И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 517.968:519.6

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НАИВЫСШЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение

В различных разделах математики и ее приложений широко применяются квадратурные формулы *наивысшей алгебраической степени точности* (НАСТ). Первая из таких формул впервые была построена и исследована Гауссом для единичной весовой функции и стандартного сегмента. Впоследствии квадратурным формулам НАСТ посвящено огромное количество работ (см., напр., [1]–[5] и библиографию в них).

В последние десятилетия стали применяться также квадратурные формулы *наивысшей тригонометрической степени точности* (НТСТ); первые результаты в этой области приведены по-видимому в работах В.И. Крылова и И.П. Мысовских (см., напр., в [1], [3]). Однако в отличие от квадратурных формул НАСТ, исследованию формул НТСТ (эти случаи приходится различать по причинам принципиального характера) посвящено лишь небольшое число работ, причем в основном лишь иллюстративного характера. Цель данной работы — в определенной степени восполнить указанный пробел. В ней устанавливаются аппроксимативные и структурные свойства квадратурных формул НТСТ. При этом получен также следующий *неожиданный* результат: ставшие уже классическими хорошо известные квадратурные формулы Эрмита, Гаусса с весом Чебышева второго рода, а также формула Кленшоу–Куртиса являются частными случаями квадратурной формулы НТСТ при соответствующем выборе ее параметров. Вторая часть работы посвящена применениям таких формул в численном анализе интегральных уравнений Фредгольма с периодическими коэффициентами, при этом основное внимание уделено теоретико-функциональному обоснованию метода механических квадратур, основанного на квадратурных формулах НТСТ.

1. Структурные и аппроксимативные свойства квадратурных формул НТСТ

1.1. *Квадратурные формулы НТСТ. Структурные свойства.* Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|\varphi\|_{C_{2\pi}} = \max_{\theta} |\varphi(\theta)| = \max_{a\le\theta\le a+2\pi} |\varphi(\theta)|, \quad \varphi \in C_{2\pi}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Через $\mathbb{H}_n^T \subset C_{2\pi}$ будем обозначать множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n, где $n+1 \in \mathbb{N}$. Аналогично, через $\mathbb{H}_n$ будем обозначать множество всех алгебраических многочленов степени не выше n, а через $C = C[-1,1]$ — пространство всех непрерывных на сегменте $[-1,1]$ функций с обычной нормой

$$\|f(x)\|_C = \max_{-1\le x\le 1} |f(x)|, \quad f \in C[-1,1].$$

В пространстве $C_{2\pi}$ рассмотрим квадратурную формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta=\sum_{k=1}^{N}A_k\varphi(\theta_k)+R_N^T(\varphi),\quad \varphi\in C_{2\pi},\quad N\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

где $A_k=A_{k,N}$ — коэффициенты, $\theta_k=\theta_{k,N}$ — попарно неэквивалентные узлы, а $R_N^T(\varphi)$ — остаточный член.

Целое неотрицательное число m называется тригонометрической степенью точности квадратурной формулы (1), если она точна для любого тригонометрического полинома $\varphi\in\mathbb{H}_m^T$ и существует хотя бы один полином $\psi\in\mathbb{H}_{m+1}^T$ такой, что $R_N^T(\psi)\neq 0$.

Ясно, что $m=m(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_N;A_1,A_2,\dots,A_N)$, т. е. число m является функционалом от формулы (1). Поэтому число

$$m_0=\sup_{\substack{\theta_1,\dots,\theta_N\in[a,a+2\pi)\\ A_1,\dots,A_N\in\mathbb{R}}} m(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_N;A_1,A_2,\dots,A_N)$$

будем называть *НТСТ* квадратурных формул вида (1), а если $m(\theta_1^\circ,\theta_2^\circ,\dots,\theta_N^\circ;A_1^\circ,A_2^\circ,\dots,A_N^\circ)=m_0$, то формулу (1) с узлами $\theta_k=\theta_k^\circ$ и коэффициентами $A_k=A_k^\circ, k=\overline{1,N}$, — квадратурной формулой НТСТ.

Следуя ([3], гл. 3, § 3), методом от противного доказывается следующая

Теорема 1. *Ни при каком способе выбора узлов и коэффициентов формула* (1) *не может быть точной на множестве полиномов* $\mathbb{H}_N^T$*, следовательно,*

$$0\le m_0\le N-1,\quad N\in\mathbb{N}.$$

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{2k\pi}{N}+\frac{\omega}{N}\right)+R_N^T(\varphi),\quad \varphi\in C_{2\pi},\quad \omega\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где ω — произвольное вещественное число.

Теорема 2. *Квадратурная формула* (2) *точна для любого полинома из* $\mathbb{H}_{N-1}^T$*. Кроме того, она точна для полиномов вида* $e^{\pm il\theta}=\cos l\theta\pm i\sin l\theta$ *при любых* $l\in\mathbb{N}$*, удовлетворяющих неравенствам*

$$Nr+1\le l\le N(r+1)-1,$$

где r *— произвольное натуральное число.*

Доказательство первой части теоремы проведем, следуя ([3], гл. 3, § 3). При $\varphi(\theta)=1$ имеем

$$R_N^T(1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}1=0.$$

Для функций $\varphi(\theta)=e^{il\theta}, l=\pm1,\dots,\pm(N-1)$, находим

$$R_N^T(e^{il\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{il\theta}d\theta-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{il\theta_k^\circ}=-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{il\theta_k^\circ}=0,\quad \theta_k^\circ=\frac{2k\pi}{N}+\frac{\omega}{N}.$$

Для доказательства второй части теоремы положим $l=Nr+\rho$, где $r\in\mathbb{N}$, а $\rho=1,2,\dots,N-1$. Тогда при $\varphi(\theta)=e^{\pm il\theta}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\pm il\theta}d\theta=0.$$

С другой стороны, в изучаемом случае квадратурная сумма из (2) принимает вид

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi(\theta_k^\circ)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{\pm il\left(\frac{2k\pi}{N}+\frac{\omega}{N}\right)}=\frac{e^{\pm\frac{il\omega}{N}}}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{\pm il\frac{2k\pi}{N}}=0,$$

где при выводе последнего равенства использовано первое утверждение доказываемой теоремы. □

Из теорем 1 и 2 следует, что квадратурная формула (2) является формулой НТСТ.

Следует отметить, что, в отличие от квадратурной формулы НАСТ, формула НТСТ не является единственной, точнее, существует однопараметрическое семейство квадратурных формул НТСТ (2). Выбирая параметр $\omega\in\mathbb{R}$ (и $N\in\mathbb{N}$) соответствующим образом, из (2) можно найти квадратурные формулы, обладающие нужными нам определенными свойствами. Кроме того (см. [2], а также ниже), справедливы следующие утверждения.

1°. При $N=2n$ формула (2) точна для полиномов вида

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)+A\sin(N\theta+\omega);\quad a_i,b_r,A=\mathrm{const}\,.$$

2°. При $N=2n$, $\omega=-2\pi$ квадратурная формула (2) точна для полиномов вида

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)+b_N\sin N\theta.$$

3°. При $N=2n,\omega=-\pi$ квадратурная формула (2) точна для полиномов вида

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)+a_N\cos N\theta.$$

1.2. *Аппроксимативные свойства квадратурных формул НТСТ.* В следующих двух теоремах приводятся аппроксимативные свойства квадратурной формулы НТСТ (2).

Теорема 3. *Квадратурная формула* (2) *сходится для любой* 2π*-периодической функции* $\varphi(\theta)$, *интегрируемой по Риману на любом промежутке длины* 2π; *если же* $\varphi(\theta)\in C_{2\pi}$, *то для нее справедлива оценка*

$$|R_N^T(\varphi)|\le 2E_{N-1}^T(\varphi),\quad \varphi\in C_{2\pi},\quad N\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

где $E_{N-1}^T(\varphi)=\rho(\varphi,\mathbb{H}_{N-1}^T)$ *— наилучшее равномерное приближение функции* $\varphi\in C_{2\pi}$ *всевозможными тригонометрическими полиномами порядка не выше* $N-1$, *а* $R_N^T(\varphi)$ *— остаток формулы* (2).

Следствие. Пусть $N=2n+2$ и $\varphi(\theta)=\widetilde{\varphi}(\theta)\sin^2\theta$, где $\widetilde{\varphi}\in C_{2\pi}$. Тогда квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{\varphi}(\theta)\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{2n+2}\sum_{k=1}^{2n+2}\widetilde{\varphi}(\theta_k^\circ)\sin^2\theta_k^\circ+R_{2n+2}^T(\varphi), \tag{4}$$

$$\theta_k^\circ=\alpha+(k-1)\frac{\pi}{n+1}\equiv\frac{k\pi}{n+1}+\frac{\omega}{2n+2},$$

точна для любого тригонометрического полинома порядка не выше $2n+1$. Для ее остатка справедлива следующая оценка:

$$|R_{2n+2}^T(\varphi)|\le\min\{2E_{2n+1}^T(\varphi);E_{2n-1}^T(\widetilde{\varphi})\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна в силу свойств интеграла Римана. Обозначим через $Q_{N-1}(\theta)$ тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения из $\mathbb{H}^T_{N-1}$ для функции $\varphi(\theta)\in C_{2\pi}$. Тогда в силу теоремы 2 имеем

$$|R^T_N(\varphi)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{2k\pi}{N}+\frac{\omega}{N}\right)\right| \le$$
$$\le \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi(\theta)-Q_{N-1}(\theta)]d\theta\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\varphi(\theta^\circ_k)-Q_{N-1}(\theta^\circ_k)]\right| \le$$
$$\le \|\varphi(\theta)-Q_{N-1}(\theta)\|_{C_{2\pi}} + \max_{1\le k\le N}|\varphi(\theta^\circ_k)-Q_{N-1}(\theta^\circ_k)| \le 2\|\varphi(\theta)-Q_{N-1}(\theta)\|_{C_{2\pi}} = 2E^T_{N-1}(\varphi),$$

где

$$\theta^\circ_k = \frac{2k\pi}{N}+\frac{\omega}{N} \equiv (k-1)\frac{2\pi}{N}+\alpha.$$

Оценка (3) доказана, докажем следствие. В силу теоремы 2 справедлива оценка

$$|R^T_{2n+2}(\varphi)| \le 2E^T_{2n+1}(\varphi), \quad n\in\mathbb{N}, \quad \varphi\in C_{2\pi}.$$

Покажем, что в тех же условиях

$$|R^T_{2n+2}(\varphi)| \le E^T_{2n-1}(\widetilde{\varphi}), \quad n\in\mathbb{N}, \quad \widetilde{\varphi}\in C_{2\pi}.$$

Тогда из двух последних неравенств будет следовать требуемое утверждение.

Обозначим через $\widetilde{Q}_{2n-1}(\theta)\in\mathbb{H}^T_{2n-1}$ полином наилучшего равномерного приближения функции $\widetilde{\varphi}(\theta)\in C_{2\pi}$. Тогда $\widetilde{Q}_{2n-1}(\theta)\sin^2\theta\in\mathbb{H}^T_{2n+1}$ и поэтому в силу теоремы 3 получаем

$$|R^T_{2n+2}(\varphi)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta - \frac{1}{2n+2}\sum_{k=1}^{2n+2}\varphi(\theta^\circ_k)\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta|\widetilde{\varphi}(\theta)-\widetilde{Q}_{2n-1}(\theta)|d\theta + \frac{1}{2n+2}\sum_{k=1}^{2n+2}\sin^2\theta^\circ_k|\widetilde{\varphi}(\theta^\circ_k)-\widetilde{Q}_{2n-1}(\theta^\circ_k)| \le$$
$$\le \|\widetilde{\varphi}(\theta)-\widetilde{Q}_{2n-1}(\theta)\|_{C_{2\pi}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta + \max_{1\le k\le 2n+2}|\widetilde{\varphi}(\theta^\circ_k)-\widetilde{Q}_{2n-1}(\theta^\circ_k)|\,\frac{1}{2n+2}\sum_{k=1}^{2n+2}\sin^2\theta^\circ_k \le$$
$$\le E^T_{2n-1}(\widetilde{\varphi})\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2n+2}\sum_{k=1}^{2n+2}\sin^2\theta^\circ_k\right\} = E^T_{2n-1}(\widetilde{\varphi})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = E^T_{2n-1}(\widetilde{\varphi}),$$

где

$$\theta^\circ_k = \frac{2k\pi}{2n+2}+\frac{\omega}{2n+2} = \frac{k\pi}{n+1}+\frac{\omega}{2n+2}. \quad \square$$

Отметим, что в силу хорошо развитых прямых теорем теории приближения функций (см., напр., [4], [6], [7] и библиографию в них) теорема 3 является весьма общей и удобной для применений. В частности, из нее и из обобщений теорем Джексона (напр., [4], [6], [7]) следует

Теорема 4. *Справедливы утверждения*[1]

а) *если* $\varphi\in W^rH^\omega$, *где* $r+1\in\mathbb{N}$, *а* $\omega=\omega(\delta)$ — *данный модуль непрерывности с шагом* $\delta\in(0,\pi]$, *то*

$$|R^T_N(\varphi)| \le \frac{6}{N^r}\omega\left(\varphi^{(r)};\frac{1}{N}\right) \le \frac{6}{N^r}\omega\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $\omega(\psi;\delta)$ — *модуль непрерывности функции* $\psi(\theta)\in C_{2\pi}$ *с шагом* $\delta>0$;

[1]Здесь и далее W^rH^ω и W^rM — хорошо известные в теории приближений стандартные классы непрерывных 2π-периодических функций.

б) *если* $\varphi \in W^r M$ $(r \in \mathbb{N},\ M = \mathrm{const})$, *то*

$$|R_N^T(\varphi)| \le \pi \frac{M}{N^r}.$$

Приведем еще один результат относительно квадратурных формул (1) и (2).

Теорема 5. *При* $N \to \infty$ *справедливы соотношения слабой эквивалентности*

$$V_N(W^r H^\omega) \equiv \inf_{\substack{\theta_1,\dots,\theta_N \in [a,a+2\pi)\\ A_1,\dots,A_N \in \mathbb{R}}} \sup_{\varphi \in W^r H^\omega} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta - \sum_{k=1}^N A_k \varphi(\theta_k) \right| \asymp$$

$$\asymp \sup_{\varphi \in W^r H^\omega} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi\left(\frac{2k\pi}{N} + \frac{\omega}{N}\right) \right| \asymp \frac{1}{N^r}\omega\left(\frac{1}{N}\right),$$

и квадратурная формула НТСТ (2) *является оптимальной хотя бы по порядку в классе функций* $W^r H^\omega$.

Это важное утверждение следует, например, из приведенных выше теорем и хорошо известных результатов по оптимизации квадратурных формул, изложенных в монографии [5] С.М. Никольского с добавлениями Н.П. Корнейчука.

1.3. *Частные случаи квадратурных формул НТСТ.* В этом пункте докажем, что некоторые из хорошо известных квадратурных формул алгебраической степени точности являются частными случаями квадратурной формулы НТСТ (2).

1.3.1. Квадратурная формула Эрмита есть частный случай квадратурной формулы НТСТ.

Для доказательства в (2) положим

$$\varphi(-\theta) = \varphi(\theta) \in C_{2\pi} \quad \text{и} \quad N = 2n, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n},$$

т. е. рассмотрим частный случай. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \varphi(\theta_k) + R_{2n}^T(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{k=-n+1}^{n} \varphi(\theta_k) + R_{2n}^T(\varphi) = \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi(\theta_k) + \sum_{k=-n+1}^{0} \varphi(\theta_k) \right\} + R_{2n}^T(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\theta_k) + R_{2n}^T(\varphi), \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = \overline{1, 2n},$$

т. к. в силу периодичности и четности функции $\varphi(\theta)$ имеем

$$\sum_{k=-n+1}^{0} \varphi(\theta_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\theta_{-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{-2k-1}{2n}\pi\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$

Поэтому в изучаемом случае формула (2) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_{2n}^T(\varphi). \tag{2'}$$

В (2′) положим

$$x = \cos\theta \in [-1, 1], \quad \theta = \arccos x \in [0, \pi], \quad x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi,$$
$$\varphi(\theta) = \varphi(\arccos x) = f(x), \quad f(x) = f(\cos\theta) \equiv \varphi(\theta).$$

Тогда формула ($2'$), а следовательно, и формула (2) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos \frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n(f), \quad f \in C[-1,1], \tag{5}$$

т. е. получили квадратурную формулу Эрмита, где

$$R_n(f) = \pi R_{2n}^T(\varphi), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(-\theta) = \varphi(\theta) \in C_{2\pi}. \tag{6}$$

В силу (2), ($2'$), (6) и теоремы 3 для остаточного члена квадратурной формулы Эрмита (5) имеем

$$|R_n(f)| = \pi |R_{2n}^T(\varphi)| \le 2\pi E_{2n-1}^T(\varphi) = 2\pi E_{2n-1}(f), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{7}$$

здесь $E_m(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x) \in C[-1,1]$ алгебраическими многочленами степени не выше m, где $m+1 \in \mathbb{N}$.

Заметим, что при доказательстве (7) существенно использована известная связь (напр., [4]) между наилучшими равномерными приближениями индуцированных функций в алгебраическом и тригонометрическом случаях.

Таким образом, квадратурная формула Эрмита (5) является частным случаем формулы НТСТ (2) и для ее остаточного члена $R_n(f)$ справедлива оценка

$$|R_n(f)| \le 2\pi E_{2n-1}(f), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in C[-1,1].$$

Поскольку $E_{2n-1}(f) = 0$ для любого $f \in \mathbb{H}_{2n-1}$ и $E_{2n-1}(x^{2n}) = \frac{1}{2^{2n-1}} \ne 0$, то формула Эрмита имеет алгебраическую степень точности, равную $2n-1$, что хорошо согласуется с известными результатами (напр., [1]–[4]) по квадратурным формулам типа Гаусса. Кроме того, из второго утверждения теоремы 3 следует, что квадратурная формула Эрмита (5) точна также для многочленов Чебышева I рода вида

$$T_l(t) = \cos l \arccos t, \quad l = 2nr + \rho, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \rho = \overline{1, 2n-1}.$$

1.3.2. *Квадратурная формула типа Гаусса с чебышевским весом второго рода есть частный случай квадратурной формулы НТСТ.*

В (2) и (4) рассмотрим следующий частный случай:

$$N = 2n+2, \quad \alpha = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{n+1}, \quad \varphi(\theta) = \widetilde{\varphi}(\theta) \sin^2 \theta, \tag{8}$$

где $\widetilde{\varphi}(-\theta) = \widetilde{\varphi}(\theta) \in C_{2\pi}$. Тогда

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1, 2n+2}, \tag{9}$$

и формулы (2) и (4) принимают вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \widetilde{\varphi}(\theta) \sin^2 \theta\, d\theta = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\theta_k) + R_{2n+2}^T(\varphi), \tag{$2''$}$$

где в силу четности и периодичности функции $\widetilde{\varphi}(\theta)$ имеем

$$\frac{1}{2n+2} \sum_{k=1}^{2n+2} \sin^2 \theta_k \widetilde{\varphi}(\theta_k) = \frac{1}{2n+2} \Big\{ \sum_{k=0;k=n+1} + \sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \Big\} \varphi(\theta_k) =$$
$$= \frac{1}{2n+2} \left(\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=-n}^{-1} \right) \varphi(\theta_k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\theta_k). \tag{10}$$

Из (8)–(10) и ($2''$) находим

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\widetilde{\varphi}(\theta)d\theta = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}f(x)dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^n (1-x_k^2)f(x_k) + R_n(f), \tag{11}$$

где

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k=\overline{1,n}; \quad f(x)\equiv\widetilde{\varphi}(\theta), \quad R_n(f) = \pi R^T_{2n+2}(\varphi). \tag{12}$$

Таким образом, квадратурная формула типа Гаусса (11)–(12) является частным случаем формулы (2), а для ее остатка в силу следствия теоремы 3 и соотношений (10)–(12) справедливы оценки

$$|R_n(f)| = |\pi R^T_{2n+2}(\varphi)| \le \pi\min\{2E^T_{2n+2}(\varphi); E^T_{2n-1}(\widetilde{\varphi})\} \le \pi E^T_{2n-1}(\widetilde{\varphi}) = \pi E_{2n-1}(f). \tag{13}$$

Из (13) следует, что формула (11)–(12) точна для любого $f\in\mathbb{H}_{2n-1}$, что хорошо согласуется с известными результатами (напр., [1]–[4]). Кроме того, из второго утверждения теоремы 3 следует, что квадратурная формула Гаусса (11)–(12) точна также для многочленов Чебышева II рода вида

$$U_l(t) = \frac{\cos{(l+1)\arccos t}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1\le t\le 1, \quad l=2nr+\rho, \quad r\in\mathbb{N}, \quad \rho=\overline{1,2n-1}.$$

1.3.3. Квадратурная формула Кленшоу–Куртиса есть частный случай квадратурной формулы НТСТ.

В (2) рассмотрим следующий частный случай:

$$N=2n, \quad \alpha=\frac{2\pi}{N}=\frac{\pi}{n} \quad \text{и} \quad \varphi(-\theta)=\varphi(\theta)\in C_{2\pi}. \tag{14}$$

Тогда формула (2) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right) + R^T_{2n}(\varphi), \quad \theta_k=\frac{k\pi}{n}, \tag{$2'''$}$$

где с учетом четности и периодичности функции $\varphi(\theta)$ имеем

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=-n+1}^{n}\varphi(\theta_k) = \frac{\varphi(\theta_0)+\varphi(\theta_n)}{2n} + \frac{1}{2n}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} + \sum_{k=-n+1}^{-1}\right\}\varphi(\theta_k) =$$

$$= \frac{\varphi(\theta_0)+\varphi(\theta_n)}{2n} + \frac{1}{2n}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\theta_k) + \sum_{k=1}^{n-1}\varphi(-\theta_k)\right\} = \frac{\varphi(0)+\varphi(\pi)}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Поэтому формула ($2'''$) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}{}''\,\varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right) + R^T_{2n}(\varphi), \tag{15}$$

где два штриха у знака суммы означают, что ее слагаемые при $k=0$ и $k=n$ следует разделить на коэффициент 2. Отсюда, как и в пп. 1.3.1 и 1.3.2, находим

$$\int_{-1}^1\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}{}''\, f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) + R_{n+1}(f), \tag{16}$$

где $f(x)=\varphi(\cos\theta)$, $R_{n+1}(f)=\pi R^T_{2n}(\varphi)$. Поэтому с учетом теоремы 3 и известного соотношения $E_m(f)=E^T_m(\varphi)$, $\varphi(\cos\theta)=f(x)$, получаем

$$|R_{n+1}(f)| = \pi|R^T_{2n}(\varphi)| \le 2\pi E^T_{2n-1}(\varphi) = 2\pi E_{2n-1}(f), \quad f\in C[-1,1]. \tag{17}$$

Заметим, что формула (16) есть квадратурная формула Кленшоу–Куртиса (см., напр., [8]–[10]), а оценка (17) впервые получена другим способом в работе [10]. Кроме того, в силу (14)–(17) из второй части теоремы 3 следует, что квадратурная формула (16) точна также для многочленов Чебышева I рода

$$T_l(t) = \cos l \arccos t, \quad l = 2nr + \rho,$$

при всех $r \in \mathbb{N}$ и $\rho = \overline{1, 2n-1}$. Отметим, что это утверждение ранее получено другим способом в [10].

2. Применения квадратурных формул НТСТ к интегральным уравнениям Фредгольма

Известно, что одним из наиболее эффективных методов приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма является метод механических квадратур (м. м. к.). Различным вычислительным схемам этого метода и их теоретическому обоснованию посвящено значительное число работ. Ниже, следуя нашим работам [11]–[18], приводим теоретическое обоснование м. м. к., основанного на исследованных в п. 1 формулах НТСТ. Под теоретическим обоснованием, следуя [19], [15], понимается следующий круг задач:

а) доказательство однозначной разрешимости аппроксимирующих уравнений,

б) доказательство сходимости м. м. к. и установление скорости сходимости,

в) установление оценки погрешности м. м. к. в зависимости от структурных свойств исходных данных,

г) исследование устойчивости и обусловленности м. м. к.

2.1. *Вычислительная схема м. м. к.* Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Kx \equiv x(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t,s)x(s)ds = y(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{18}$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ — известные непрерывные 2π–периодические по каждой из переменных функции, а $x(t)$ — искомая функция.

В случае периодических коэффициентов в основу м. м. к. наиболее удобно положить исследованные в п. 1 квадратурные формулы НТСТ[1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) + R_N(f), \quad f \in C_{2\pi}, \quad t_k = \frac{2k\pi}{N} + \frac{\omega}{N}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Заменив интеграл в (18) по формуле (19) и отбросив соответствующий остаточный член, для нахождения приближенных значений искомой функции в узлах квадратурной формулы приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$c_j + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} h(t_j, t_k)c_k = y(t_j), \quad t_j = \frac{2j\pi}{N} + \frac{\omega}{N}, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Обозначим через $c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{N-1}^*$ решение СЛАУ (20). Тогда за приближенное решение $x_n^*(t)$ исходного уравнения (18) будем принимать [11]–[18] тригонометрический полином порядка не выше $n = [\![N/2]\!]$ [2], принимающий в узлах t_k значения c_k^* $(k = \overline{0, N-1})$. Известно, что в случае

[1]Поскольку в этой части работы рассматриваются лишь тригонометрические приближения, значки "T" у обозначений $R_N^T(f), E_m^T(f)$ и т. п. опускаются.

[2]Через $[\![d]\!]$ обозначается целая часть числа $d \geq 0$.

нечетного числа узлов такой полином определяется единственным образом и имеет вид

$$x_n^*(t) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} c_k^* D_n(t - t_k),\ t_k = \frac{2k\pi}{N} + \frac{\omega}{N},\ N = 2n+1, \tag{21а}$$

где $D_n(\varphi)$ — обычное ядро Дирихле порядка n. В случае же четного числа узлов существует, как известно, целое семейство полиномов порядка n, обладающих требуемым свойством. Из этого семейства выделим тот полином [20], [11], [13], [14], который имеет минимальную норму в L_2, и примем его за приближенное решение уравнения (18). Такой полином существует, единственен и имеет вид

$$x_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} c_k^* \overline{D}_n(t - t_k),\ t_k = \frac{2k\pi}{N} + \frac{\omega}{N},\ N = 2n, \tag{21б}$$

где $\overline{D}_n(\varphi)$ — так называемое модифицированное ядро Дирихле порядка n.

Для обоснования вычислительной схемы (18)–(21) нам понадобится ряд вспомогательных предложений, часть из которых приводятся в следующем пункте.

2.2. *Вспомогательные результаты.* Пусть $X = L_2 = L_2(0, 2\pi)$ — пространство Лебега с нормой

$$\|x\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \equiv \|x\|_2, \quad x \in L_2.$$

Обозначим через $P_n x = P_n(x; t)$ тригонометрический интерполяционный полином для функции $x \in C_{2\pi}$, образованный по правилу

$$P_n(x; t) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) \Delta_n(t - t_k), \quad t_k = \frac{2k\pi}{N} + \frac{\omega}{N}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

где $\Delta_n(\varphi) = \{D_n(\varphi)$ при $N = 2n+1$; $\overline{D}_n(\varphi)$ при $N = 2n\}$.

Лемма 1. *Для любых $N = 1, 2, \ldots$ справедливы соотношения*

$$\|P_n\|_{L_2 \to L_2} = \infty, \quad \|P_n\|_{C_{2\pi} \to L_2} = 1, \quad \|P_n\|_{C_{2\pi} \to C_{2\pi}} \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2N}{\pi}. \tag{23}$$

Лемма 2. *Для любой функции $x(t) \in C_{2\pi}$ справедлива оценка*

$$\|x - P_n x\|_2 \le 2E_m(x), \quad n = [\![N/2]\!], \quad m = [\![(N-1)/2]\!], \quad N \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Лемма 3. *Для любого полинома $x_n \in \mathbb{H}_n^T$ справедливы соотношения*

$$\|x_n\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_n(t_k)|^2 + \frac{N - 2n - 1}{2} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x_n(t_k) \right|^2, \quad N \in \mathbb{N}; \tag{25}$$

$$\|x_n\|_2^2 \le \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_n(t_k)|^2 \le 2\|x_n\|_2^2, \quad N = 2n. \tag{26}$$

Доказательства лемм 1–3 можно найти, например, в работах [13], [15].

Далее, пусть X — полное линейное нормированное пространство, а X_n — его произвольное конечномерное подпространство. Рассмотрим операторные уравнения

$$Kx = y \quad (x, y \in X) \quad \text{и} \quad K_n x_n = y_n \quad (x_n, y_n \in X_n),$$

где K и K_n — линейные операторы соответственно в X и X_n. Имеет место

Лемма 4 ([15]). *Пусть существует непрерывный оператор* K^{-1} *и*

$$\alpha_n = \|K - K_n\| \, \|K^{-1}\| < 1, \quad K - K_n : X_n \to X.$$

Тогда существует также непрерывный оператор

$$K_n^{-1} : X_n \to X_n, \quad \|K_n^{-1}\| \le \|K^{-1}\|(1-\alpha_n)^{-1},$$

и для решений $x^* = K^{-1}y$ *и* $x_n^* = K_n^{-1}y_n$ *справедливы оценки*

$$\|K\|^{-1}\|(y-y_n) + (K_n - K)x_n^*\| \le \|x^* - x_n^*\| \le (\|y-y_n\| + \alpha_n\|y\|)(1-\alpha_n)^{-1}\|K^{-1}\|.$$

Если же $K = E + H$, $K_n = E + H_n$, $y_n = P_n y$, *где* $P_n = P_n^2$ — *оператор проектирования* X *на* X_n, *то справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\| \le (1 + \|K_n^{-1}P_n H\|)\|x^* - P_n x^*\| + \|K_n^{-1}\| \, \|(H_n - P_n H)P_n x^*\|.$$

2.3. *Сходимость м. м. к. в среднем.* Обозначим через $P_n^t h = P_n^t h(t,s)$ и $P_n^s h = P_n^s h(t,s)$ тригонометрические интерполяционные полиномы порядка n для функции $h(t,s)$ по переменным t и s соответственно, построенные по аналогии с формулой (22).

В дальнейшем, как и в [13]–[15], существенную роль будут играть следующие получаемые из лемм 1, 2 соотношения:

$$\varepsilon_{1,N} = \sup_t \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(t,s) - P_n^s h(t,s)|^2 ds \right\}^{1/2} \le 2E_m^s(h),$$

$$\varepsilon_{2,N} = \sup_s \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(t,s) - P_n^t h(t,s)|^2 dt \right\}^{1/2} \le 2E_m^t(h),$$

$$\varepsilon_{3,N} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |y(t) - P_n y(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \le 2E_m(y),$$

где $n = [\![\frac{N}{2}]\!], m = [\![\frac{N-1}{2}]\!]$, $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 6. *Пусть интегральный оператор* K, *определяемый левой частью уравнения* (18), *имеет непрерывный обратный в пространстве* $X = L_2$. *Пусть, кроме того, ядро* $h(t,s)$ *таково, что*

$$\alpha_n = 2\{E_n^t(h) + E_n^s(h)\}\|K^{-1}\|_2 < 1 \qquad \text{при} \quad N = 2n+1, \tag{27}$$

$$\alpha_n = \{2E_n^t(h) + (1+\sqrt{2})E_n^s(h)\}\|K^{-1}\|_2 < 1 \quad \text{при} \quad N = 2n, \tag{28}$$

где $\|K^{-1}\|_2 = \|K^{-1}\|_{L_2 \to L_2}$.

Тогда СЛАУ (20) *также имеет единственное решение* $c_0^*, c_1^*, \ldots, c_{N-1}^*$ *и приближенные решения* (21) *сходятся по норме пространства* L_2 *к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения* (18) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\{E_m^t(h) + E_m^s(h) + E_m(y)\}, \quad n = \left[\!\!\left[\frac{N}{2}\right]\!\!\right], \quad m = \left[\!\!\left[\frac{N-1}{2}\right]\!\!\right], \tag{29}$$

причем погрешность может быть оценена неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \le \{\alpha_n \|y\|_2 + 2E_m(y)\}\|K^{-1}\|_2(1-\alpha_n)^{-1}. \tag{30}$$

Доказательство. Интегральное уравнение (18) будем рассматривать в пространстве $X = L_2$ как линейное операторное уравнение вида

$$Kx \equiv x + Hx = y,$$

где

$$z = Hx = H_0 hx, \quad z(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t,s)x(s)ds, \quad \|K\|_2 \le 1 + \|H\|_2 \le 1 + \max_{t,s}|h(t,s)|. \tag{31}$$

Обозначим через $X_n = \mathbb{H}_n^T$ множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше $n = [\![\frac{N}{2}]\!]$, а через P_n — оператор проектирования на подпространство X_n, определенный в п. 2.2. Тогда СЛАУ (20) можно рассматривать в пространстве X_n как линейное операторное уравнение вида

$$K_n x_n \equiv x_n + H_n x_n = P_n y (x_n, P_n y \in X_n),$$

где

$$z_n = H_n x_n = P_n^t H_0 P_n^s (h x_n), \quad z_n(t) = \frac{P_n^t}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n^s[h(t,s)x_n(s)]ds. \tag{32}$$

Теперь в силу (23), (24), (31) и (32) для любого $x_n \in X_n$ имеем

$$\|K_n x_n - K x_n\| = \|H_n x_n - H x_n\| \le \|H_n x_n - P_n H x_n\| + \|H x_n - P_n H x_n\| \le \\ \le 2E_m^t(h)\|x_n\| + \|H_n x_n - P_n H x_n\|. \tag{33}$$

При $N = 2n+1$ для второго слагаемого из правой части (33) в [13], [14] показано, что

$$\|H_n x_n - P_n H x_n\| \le 2E_n^s(h)\|x_n\|, \quad x_n \in X_n. \tag{34}$$

В случае $N = 2n$ для получения аналогичной оценки воспользуемся леммой 3. Тогда для упомянутого слагаемого имеем

$$\|H_n x_n - P_n H x_n\|_2 \le \|P_n H x_n - P_n \widetilde{H} x_n\|_2 + \|H_n x_n - \widetilde{H}_n x_n\|_2, \quad x_n \in X_n, \tag{35}$$

где

$$\widetilde{H} x_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{n-1}(t,s)x_n(s)ds,$$

$$\widetilde{H}_n x_n = \frac{P_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n^s(Q_{n-1}x_n)ds = P_n \widetilde{H} x_n = \frac{P_n}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Q_{n-1}(t,t_k)x_n(t_k), \tag{36}$$

а $Q_{n-1}(t,s)$ — тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения порядка не выше $n-1$ для непрерывной функции $h(t,s)$ по переменной s. Поэтому с помощью соотношений (25), (26), (35), (36) находим

$$\|P_n H x_n - P_n \widetilde{H} x_n\|_2 \le E_{n-1}^s(h)\|x_n\|_2,$$

$$\|H_n x_n - \widetilde{H}_n x_n\|_{L_2} \le \left\| \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[h(t,t_k) - Q_{n-1}(t,t_k)]x_n(t_k)\right\|_{C_{2\pi}} \le$$

$$\le E_{n-1}^s(h)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|x_n(t_k)| \le E_{n-1}^s(h)\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|x_n(t_k)|^2\right\}^{1/2} \le \sqrt{2}\,E_{n-1}^s(h)\|x_n\|_{L_2}.$$

Поэтому при $N = 2n$ для любых $x_n \in X_n$ имеем

$$\|H_n x_n - P_n H x_n\|_2 \le (1+\sqrt{2})E_{n-1}^s(h)\|x_n\|_2, \quad N = 2n. \tag{37}$$

Таким образом, в силу (33), (34) и (37) справедливы неравенства

$$\|K - K_n\|_{X_n \to X} \le 2\{E^t_n(h) + E^s_n(h)\} \quad \text{при} \quad N = 2n + 1, \tag{38}$$

$$\|K - K_n\|_{X_n \to X} \le 2\{E^t_{n-1}(h) + (1 + \sqrt{2})E^s_{n-1}(h)\} \quad \text{при} \quad N = 2n. \tag{39}$$

Из неравенств (38), (39), леммы 4 и ее следствия получаем требуемое утверждение.

2.4. *Сходимость м. м. к. в узлах как следствие сходимости в среднем.*

Теорема 7. *В условиях теоремы* 6 *м. м. к. сходится в узлах со скоростью*

$$\max_{1\le j\le N} |x^*(t_j) - c^*_j| = O\{E^t_m(h) + E^s_m(h) + E_m(y)\}, \quad m = \left[\!\!\left[\frac{N-1}{2}\right]\!\!\right], \tag{40}$$

причем

$$\max_{1\le j\le N} |x^*(t_j) - c^*_j| \le \|h\|_C \|x^* - x^*_n\|_{L_2} + 2E^s_n(h)\|x^*_n\|_{L_2} \quad \textit{при} \quad N = 2n + 1, \tag{41}$$

$$\max_{1\le j\le N} |x^*(t_j) - c^*_j| \le \|h\|_C \|x^* - x^*_n\|_{L_2} + (1 + \sqrt{2})E^s_{n-1}(h)\|x^*_n\|_{L_2} \quad \textit{при} \quad N = 2n, \tag{42}$$

где $\|h\|_C = \max\limits_{t,s} |h(t, s)|$, $\|x^*_n\|_{L_2} \le \|x^*\|_{L_2} + \|x^* - x^*_n\|_{L_2} \sim \|x^*\|_{L_2}$, $n \to \infty$.

Заметим, что основное утверждение теоремы с оценкой (40) следует из неравенств (41) и (42), причем неравенство (41) доказано в [14], а неравенство (42) доказывается по аналогии, но с использованием леммы 3.

2.5. *Равномерная оценка погрешности и ее следствие.* Из теоремы 7, как и в [14], выводится

Теорема 8. *В условиях теоремы* 6 *равномерно относительно* $t \in (-\infty, \infty)$ *справедлива оценка*

$$|x^*(t) - x^*_n(t)| \le \|P_n\| \{ \max_{1\le k\le N} |x^*(t_k) - c^*_k| + 2E_m(x^*)\}, \quad m = \left[\!\!\left[\frac{N-1}{2}\right]\!\!\right], \tag{43}$$

где

$$\|P_n\| = \|P_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \le \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2N}{\pi}, \quad n = \left[\!\!\left[\frac{N}{2}\right]\!\!\right],$$
$$E_m(x^*) \le E_m(y) + E^t_m(h)\|y\|_2 \|K^{-1}\|_2.$$

Если, кроме того, функции h *(по каждой из переменных) и* y *удовлетворяют условию Дини–Липшица, то м. м. к. сходится равномерно со скоростью*

$$\|x^* - x^*_n\|_{C_{2\pi}} = O\{E^t_n(h) + E^s_n(h) + E_n(y)\} \ln n. \tag{44}$$

2.6. *О скорости сходимости м. м. к.* С помощью доказанных выше теорем, в первую очередь оценок (27)–(30), (40)–(44), и прямых теорем конструктивной теории функций (напр., [4], [6], [7]) можно сделать следующий вывод: чем лучше структурные свойства коэффициентов уравнения (18), тем меньше, во-первых, номер $N = N_0$, начиная с которого СЛАУ (20) однозначно разрешима и, во-вторых, погрешность приближенного решения как в L_2 и в $C_{2\pi}$, так и в узлах. В частности, справедлива

Теорема 9. *Пусть функция* h *(по каждой из переменных) и* $y \in W^r H^\omega$, *где* $r + 1 \in \mathbb{N}$, *а* $\omega = \omega(\delta)$ *– данный модуль непрерывности с шагом* $\delta \in (0, \pi]$. *Если интегральное уравнение* (18) *однозначно разрешимо в L_2, то м. м. к. сходится в среднем, в узлах и равномерно со скоростями соответственно*

$$\text{а)} \qquad \|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O\Big\{\frac{1}{N^r}\omega\Big(\frac{1}{N}\Big)\Big\},$$

$$\text{б)} \qquad \max_{1\le k\le N} |x^*(t_k) - x_n^*(t_k)| = O\Big\{\frac{1}{N^r}\omega\Big(\frac{1}{N}\Big)\Big\},$$

$$\text{в)}^1 \qquad \|x^* - x_n^*\|_{C_{2\pi}} = O\Big\{\frac{\ln N}{N^r}\omega\Big(\frac{1}{N}\Big)\Big\}.$$

2.7. *Об устойчивости и обусловленности м. м. к.* Из теорем 6–9 и результатов ([15], гл. 1, § 5) выводится

Теорема 10. *Справедливы утверждения*

а) *если интегральное уравнение* (18) *хорошо обусловлено, то в условиях теорем* 6–9 *хорошо обусловленной является также аппроксимирующая его СЛАУ* (20);

б) *в условиях теорем* 6–9 *из устойчивости решения уравнения* (18) *следует устойчивость решений аппроксимирующих его СЛАУ* (20).

2.8. *Об оптимальности м. м. к.* Из приведенных теорем 3–9 и результатов ([15], гл. 4; [16]) по оптимизации квадратурных методов решения интегральных уравнений следует, что м. м. к. (18)–(21), основанный на квадратурной формуле НТСТ (2), является *оптимальным* в смысле любого из предложенных в [16] определений оптимальности квадратурных методов, в частности, он оптимален как среди всех квадратурных методов, так и среди всех прямых методов решения уравнения (18), использующих априори задаваемую информацию о функции $y(t)$ в N попарно неэквивалентных узлах и о ядре $h(t,s)$ в N попарно неэквивалентных узлах по каждой из переменных.

Литература

1. Крылов В.И. *Приближенное вычисление интегралов.* – М.: Наука, 1967. – 500 с.
2. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. *Справочная книга по численному интегрированию.* – М.: Физматгиз, 1966. – 372 с.
3. Мысовских И.П. *Лекции по методам вычислений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 344 с.
4. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
5. Никольский С.М. *Квадратурные формулы.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
6. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* – М.: Наука, 1965. – 407 с.
7. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
8. Clenshaw C.W., Curtis A.R. *A method for numerical integration in an automatic computer* // Numer. Math. – 1960. – Bd. 2. – S. 197–205.
9. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я. *Применение полиномов Чебышева в численном анализе.* – Рига: Зинатне, 1984. – 240 с.
10. Ермолаева Л.Б. *Об одной квадратурной формуле* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 3. – С. 25–28.
11. Габдулхаев Б.Г. *Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 3. – С. 515–517.
12. Габдулхаев Б.Г. *Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 2. – С. 260–263.

[1]Здесь (т. е. в $C_{2\pi}$) при $r = 0$ дополнительно предполагается,что $\omega(\delta)\ln\ \delta \to 0$ при $\delta \to +0$.

13. Габдулхаев Б.Г. *Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений* // Тр. Международн. конф. по конструктивной теории функций. Варна, 1970. – София: Изд-во Болг. АН, 1972. – С. 35–49.
14. Габдулхаев Б.Г. *К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 21–39.
15. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
16. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация квадратурных методов решения интегральных уравнений* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 271. – № 1. – С. 20–25.
17. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I *рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
18. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
19. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
20. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2. – М.: Мир, 1965. – 538 с.

Казанский государственный университет

Поступила 27.10.2006