ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.76

В.И. МАКЕЕВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В данной работе по аналогии с классами почти эрмитовых многообразий [1], [2] вводятся классы относительных почти эрмитовых многообразий, полученных из общего метрического пространства векторных элементов с относительной метрикой, и находятся признаки, характеризующие эти классы. Рассматриваемые многообразия, тензорные поля и объекты предполагаются дифференцируемыми класса C^∞.

1. Пусть M — вещественное n-мерное многообразие, TM — его касательное расслоение с инфинитезимальной связностью H, т. е. внутренней по терминологии Б.Н. Шапукова [3] связностью. Пусть V — вертикальное распределение и J — почти комплексная структура на TM, для которой $J(X^h) = X^v$, $J(X^v) = -X^h$, где $X^h \in H$, $X^v \in V$. Символом $\mathfrak{g}$ обозначим метрику общего метрического пространства векторных элементов $\mathfrak{g}_{n,y} = (M, \mathfrak{g})$, $y \in T_x$, $x \in M$, т. е. невырожденное симметрическое M-тензорное поле типа (0,2) на TM, компоненты которого по определению являются относительными веса w и однородными фиксированной степени k по слоевым координатам. Ее частным случаем является, например, метрика Моора [4]. Считаем, что риманова метрика $\mathfrak{G}$ на TM индуцирована положительно-определенной метрикой $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{G}(X^h, Y^h) = \mathfrak{G}(X^v, Y^v) = \mathfrak{g}(\tau_*(X), \tau_*(Y))$, $\mathfrak{G}(X^h, Y^v) = 0$, где $X = X^h + X^v$, $Y = Y^h + Y^v$, $\tau : TM \to M$. Так что $\mathfrak{G}$ — эрмитова метрика с относительными веса $W = \frac{1}{2}w$ компонентами.

Определение. Почти эрмитово многообразие $(TM, \mathfrak{G}, J)$ пространства $\mathfrak{g}_{n,y}$ будем называть относительным почти эрмитовым многообразием (веса $W = w/2$) или короче $A\mathfrak{H}$-многообразием.

Введем в рассмотрение также относительную связность без кручения с ковариантным дифференцированием ∇ как линейную связность на TM, для которой $\nabla\mathfrak{G} = 0$ при $2 + nw \neq 0$, $\nabla\mathfrak{G} = \mathfrak{G} \otimes \lambda$ при $2 + nw = 0$ и $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, где λ — поле ковектора рекуррентности на TM, а X, Y — элементы модуля $\mathfrak{X}(TM)$ векторных полей на TM.

2. В [1], [2] отмечены некоторые классы почти эрмитовых многообразий и характеризующие их признаки. Будем рассматривать аналогичные классы $A\mathfrak{H}$-многообразий. Заметим однако, что, например, для относительных (о.) почти келеровых многообразий фундаментальная 2-форма $\mathfrak{F}(X, Y) = \mathfrak{G}(X, JY)$ $A\mathfrak{H}$-многообразия, вообще говоря, не является точной ($d\mathfrak{F} \not\equiv 0$) в отличие от случая почти келеровых многообразий. Подобная ситуация имеет место и для локально конформно-келеровых структур [5]. Перечислим указанные классы $A\mathfrak{H}$-многообразий и их характеристики

(1) о. полуэрмитовы $(H\mathfrak{H}) : \mathfrak{N}(X, Y, Z) + \mathfrak{N}(Y, X, Z) = 0$;
(2) о. семиэрмитовы $(S\mathfrak{H}) : \mathfrak{N}(X, Y, JZ) + \mathfrak{N}(Y, Z, JX) + \mathfrak{N}(Z, X, JY) = 0$;
(3) о. почти семикелеровы $(AS\mathfrak{K}) : (\delta\mathfrak{F})(X) = \lambda(JX)$;
(4) о. квазикелеровы $(Q\mathfrak{K}) : (\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$;
(5) о. почти келеровы $(A\mathfrak{K}) : d\mathfrak{F} = (\lambda + \gamma W)\mathfrak{F}$ с 1-формой γ на TM такой, что $(\delta\mathfrak{F})(X) = \lambda(JX)$;
(6) о. приближенно келеровы $(N\mathfrak{K}) : (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0$;
(7) о. эрмитовы $(\mathfrak{H}) : N = 0$;

(8) о. семикелеровы $(S\mathfrak{K}) : (\delta\mathfrak{F})(X) = \lambda(JX)$, $N = 0$;

(9) о. келеровы $(\mathfrak{K}) : \nabla J = 0$,

где $\mathfrak{N}(X,Y,Z) = \mathfrak{G}(X, N(Y,Z))$, $N(X,Y) = [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] - [X,Y]$ — тензор Нейенхейса структуры J, δ — оператор кодифференцирования, d — оператор внешнего дифференцирования, $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(TM)$.

Пусть (TU, x^α, y^α) — карта расслоения TM с индуцированными координатами x^α, y^α в $TU = \tau^{-1}(U)$ (над координатной окрестностью U) и $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}(x,y)$ — компоненты $\mathfrak{g}$ в (TU, x^α, y^α) $(\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,n})$. Считаем, что

$$\mathfrak{g}_{\alpha\beta}(x,y) = \varphi^{k/2} g^{w/2} g_{\alpha\beta}(x,y),$$

где $\varphi = g_{\sigma\tau} y^\sigma y^\tau$, $g = \det(g_{\alpha\beta})$, а $g_{\alpha\beta}(x,y)$ суть (0)-однородные компоненты положительно определенной метрики Моора. Пусть Γ^α_ρ, $L^\alpha_{\beta\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(X_\rho g_{\beta\sigma} + X_\beta g_{\rho\sigma} - X_\sigma g_{\beta\rho})$ и $C^\alpha_{\beta\rho} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(g_{\beta\sigma\cdot\rho} + g_{\rho\sigma\cdot\beta} - g_{\beta\rho\cdot\sigma})$ — коэффициенты заданной канонической ([6]) связности L, для которой будем предполагать $\Gamma^\alpha_\rho \not\equiv y^\lambda L^\alpha_{\lambda\rho}$, где $\Gamma^\alpha_\rho(x,y)$ — компоненты объекта связности H, $g_{\beta\rho\cdot\sigma} = \partial g_{\beta\rho}/\partial y^\sigma$, $(g^{\alpha\sigma}) = (g_{\alpha\sigma})^{-1}$ и $X_\rho = \partial/\partial x^\rho - \Gamma^\alpha_\rho(x,y)\partial/\partial y^\alpha$. Пусть, далее,

$$R^\alpha_{\beta\rho} = X_\rho \Gamma^\alpha_\beta - X_\beta \Gamma^\alpha_\rho, \quad P^\alpha_{\beta\rho} = \Gamma^\alpha_{\beta\cdot\rho} - L^\alpha_{\rho\beta}.$$

Так что $R^\alpha_{\beta\rho}$, $P^\alpha_{\beta\rho}$ и $C^\alpha_{\beta\rho}$ — компоненты трех M-тензорных полей кручений связности L.

Теорема 1. *$A\mathfrak{H}$-многообразие является относительным полуэрмитовым* $\Longleftrightarrow$ $R_{\alpha\beta\rho} + R_{\beta\alpha\rho} = 0$, $F_{\alpha\beta\rho} + F_{\beta\alpha\rho} = 0$, *где* $F_{\alpha\beta\rho} = P_{\alpha\beta\rho} - P_{\alpha\rho\beta}$ $(R_{\alpha\beta\rho} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma_{\beta\rho})$, $(P_{\alpha\beta\rho} = g_{\alpha\sigma} P^\sigma_{\beta\rho})$.

Теорема 2. *$A\mathfrak{H}$-многообразие является относительным семиэрмитовым* $\Longleftrightarrow$ $R_{\alpha\beta\rho} + R_{\beta\rho\alpha} + R_{\rho\alpha\beta} = 0$, $Q_{\alpha\beta\rho} + Q_{\beta\rho\alpha} + Q_{\rho\alpha\beta} = 0$, *где* $Q_{\alpha\beta\rho} = P_{\alpha\beta\rho} - P_{\beta\alpha\rho}$.

Теорема 3. *$A\mathfrak{H}$-многообразие является относительным почти семикелеровым* $\Longleftrightarrow$

$$g^{\sigma\tau}(P_{\sigma\beta\tau} - P_{\beta\sigma\tau}) - 2(n-1)s_\beta = 0, \tag{1}$$

$$g^{\sigma\tau}(C_{\sigma\beta\tau} - C_{\beta\sigma\tau}) + 2(n-1)t_\beta = 0, \tag{2}$$

для которых

$$s_\beta = \left(\frac{k}{2+nw}\right)\frac{1}{2\varphi} X_\beta \varphi, \quad t_\beta = \left(\frac{k}{2+nw}\right)\frac{1}{2\varphi}\varphi_{\cdot\beta} \quad (2 + nw \neq 0);$$

$$s_\beta = \frac{1}{n}\left(l_\beta - \frac{1}{2g} X_\beta g\right), \qquad t_\beta = \frac{1}{n}\left(m_\beta - \frac{1}{2g} g_{\cdot\beta}\right) \quad (2 + nw = 0),$$

где $(2l_\beta, 2m_\beta) = (\gamma_\beta, \gamma_{n+\beta}) = (\gamma_j)$, $j = \overline{1,2n}$, *— координаты 1-формы γ в адаптированном (к H) базисе, а* $C_{\beta\sigma\tau} = g_{\beta\alpha} C^\alpha_{\sigma\tau}$.

Теорема 4. *$A\mathfrak{H}$-многообразие является относительным квазикелеровым* $\Longleftrightarrow$

$$R_{\alpha\beta\rho} + R_{\beta\rho\alpha} + R_{\rho\alpha\beta} = 0, \tag{3}$$

$$P_{\alpha\beta\rho} - P_{\beta\alpha\rho} + 2g_{\rho\beta} s_\alpha - 2g_{\rho\alpha} s_\beta = 0, \tag{4}$$

$$C_{\alpha\beta\rho} - C_{\beta\alpha\rho} - 2g_{\rho\beta} t_\alpha + 2g_{\rho\alpha} t_\beta = 0, \tag{5}$$

где s_β, t_β подчиняются соотношениям (1), (2).

Из теорем 2, 4 следует

Теорема 5. *Относительное квазикелерово многообразие $(TM, \mathfrak{G}, J)$ является относительным семиэрмитовым.*

Теорема 6. *$A\mathfrak{H}$-многообразие является относительным почти келеровым* $\Longleftrightarrow$ *имеют место* (3)–(5).

Из сравнения теорем 4, 6 вытекает

Теорема 7. *Класс относительных квазикелеровых многообразий* $(TM, \mathfrak{G}, J)$ *совпадает с классом относительных почти келеровых многообразий.*

Теорема 8. $A\mathfrak{H}$*-многообразие является относительным приближенно келеровым* $\Longleftrightarrow R_{\alpha\beta\rho} = 0$, $F_{\alpha\beta\rho} + F_{\beta\alpha\rho} = 0$ *и выполняются* (4), (5), *где* $F_{\alpha\beta\rho} = P_{\alpha\beta\rho} - P_{\alpha\rho\beta}$.

Теорема 9. $A\mathfrak{H}$*-многообразие является относительным эрмитовым* $\Longleftrightarrow$ $R_{\alpha\beta\rho} = 0$ *и* $P_{\alpha\beta\rho} = P_{\alpha\rho\beta}$.

Теорема 10. $A\mathfrak{H}$*-многообразие является относительным семикелеровым* $\Longleftrightarrow$ $R_{\alpha\beta\rho} = 0$, $P_{\alpha\beta\rho} = P_{\alpha\rho\beta}$ *и имеют место* (1), (2).

Теорема 11. $A\mathfrak{H}$*-многообразие является относительным келеровым многообразием* $\Longleftrightarrow$ $R_{\alpha\beta\rho} = 0$, $P_{\alpha\beta\rho} = P_{\alpha\rho\beta}$ *и выполняются* (4), (5).

Литература

1. Беклемишев Д.В. *Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1965. – С. 165–212.
2. Watson B. *Almost Hermitian submersions* // J. Different. Geom. – 1976. – V. 11. – № 1. – P. 147–165.
3. Шапуков Б.Н. *Связности на дифференцируемом расслоении* // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1980. – Вып. 12. – С. 97–110.
4. Moór A. *Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume* // Acta scient. math. – 1956. – T. 17. – № 1–2. – S. 85–120.
5. Кириченко В.Ф. *Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 3. – С. 354–363.
6. Miron R. *Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections* // J. Math. Kyoto Univ. – 1983. – V. 23. – № 2. – P. 219–224.

Пензенский государственный педагогический университет

Поступила 06.10.1998