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}^{-1}(\lambda)R(\lambda), \quad R(\lambda) = \Big[\sum_{j=0}^{n}\exp(-\lambda h_j)B_j\Big]f(0),$$

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\exp(-\lambda h_j)G_j(\lambda), \quad G_j(\lambda) = \int_{-h_j}^{0}\exp(-\lambda\tau)(D_jf^{(1)}(\tau)+B_jf(\tau))d\tau.$$

Установим необходимые в дальнейшем оценки вектор-функции $F(\lambda)$. Заметим, что вектор-функции $G_j(\lambda)$ являются целыми функциями экспоненциального типа (не превосходящего h_j), принадлежащими пространству Харди в любой полосе $\{\lambda : A < \operatorname{Re}\lambda < B\}$, причем справедливы неравенства

$$\sup_{A\le x\le B}\int_{-\infty}^{+\infty}\|G_j(x+iy)\|^2dy \le c_1\|f\|^2_{W_2^1(-h,0)}$$

с постоянной c_1, не зависящей от функции $f(t)$. Отсюда немедленно вытекает неравенство

$$\sup_{A\le x\le B}\int_{-\infty}^{+\infty}\|P(x+iy)\|^2dy \le c_2\|f\|^2_{W_2^1(-h,0)} \tag{12}$$

с постоянной c_2, не зависящей от функции $f(t)$.

На основании предложения 3 и теоремы о следах ([5], с. 235) получаем оценку вектор-функции $Q(\lambda)$ в области $\Pi_\rho(\beta_1,\beta_2) = G(\Lambda,\rho)\cap\{\lambda : \beta_1 < \operatorname{Re}\lambda < \beta_2\}$

$$\|Q(\lambda)\| \le c_3(|\lambda|+1)^{-2}\|f\|_{W_2^1(-h,0)}, \quad c_3 = \text{const} > 0. \tag{13}$$

Здесь β_1, β_2 — произвольные постоянные такие, что $\beta_1 \le \alpha_1$, $\beta_2 \ge \alpha_2$. Принимая во внимание представление (11), предложение 3, а также оценки (12), (13) при $\operatorname{Re}\lambda = \alpha_p$ $(p=1,2)$, получаем неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\alpha_p+i\mu|^2)\|F(\alpha_p+i\mu)\|^2d\mu \le c_4\|f\|^2_{W_2^1(-h,0)}, \quad p=1,2, \tag{14}$$

с постоянной c_4, не зависящей от функции $f(t)$.

Известно утверждение, формулировку которого приведем с учетом сделанных здесь обозначений.

Лемма 5 ([6], с. 30). *Если для любых элементов f и $g \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\Gamma_n} (R(\lambda,\mathbb{D})f,g)_H \, d\lambda \right| < +\infty, \tag{15}$$

то последовательность подпространств $\mathcal{W}_n = \mathcal{P}_n W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m) \subseteq H \equiv W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$, где $\mathcal{P}_n$ — семейство риссовских спектральных проекторов оператора $\mathbb{D}$, является безусловным базисом своей замкнутой линейной оболочки, причем, если эта последовательность полна в H, то она является безусловным базисом в H.

Поскольку согласно лемме 3 последовательность $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является полной в пространстве $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$, остановимся на доказательстве соотношения (15).

В соответствии с (10) надлежит показать, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\Gamma_n} \langle \exp(\lambda t)F(\lambda), g(t)\rangle_{W_2^1(-h,0)} d\lambda \right| < +\infty. \tag{16}$$

Заметим, что интегралы по контурам Γ_n от второго и третьего слагаемых в правой части (10) равны нулю (за исключением, быть может, одного интеграла для второго слагаемого), поскольку подинтегральные функции регулярны (голоморфны) в областях, границами которых являются контуры Γ_n.

Обозначив

$$\widehat{g}_1(\lambda) = \int_{-h}^0 \exp(\lambda t) g^{(1)}(t)dt, \quad \widehat{g}_0(\lambda) = \int_{-h}^0 \exp(\lambda t) g(t)dt,$$

получаем

$$\langle \exp(\lambda t)F(\lambda), g(t)\rangle_{W_2^1(-h,0)} = (\lambda F(\lambda), \widehat{g}_1(\overline{\lambda}))_{\mathbb{C}^m} + (F(\lambda), \widehat{g}_0(\overline{\lambda}))_{\mathbb{C}^m}.$$

Для доказательства (16) достаточно установить неравенства

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\Gamma_n} (\lambda^j F(\lambda), \widehat{g}_j(\overline{\lambda}))d\lambda \right| < +\infty, \quad j=0,1.$$

Отметим, что вектор-функции $\widehat{g}_1(\lambda)$ и $\widehat{g}_0(\lambda)$ являются целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего h, из пространства Харди [7] $H_2(A,B)$ в любой полосе $\{\lambda : A \le \operatorname{Re}\lambda \le B\}$, причем справедливы оценки

$$\sup_{A\le x\le B} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widehat{g}_j(x+iy)\|^2 dy \le k_j \|g^{(j)}\|^2_{L_2(-h,0)}, \quad j=0,1, \tag{17}$$

с постоянными k_0, k_1, не зависящими от функции $g(t)$. Отсюда при $A=\alpha_1$, $B=\alpha_2$ вытекает неравенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int\limits_{\alpha_p+ic_n}^{\alpha_p+ic_{n+1}} (\lambda^j F(\lambda), \widehat{g}_j(\overline{\lambda}))d\lambda \right| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |((\alpha_p+i\mu)^j F(\alpha_p+i\mu), \widehat{g}_j(\alpha_p-i\mu))|d\mu \le$$

$$\le c_5 \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\alpha_p+i\mu|^{2j})\|F(\alpha_p+i\mu)\|^2 d\mu \Bigg)^{1/2} \|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)}, \quad j=0,1, \tag{18}$$

с постоянной c_5, не зависящей от функции $g(t)$.

В свою очередь, из (14), (18) вытекает неравенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\int\limits_{\alpha_p+ic_n}^{\alpha_p+ic_{n+1}}(\lambda^j F(\lambda),\widehat{g}_j(\overline{\lambda}))d\lambda\Big|\le c_6\|f\|_{W_2^1(-h,0)}\|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)} \tag{19}$$

с постоянной c_6, не зависящей от функций f и g.

Покажем теперь, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\int\limits_{\alpha_1+ic_n}^{\alpha_2+ic_n}(\lambda^j F(\lambda),\widehat{g}_j(\overline{\lambda}))d\lambda\Big|\le c_7\|f\|_{W_2^1(-h,0)}\|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)}$$

с постоянной c_7, не зависящей от функций f и g.

Для доказательства последнего соотношения понадобится утверждение, являющееся незначительной модификацией теоремы 3.3.1 из [5]. Для ее формулировки обозначим через $\mathfrak{M}_{\nu 2}(\mathbb{R})$ совокупность всех целых функций экспоненциального типа ν, которые как функции действительного переменного $t\in\mathbb{R}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$.

Лемма 6. *Пусть функция $v(z)\in\mathfrak{M}_{\nu 2}(\mathbb{R})$, а последовательность действительных чисел $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ такова, что $0<\delta\le t_{n+1}-t_n\le\Delta<+\infty$, где δ и Δ — положительные постоянные. Тогда имеет место неравенство*

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|v(t_n)|^2\Big)^{1/2}\le\delta^{-1/2}(1+\nu\Delta)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|v(t)|^2dt\Big)^{1/2}.$$

В соответствии с представлением (11)

$$(\lambda^j F(\lambda),\widehat{g}_j(\overline{\lambda}))=-(\lambda^j Q(\lambda),\widehat{g}_j(\overline{\lambda}))-(\lambda^j\mathcal{L}^{-1}(\lambda)P(\lambda),\widehat{g}_j(\overline{\lambda})).$$

Согласно лемме 4 и оценке (13)

$$\|\lambda Q(\lambda)\|\,\big|_{\operatorname{Im}\lambda=c_n}\le c_8\sup_{\operatorname{Im}\lambda=c_n}(|\lambda|+1)^{-1}\|f\|_{W_2^1(-h,0)}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\int\limits_{\alpha_1+ic_n}^{\alpha_2+ic_n}\|\lambda Q(\lambda)\|^2|d\lambda|\le c_9(|n|+1)^{-2}\|f\|^2_{W_2^1(-h,0)} \tag{20}$$

с постоянной c_9, не зависящей от функции $f(t)$.

В свою очередь, для вектор-функций $\widehat{g}_l(\lambda)$ в соответствии с леммой 6 имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|(\widehat{g}_l(x+ic_n),e_j)|^2\le c_{10}\int_{-\infty}^{+\infty}|(\widehat{g}_l(x+iy),e_j)|^2dy\le c_{11}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\widehat{g}_l(x+iy)\|^2dy,\quad x\in[\alpha_1,\alpha_2],\ \ l=0,1,$$

где $\{e_j\}_{j=1}^m$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}^m$, и значит, согласно (17)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\|\widehat{g}_l(x+ic_n)\|^2dx\le c_{12}\sup_{\alpha_1\le x\le\alpha_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\widehat{g}_l(x+iy)\|^2dy\le$$
$$\le c_{13}\|g^{(l)}\|_{L_2(-h,0)};\quad c_{10},c_{11},c_{12},c_{13}=\mathrm{const}>0. \tag{21}$$

Принимая во внимание, что функции $(P(\lambda),e_j)$, $j=1,2,\dots,m$, $\lambda=iz$, также удовлетворяют условиям леммы 6, аналогично оценке для вектор-функции $\widehat{g}_l(\lambda)$ получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\|P(x+ic_n)\|^2_{\mathbb{C}^m}\le c_{14}\int_{-\infty}^{+\infty}\|P(x+iy)\|^2_{\mathbb{C}^m}\,dy,\quad x\in[\alpha_1,\alpha_2]. \tag{22}$$

Следовательно, из (22) и оценки (12) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \|P(x+ic_n)\|^2 dx \le c_{15} \|f\|^2_{W_2^1(-h,0)}$$

с постоянной c_{15}, не зависящей от функции $f(t)$.

Из последнего неравенства, а также из того, что

$$\sup_{\lambda\in l_n} |\lambda|\, \|\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\| \le K_0 = \mathrm{const}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

получаем оценку

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|\lambda \mathcal{L}^{-1}(\lambda) P(\lambda)\|^2 |d\lambda| \le c_{16} \|f\|^2_{W_2^1(-h,0)}, \tag{23}$$

где

$$l_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,\lambda = c_n,\ \alpha_1 \le \mathrm{Re}\,\lambda \le \alpha_2\}.$$

Принимая во внимание представление (11) и оценки (20), (23), имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|\lambda F(\lambda)\|^2 |d\lambda| \le c_{17} \|f\|^2_{W_2^1(-h,0)} \tag{24}$$

с постоянной c_{17}, не зависящей от функции $f(t)$.

Следовательно, из оценок (21), (24) и неравенства

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{l_n} (\lambda^j F(\lambda), \widehat{g}_j(\overline{\lambda})) d\lambda \right| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|\lambda^j F(\lambda)\|^2 |d\lambda| \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|\widehat{g}_j(\overline{\lambda})\|^2 |d\lambda| \right)^{1/2}, \quad j = 0, 1,$$

вытекает

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{l_n} (\lambda^j F(\lambda), \widehat{g}_j(\overline{\lambda})) d\lambda \right| \le c_{18} \|f\|_{W_2^1(-h,0)} \|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)} \tag{25}$$

с постоянной c_{18}, не зависящей от функций f и g.

Наконец, объединяя неравенства (19), (25), приходим к неравенству (16), и следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\Gamma_n} (R(\lambda, \mathbb{D}) f, g)_H\, d\lambda \right| \le c_{19} \|f\|_{W_2^1(-h,0)} \|g\|_{W_2^1(-h,0)}$$

с постоянной c_{19}, не зависящей от функций f и g.

Таким образом, в соответствии с леммой 5 последовательность подпространств $\{\mathcal{W}_n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ образует безусловный базис (базис Рисса) пространства $W_2^1((-h,0), \mathbb{C}^m)$. $\square$

Ограничимся замечаниями, касающимися обоснования некоторых сформулированных утверждений.

Доказательство лемм 1 и 3 приведено в [8] (см. также [9]).

Доказательство леммы 2 опирается на лемму 1 и проводится аналогично соответствующим утверждениям из [3], [10].

В свою очередь, доказательства предложений 1 и 2 немедленно вытекают из леммы 2.

Приведем краткое доказательство леммы 4 и предложения 3.

При сделанных предположениях лемма 4 и предложение 3 являются следствием известных утверждений (напр., [4], [11]). Поясним это.

В самом деле, оценка матрицы-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ вне полосы $\{\lambda : A \le \mathrm{Re}\,\lambda \le B\}$, $A < 0$, $B > 0$, может быть установлена непосредственной проверкой (см. также [1], гл. 12).

В свою очередь, оценка матрицы-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ на множестве $G(\Lambda, \rho) \cap \{\lambda : A < \mathrm{Re}\,\lambda < B\}$ может быть получена на основании оценки снизу квазимногочлена $l(\lambda)$. Действительно, в силу того, что $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, коэффициенты при λ^m и $\lambda^m \exp(-\lambda m h)$ определяются величинами $\det(\lambda D_0 + B_0)$ и $\det((\lambda D_n + B_n)\exp(-\lambda h))$ ([1], с. 429, формула 12.2.12) и при больших по модулю λ отличны от нуля.

Тогда в соответствии с неравенством (3.12) из [4] получаем оценку

$$|l(\lambda)| \geq c_{20}(|\lambda|^m + 1), \quad \lambda \in G(\Lambda, \rho) \cap \{\lambda : A < \operatorname{Re}\lambda < B\}. \tag{26}$$

Вследствие того, что элементы матрицы-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ составлены из отношений алгебраических дополнений $\mathcal{L}(\lambda)$ и квазимногочлена $l(\lambda)$, из оценки (26) получаем неравенства (8), (9) и в полосе $\{\lambda : A < \operatorname{Re}\lambda < B\}$, $A < 0$, $B > 0$.

В свою очередь, доказательство существования последовательности $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, указанной в лемме 4, вытекает из лемм 4 и 5 из [11].

В самом деле, рассмотрим m различных нулей λ_{q_j} $(j = 1, 2, \ldots, m)$ квазимногочлена $l(\lambda)$ и введем функцию

$$\eta(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda m h}{2}\right) l(\lambda) \Big/ (\lambda - \lambda_{q_1}) \cdots (\lambda - \lambda_{q_m}).$$

Используя то, что $\det D_0 \neq 0$ и $\det D_n \neq 0$, и дословно повторяя соответствующие рассуждения из [12], получим, что функция $\eta_1(z) = \eta\big(-\frac{2\pi z i}{hm}\big)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 из [11].

Следовательно, в силу леммы 2 из [11] внутри любого прямоугольника $\{\lambda : \alpha_1 < \operatorname{Re}\lambda < \alpha_2,\ t \leq \operatorname{Im}\lambda \leq t+1\}$ число нулей функции $\eta(\lambda)$ с учетом кратности не превосходит некоторого числа M, не зависящего от $t \in \mathbb{R}$, и в силу леммы 5 из [11] при достаточно малом $\rho > 0$ на каждом интервале единичной длины найдется такое число c, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = c$ не пересекает исключительного множества $\bigcup\limits_{\lambda_q \in \Lambda} B(\lambda_q, \rho)$. Отсюда и вытекает утверждение леммы 4 и предложения 3.

Отметим, что доказательство теоремы 2 следует из установленной теоремы 1 и теоремы 1 из [13].

В свою очередь, доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1 с несколько иным выбором контуров Γ_n, учитывающим отделимость множества Λ. Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 3 и ее следствия и устанавливается аналогично доказательству теоремы 1 из [12].

3. Некоторые замечания и комментарии

Отметим, что оценки, сходные с (5), (6), для которых величина $\varkappa$ заменяется на $\varkappa + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, давно и хорошо известны (напр., [3], [10]). В этой связи возникла задача о получении более точных оценок решений уравнений нейтрального типа и, в частности, вопрос о том, можно ли уточнить ранее известную оценку и положить $\varepsilon = 0$. Теоремы 2, 4 дают, в определенном смысле, утвердительный ответ на этот вопрос.

Заметим, что асимптотическое поведение решений уравнения (1) изучалось многими авторами. Ограничимся здесь указанием монографий [1], [3], а также статьи [10]. Наш подход к изучению данной задачи носит спектральный характер и базируется на базисности Рисса системы экспоненциальных решений уравнения (1), являющихся собственными и присоединенными функциями генератора $\mathbb{D}$ полугруппы сдвигов U_t $(t \geq 0)$ вдоль решений уравнения (1).

Результаты о базисности Рисса системы экспоненциальных решений для систем дифференциально-разностных уравнений и оценки их решений, близкие (5), (6), приведены в [8], [9], [14], [15]. Аналогичные результаты для скалярных уравнений n-го порядка доказаны в [12], [16], [17]. Заметим при этом, что доказательства базисности системы экспоненциальных решений, приведенные в [12] и в предлагаемой статье, существенно различаются. При ином понимании решений базисность системы экспоненциальных решений в пространстве $L_2((-h, 0), \mathbb{C}^m)$ рассматривалась в [18].

Полнота системы экспоненциальных решений уравнений, близких (1), изучалась рядом авторов. Ограничимся здесь указанием работ [19], [20] (там же см. библиографию).

Литература

1. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
3. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
4. Зверкин А.М. *Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений.* Ч. 1. *Квазиполиномы* // Тр. семин. по теории дифференц. уравнений с отклоняющ. аргументом. – М., 1965. – Т. 5. – С. 3–37.
5. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 455 с.
6. Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.
7. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
8. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.
9. Власов В.В. *Некоторые свойства системы элементарных решений дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1996. – Т. 51. – Вып. 1. – С. 143–144.
10. Henry D. *Linear autonomous neutral functional differential equations* // J. Different. Equat. – 1974. – V. 15. – № 1. – P. 106–128.
11. Левин Б.Я. *О базисах показательных функций в* L_2 // Зап. Харьковск. Матем. о-ва. – 1961. – Т. 27. – № 4. – С. 39–48.
12. Власов В.В. *Об одном классе дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 20–29.
13. Милославский А.И. *Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 1985. – Т. 26. – С.118–132.
14. Власов В.В. *О некоторых спектральных вопросах, возникающих в теории дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1998. – Т. 53. – Вып. 4. – С. 217–218.
15. Власов В.В. *Некоторые свойства сильных и экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364. – № 5. – С. 583–585.
16. Власов В.В. *О некоторых спектральных задачах, возникающих в теории функционально-дифференциальных уравнений* // Тр. международн. конф., посвящ. 75-летию Л.Д. Кудрявцева. – 1998. – Т. 2. – С. 59–64.
17. Власов В.В. *Об асимптотическом поведении решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве* // УМН. – Т. 51. – Вып. 5. – С. 220–221.
18. Lunel S.V., Yakubovich D.V. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations* // Int. J. Equat. and Oper. Theory. – 1997. – V. 27. – P. 347–378.
19. Delfour M.C., Manitius A. *The structural operator F and its role in the theory of retarded systems.* Part II // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V. 74. – P. 359–381.
20. Lunel S.V. *Series expansions and small solutions for Volterra equations of convolution type* // J. Different. Equat. – 1990. – V. 85. – № 1. – P. 17–53.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила 30.04.1999