ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 511.335

А.А. ЖУКОВА

ПРОБЛЕМА ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

В 1922 г. Харди и Литтлвуд [1], используя расширенную гипотезу Римана, нашли асимптотическую формулу для количества представлений числа в виде суммы простого и квадратов двух целых чисел. Среди математиков, внесших вклад в решение этой задачи, можно назвать Хооли [2] и Ю.В. Линника, который в 1961 г. ([3], гл. VII, с. 132–180) дисперсионным методом решил эту проблему. В [4] было найдено решение неопределенного аналога проблемы Харди-Литтлвуда. В [5] была получена асимптотика числа решений уравнения $n - x^2 - y^2 = a$, где $a \neq 0$ — любое фиксированное целое число, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x^2 + y^2 < N$, N — достаточно большое натуральное число, $n \in \mathbb{N}$, n имеет не более 6 простых делителей, и $p \geq N^{1/883}$, если $p|n$. Впоследствии в [6] было найдено число представлений натурального N в виде суммы числа, имеющего k простых делителей, и двух квадратов, $2 \leq k \leq (2-\varepsilon)\ln\ln N$ и $(2+\varepsilon)\ln\ln N \leq k \leq b\ln\ln N$.

В данной работе решены аналоги проблемы Харди–Литтлвуда с числами, имеющими k простых делителей из арифметических прогрессий по определенному модулю $d_0 \leq \ln^{C_0} N$, причем все $p > \ln^{B+1} N$.

Пусть $(l_i,\, d_0) = 1$, p_i — простые числа, $i = 1, \dots, k$, $\Omega(n)$ — число простых делителей числа n с учетом их кратности. Обозначим

$$E(t, l_1, \dots, l_k, d_0) = \{n : n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_k}^{\alpha_k},\ t \leq p_1 < \dots < p_k,$$
$$p_i \equiv l_i (\operatorname{mod} d_0),\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, k,\ \Omega(n) = k\},$$
$$l \equiv l_1 \dots l_k (\operatorname{mod} d_0),\quad \ln_2 x = \ln\ln x,\quad \ln_3 x = \ln\ln\ln x.$$

Суммы, где переменная удовлетворяет нескольким условиям, будем записывать по разному: либо серия условий внизу под знаком суммы, либо серия условий рядом со знаком суммы в квадратных скобках, т. е.

$$\sum_{\substack{A,\\ B}} = \sum \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть $\nu(N, E)$ — число представлений натурального числа N в виде суммы двух квадратов целых чисел и числа, принадлежащего $E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$, $t \geq \ln^{B+1} N$, $d_0 \leq \ln^{C_0} N$, $(d_0, N - l) = 1$, тогда*

$$\nu(N, E) = \pi D E(N d_0)\delta(d_0) \sum_{\substack{n < N,\\ n \in E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)}} 1 + O(N \ln^{-B+2} N + R'(N, t, k)),$$

где $D = \prod_{p>2}\big(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\big)$, $E(m) = \prod_{p|m}\big(1 - \frac{\chi_4(p)p}{p^2 - p + \chi_4(p)}\big)$, $\delta(d_0) = 1$, если $d_0 = 2^r d_0'$, $r \leq 1$, $(d_0', 2) = 1$, $\delta(d_0) = (1 + \chi_4(N - l))$, если $d_0 = 2^r d_0'$, $r \geq 2$, $(d_0', 2) = 1$, $R'(N, t, k) = 0$, если $t \geq \exp((\ln_2 10N)^{3+3\varepsilon})$ и $k > 6$, $R'(N, t, k) = \big(\frac{((6+6\varepsilon)\ln_3 20N)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{((6+6\varepsilon)\ln_3 20N)^{k-6}}{(k-6)!}\big)\frac{N}{\ln N}$ в остальных случаях, $\chi_4(a)$ — неглавный характер по модулю 4, ε, B, C_0 — произвольные положительные постоянные.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00070.

Теорема 2. *Пусть $\varrho(x,a,E)$ — число представлений целого a в виде разности числа $n \in E(t,l_1,\dots,l_k,d_0)$ и суммы двух квадратов, $t \geq \ln^{B+1} x$, $d_0 \leq \ln^{C_0} x$, $1 \leq |a| \leq x\ln^{-A} x$, $a \in \mathbb{Z}$, $(d_0, l-a) = 1$, A, B, C_0 — произвольные положительные постоянные, тогда*

$$\varrho(x,a,E) = \pi D E(ad_0)\delta(d_0) \sum_{\substack{n\leq x,\\ n\in E(t,l_1,\dots,l_k,d_0)}} 1 + O(x\ln^{-B+2} x + R'(x,t,k)),$$

где D, $E(m)$, $R'(x,t,k)$ определены так же, как в теореме 1.

Вспомогательные результаты

Лемма 1 ([7], следствие теоремы 2). *Пусть $t \geq \ln^{B+1} x$, $d_0 \leq \ln^{C_0} x$, $Q = \sqrt{x}\ln^{-A(B)} x$, тогда*

$$\sum_{\substack{d\leq Q,\\ (d,d_0)=1}} \max_{(a,d)=1} \max_{y\leq x} \Bigg| \sum_{\substack{n\leq y,\\ n\in E(t,l_1,\dots,l_k,d_0),\\ n\equiv a(\operatorname{mod} d)}} 1 - \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n\leq y,\\ n\in E(t,l_1,\dots,l_k,d_0)}} 1 \Bigg| \ll x\ln^{-B} x,$$

где B, C_0 — произвольные положительные постоянные, $A(B) = \min(3B+12, B+C_0+\frac{27}{8})$.

Лемма 2 ([8], лемма 3). *Если $f(n) \geq 0$ и $Q \leq x$, то*

$$\sum_{d\leq Q} \max_{(a,d)=1} \Bigg(\sum_{\substack{n\leq x,\\ n\equiv a(\operatorname{mod} d)}} f(n) + \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{n\leq x} f(n) \Bigg) \ll \sqrt{\sum_{n\leq x} f^2(n)}\, (\sqrt{x}\ln^{3/2} x + Q).$$

Лемма 3 ([6], лемма 3). *Пусть n — числа, у которых все простые делители не больше y. Тогда при $y \geq \ln x$*

$$\sum_{y_1<n\leq x} \frac{1}{n} \ll \exp\left(-\frac{\ln y_1}{\ln y}\right) \ln x.$$

Лемма 4 ([6], лемма 5). *Пусть $r(n)$ — число представлений n в виде суммы двух квадратов целых чисел, d — натуральное число, $d \leq \sqrt{x}$. Тогда*

$$\sum_{\substack{n\leq x,\\ n\equiv a(\operatorname{mod} d)}} r(n) = \pi\frac{x}{d} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right) \sum_{\delta|(a,d)} \left(\chi_4(\delta) + \chi_4\left(\frac{a}{\delta}\right)\lambda\left(\frac{d}{\delta}\right)\right) + O(\sqrt{x}\tau^2(d)),$$

где $\chi_4(n)$ — неглавный характер по модулю 4, $\tau(n)$ — число делителей n, $\lambda(n) = 1$, если n делится на 4, и нулю в противном случае.

Лемма 5 ([6], теорема 2). *Пусть d_1 — числа, все простые делители которых не больше z_1, или $d_1 = 1$, d_2 — числа, все простые делители которых больше z_1, или $d_2 = 1$,*

$$\alpha(m) = O(\ln^{\beta} 2m), \quad \sum_{n\leq x} |a_n|^4 = O(x\ln^{\beta} x),$$

$\gamma(d) = 1$, если $d \equiv b(\operatorname{mod} r)$, и $\gamma(d) = 0$ в противном случае. Будем писать $m \sim M$, $d_1 \sim V$, $n \sim N$, $d_2 \sim Q$, если $M < m \leq U_1 \leq 2M$, $V < d_1 \leq U_2 \leq 2V$, $Q < d_2 \leq U_3 \leq 2Q$, $N < n \leq U_4 \leq 2N$. Положим Δ равным

$$\sum_{\substack{d_1\sim V,\\ (d_1,a)=1}} \sum_{n\sim N} |a_n| \Bigg| \sum_{\substack{d_2\sim Q,\\ (d_2,an)=1}} \gamma(d_2) \Bigg(\sum_{\substack{m\sim M,\\ nm\equiv a(\operatorname{mod} d_1 d_2)}} \alpha(m) - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{m\sim M,\\ nm\equiv a(\operatorname{mod} d_1),\\ (m,d_2)=1}} \alpha(m) \Bigg) \Bigg|.$$

Предположим, что $MN \leq x$, $N \geq M \geq z_1 V$, $|a| \leq x$, $z_1 \leq x^{\varepsilon}$, $V \leq x^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Тогда, если $Q \leq \sqrt{N/(z_1 V)}$, то

$$\Delta \ll x z_1^{-\frac{1}{2}} \ln^{\alpha} x,$$

если $M \le x^{\frac{1}{3}-8\varepsilon}$, $\sqrt{N/(z_1V)} \le Q \le x^{\frac{2}{3}-14\varepsilon}M^{-1}$, *то*

$$\Delta \ll x\biggl(\exp\Bigl(-\frac{\varepsilon}{8}\frac{\ln x}{\ln z_1}\Bigr)\sqrt{V} + z_1^{-\frac{1}{2}}\biggr)\ln^{\alpha} x,$$

где $\alpha = 2^{18} + \beta$.

Обозначим

$$E_1(t,l_1,\ldots,l_k,d_0) = \{n : n = p_1\ldots p_k,\ t \le p_1 < \ldots < p_k,\ p_i \equiv l_i (\operatorname{mod} d_0),\ i=1,\ldots,k\},$$
$$E_1^*(t) = E_1^*(t,l_1,\ldots,l_k,d_0;z_1,z_2) = \{n : n = p_1\ldots p_k,\ t \le p_1 < \cdots < p_k,$$
$$p_i \equiv l_i (\operatorname{mod} d_0),\ i=1,\ldots,k;\ \exists p|n,\ p\in[z_1;z_2]\}.$$

Лемма 6. *Пусть* $z_1 = \exp((\ln_2 10x)^{3+3\varepsilon})$, $z_2 = \sqrt[7]{x}$, $d_0 \le \ln^{C_0} x$, $1 \le |a| \le x$, $a \in \mathbb{Z}$, $Q_1 = \sqrt{x}\ln^{-A} x$, $Q_2 = \sqrt{x}\ln^{A} x$, $\chi(d)$ *— характер Дирихле по произвольному фиксированному модулю, тогда*

$$\Biggl|\sum_{\substack{Q_1<d\le Q_2,\\ (d,ad_0)=1}} \chi(d)\Biggl(\sum_{\substack{E_1^*(z_1)\ni n\le x,\\ n\equiv a(\operatorname{mod} d)}} 1 - \frac{1}{\varphi(d)}\sum_{E_1^*(z_1)\ni n\le x} 1\Biggr)\Biggr| \ll x\ln^{-B} x,$$

где A, B, C_0 *— произвольные положительные постоянные.*

Доказательство. Оценку суммы, записанной в условии леммы, найдем, используя метод работы [6].

Представим d как произведение d_1 на d_2, где у d_1 все простые множители не превосходят $z = \exp((\ln_2 10x)^{1+\varepsilon})$ или $d_1 = 1$, у d_2 все простые делители больше z, или $d_2 = 1$. Будем оценивать ту часть суммы, где $d_1 \le y = \exp((\ln_2 10x)^{2+2\varepsilon})$, т. к. та часть суммы, в которой $d_1 > y$, согласно лемме 3 не превышает

$$\sum_{y<d_1\le Q_2}\ \sum_{Q_1<d_1d_2\le Q_2}\ \sum_{\substack{n\le x,\\ n\equiv a(\operatorname{mod} d_1d_2)}} 1 \ll x\ln^{-B} x.$$

Очевидно, оцениваемая сумма не превосходит

$$\sum\begin{bmatrix} d_1\le y\\ (d_1,ad_0)=1\end{bmatrix}\Biggl|\sum\begin{bmatrix} Q_1<d_1d_2\le Q_2\\ (d_2,ad_0)=1\end{bmatrix}\chi(d_2)\sum\begin{bmatrix} p\in[z_1,z_2]\\ p\equiv l_1(\operatorname{mod} d_0)\\ (p,d_2)=1\end{bmatrix}$$
$$\Biggl(\sum\begin{bmatrix} n\le x/p\\ n\in E_1(p,l_2,\ldots,l_k,d_0)\\ np\equiv a(\operatorname{mod} d_1d_2)\end{bmatrix}1 - \frac{1}{\varphi(d_2)}\sum\begin{bmatrix} n\le x/p\\ n\in E_1(p,l_2,\ldots,l_k,d_0)\\ np\equiv a(\operatorname{mod} d_1)\\ (n,d_2)=1\end{bmatrix}1\Biggr)\Biggr| +$$
$$+\sum\begin{bmatrix} d_2\le Q_2\\ (d_2,ad_0)=1\end{bmatrix}\frac{1}{\varphi(d_2)}\sum\begin{bmatrix} d_1\le y\\ Q_1<d_1d_2\le Q_2\\ (d_1,ad_0)=1\end{bmatrix}$$
$$\Biggl|\sum\begin{bmatrix} E_1^*(z_1)\ni n\le x\\ n\equiv a(\operatorname{mod} d_1)\\ (n,d_2)=1\end{bmatrix}1 - \frac{1}{\varphi(d_1)}\sum_{E_1^*(z_1)\ni n\le x}1\Biggr| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

где в $\sum_1$ n представлено в виде произведения p на n, p — наименьший простой делитель исходного n.

Займемся изучением $\sum_1$. Разобьем интервал $[z_1;z_2]$ изменения p на не более чем $I = O(\ln^{S+1} x)$ промежутков вида $(M_i;M_{i+1}]$, где $M_i = z_1(1+\ln^{-S} x)^i$. Тогда $\sum_1$ разобьется на I

сумм вида

$$\sum \begin{bmatrix} d_1 \le y \\ (d_1, ad_0) = 1 \end{bmatrix} \left| \sum \begin{bmatrix} Q_1 < d_1 d_2 \le Q_2 \\ (d_2, ad_0) = 1 \end{bmatrix} \chi(d_2) \sum \begin{bmatrix} p \in (M_i; M_{i+1}] \\ p \equiv l_1 (\operatorname{mod} d_0) \\ (p, d_2) = 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \left(\sum \begin{bmatrix} n \le x/p \\ n \in E_1(p, l_2, \dots, l_k, d_0) \\ np \equiv a (\operatorname{mod} d_1 d_2) \end{bmatrix} 1 - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum \begin{bmatrix} n \le x/p \\ n \in E_1(p, l_2, \dots, l_k, d_0) \\ np \equiv a (\operatorname{mod} d_1) \\ (n, d_2) = 1 \end{bmatrix} 1 \right) \right|.$$

Каждая из таких сумм, в том числе и последняя неполная, будет иметь оценку

$$\sum_{Q_1 < d \le Q_2} \sum_{p \in (M_i; M_{i+1}]} \left(\frac{x}{pd} + 1 \right) \ll x \ln^{-S+1} x.$$

Ошибка, возникающая при замене условия $n \in E_1(p, l_2, \dots, l_k, d_0)$ на условие $n \in E_1(M_{i+1}, l_2, \dots, l_k, d_0)$ в $\sum_1$, оценивается с помощью леммы 2 и не превосходит $(\sum_{n \le 2x} f^2(n))^{1/2} (\sqrt{x} \ln^{3/2} x + Q_2)$, где $f(n) = 1$, если n имеет не менее двух простых делителей на промежутке $(M_i; M_{i+1}]$ при $i = 1, 2, \dots, I$, $f(n) = 0$ в противном случае.

Отдельно найдем сумму по n. Имеем

$$\sum_{n \le 2x} f^2(n) \ll x \sum_{i=1}^{I} \sum_{p \in (M_i; M_{i+1}]} \frac{1}{p} \sum_{q \in (M_i; M_{i+1}]} \frac{1}{q} \ll x \ln^{-S+1} x.$$

Итак, при замене множества $E_1(p, l_2, \dots, l_k, d_0)$ на множество $E_1(M_{i+1}, l_2, \dots, l_k, d_0)$ ошибка составит $O(x \ln^{-S/2+A+2} x)$.

Следующий шаг наших рассуждений — сделать независимым друг от друга суммирование по n и p. Можно считать, что $n \in (\sqrt[7]{x^5}; x/p]$, т. к. если $n \le \sqrt[7]{x^5}$, то $np \le \sqrt[7]{x^6}$, и эта часть суммы оценивается тривиально. Промежуток $(\sqrt[7]{x^5}; x/p]$ изменения n разобьем на не более чем I интервалов вида $(N_j; N_{j+1}]$, где $N_j = \sqrt[7]{x^5}(1 + \ln^{-S} x)^j$, причем $M_i N_j \le x$ при любых i, j. Оценив вклад последнего (возможно неполного) промежутка в $\sum_1$, получим

$$\ll \ln^{-2S+1} x \sum_{Q_1 < d \le Q_2} \sum_{i=1}^{I} \frac{M_i N_j}{d} + x^{1-\varepsilon} \ll x \ln^{-S+A+2} x.$$

Аналогичным образом разобьем интервал $(1/2; y]$ для d_1 на не более чем I промежутков вида $(V_k; V_{k+1}]$, где $V_k = (1 + \ln^{-S} x)^k / 2$. Промежуток $(Q_1/y; Q_2]$ для d_2 разобьем на то же число интервалов вида $(Q_l; Q_{l+1}]$, где $Q_l = Q_1 (1 + \ln^{-S} x)^l / y$, причем $V_k Q_l \le Q_2$ при всевозможных k и l. Вклад одного промежутка по d_2 в $\sum_1$ составит $O(x \ln^{-S+A+3} x)$.

Итак, после разбиения на интервалы вида $(u; \sigma u]$, где $1 < \sigma \le 2$, промежутков изменения p, n, d_1, d_2 оценку $\sum_1$ можно найти, воспользовавшись леммой 5, в случае $\sqrt{N_j/(zV_k)} \le Q_l \le x^{2/3-14\varepsilon} M_i^{-1}$, т. к. $M_i \in [z_1; z_2]$, $N_j \in (\sqrt[7]{x^5}; x/p]$, $V_k \in (1/2; y]$, $Q_l \in (Q_1/y; Q_2]$, причем $M_i N_j \le x$, $V_k Q_l \le Q_2$ при любых i, j, k и l. Следовательно, выбрав $\beta = 0$ и $\alpha = 2^{18}$, получаем

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{i,j,k,l=1}^{I} x \biggl(\exp\left(-\frac{\varepsilon}{8} \frac{\ln x}{(\ln_2 10x)^{1+\varepsilon}} \right) \sqrt{\exp((\ln_2 10x)^{2+2\varepsilon})}$$

$$+ (\exp((\ln_2 10x)^{1+\varepsilon}))^{-\frac{1}{2}} \biggr) \ln^{\alpha} x + x \ln^{-S/2+A+4} x \ll x \ln^{-B} x,$$

если $S = 2A + 2B + 8$.

Перейдем к оценке $\sum_2$. Если в этой сумме избавиться от условия $(n, d_2) = 1$, то оценка полученной суммы может быть найдена с использованием леммы 1. Для того чтобы условие $(n, d_2) = 1$ не учитывать, оценим сумму

$$\sum_{d_1 \le y} \sum_{Q_1 < d_1 d_2 \le Q_2} \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \le x, \\ n \equiv a (\operatorname{mod} d_1), \\ (n, d_2) > 1}} 1 \ll \sum_{d_1 \le y} \sum_{Q_1 < d_1 d_2 \le Q_2} \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{p \ge z, \\ p | d_2}} \left(\frac{x}{p d_1} + 1 \right) \ll x \ln^{-B} x. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Число решений уравнения $n + x^2 + y^2 = N$, x, $y \in \mathbb{Z}$, $n \in E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$, равно

$$\nu(N, E) := \sum_{\substack{n < N, \\ n \in E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)}} r(N - n),$$

где $r(a)$ — число представлений a в виде суммы двух квадратов.

Введем обозначение

$$E_1^{\nabla} = E_1^{\nabla}(t, l_1, \dots, l_k, d_0; z_1, z_2) = \{n : n = p_1 \dots p_k, \ t \le p_1 < \dots < p_k,$$
$$p_i \equiv l_i (\operatorname{mod} d_0), \ i = 1, \dots, k; \ \nexists p | n, \ p \in [z_1; z_2]\}.$$

В сумме по $n < N$ перейдем от множества $E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$ к множеству $E_1(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$, которое есть объединение двух множеств: $E_1^*(t)$ и E_1^{∇}, где $z_1 = \exp((\ln_2 10N)^{3+3\varepsilon})$, $z_2 = \sqrt[7]{N}$. При изменении условия $n \in E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$ на условие $n \in E_1(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$ возникает ошибка, равная $\sum *_{n<N} r(N - n)$, где $\sum *$ означает, что суммирование проводится по таким n, что $\exists p^2 | n$, $p \ge t$. Эта сумма (см. [9], с. 343) меньше, чем $\sum *_{n<N} \tau(N - n)$, где $\tau(a)$ — число делителей a. Оценка последней суммы может быть найдена с использованием неравенства Коши, леммы 5 ([10], с. 22) и составляет $O(N \ln^{-B/2+1} N)$.

Прежде чем перейти к оценке той части суммы, где $n \in E_1^{\nabla}$, отметим, что n можно представить как произведение n_1 на n, где n_1 — числа, имеющие простые делители только из интервала $[t, z_1)$, или $n_1 = 1$, у n все они больше или равны z_1, или $n = 1$. Будем полагать, что $n_1 \le y_1 = \exp((\ln_2 10N)^{4+4\varepsilon})$, т.к. в случае $n_1 > y_1$ данная сумма не превосходит $\sum\limits_{\substack{n_1 n < N, \\ y_1 < n_1 < N}} r(N - n_1 n)$. Оценку последней $O(N \ln^{-B} N)$ легко найти, если воспользоваться неравенством Коши, леммой 3, а также леммой 5 ([10], с. 22).

Таким образом, имеем

$$\sum_{\substack{n < N, \\ n \in E_1^{\nabla}}} r(N - n) \ll \sum_{u=k-6}^{k-1} \sum_{\substack{n_1 \le y_1, \\ n_1 \in E_1(t, l_1, \dots, l_u, d_0)}} \sum_{\substack{m < N, \\ m \equiv N (\operatorname{mod} n_1), \\ (\frac{N-m}{n_1}, P(z_3)) = 1}} r(m) + N \ln^{-B} N, \tag{1}$$

где $P(y)$ — произведение всех простых чисел, меньших или равных y, $z_3 = N^{1/104}$. Для изучения внутренней суммы из (1) воспользуемся леммой 2.1 ([11], с. 78), выбрав $Q = p_1 \dots p_s$, $p_1 < \dots < p_s \le r = z_3$, $p \not| 2n_1$, $d | Q$, $z = N^{1/13}$, $X = \sum\limits_{\substack{m < N, \\ m \equiv N (\operatorname{mod} n_1)}} r(m)$, $\eta(d) = \prod\limits_{p | d} \frac{1}{p} (1 - \frac{\chi_4(p)}{p}) \prod\limits_{p | (N, d)} (1 + \chi_4(p))$.

Воспользовавшись леммой 4, находим

$$\sum_{\substack{m < N, \\ m \equiv N (\operatorname{mod} d n_1)}} r(m) - \eta(d) \sum_{\substack{m < N, \\ m \equiv N (\operatorname{mod} n_1)}} r(m) \ll \sqrt{N} \tau^2(d n_1).$$

Собирая все эти результаты вместе, имеем

$$\sum_{\substack{n<N,\\ n\in E_1^{\nabla}}} r(N-n) \ll \sum_{u=k-6}^{k-1} \sum_{\substack{n_1\le y_1,\\ n_1\in E_1(t,l_1,\dots,l_u,d_0)}} \Biggl(\pi\frac{N}{n_1}\prod_{\substack{p|Q,\\ p\nmid 2n_1}}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)$$

$$\prod_{p|n_1}\Bigl(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\Bigr)\sum_{\delta|(N,n_1)}\chi_4(\delta)+\sqrt{N}z^3\sum_{\substack{d|Q,\\ d\le z^3}}\frac{3^{\omega(d)}}{d}\tau^2(dn_1)\Biggr)+N\ln^{-B}N.$$

Второе слагаемое этой суммы имеет оценку $O(N\ln^{-B}N)$. В первом слагаемом выражение $\frac{1}{n_1}\prod\limits_{\substack{p\le z_3,\\ p\nmid 2n_1}}(1-\frac{1}{p})$ можно записать как $\frac{2}{\varphi(n_1)}\prod\limits_{p\le z_3}(1-\frac{1}{p}) = O(\frac{1}{\ln z_3}\frac{1}{\varphi(n_1)})$, а сумму по δ заменить на $\sum\limits_{\delta|(N,n_1)} 1 \le 2^{\Omega(n_1)}$. Теперь, вследствие мультипликативности функции $f(n) = 2^{\Omega(n)}\prod\limits_{p|n}(1-\frac{\chi_4(p)}{p})$, получаем

$$\sum_{\substack{n_1\le y_1,\\ n_1\in E_1(t,l_1,\dots,l_u,d_0)}}\frac{f(n_1)}{\varphi(n_1)} \le \Bigl(\sum_{p\le z_1}\frac{f(p)}{\varphi(p)}\Bigr)^u\frac{1}{u!} \ll \frac{1}{u!}(2\ln_2 10z_1+c_1)^u.$$

В итоге имеем

$$\sum_{\substack{n<N,\\ n\in E_1^{\nabla}}} r(N-n) \ll \Bigl(\frac{((6+6\varepsilon)\ln_3 20N)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{((6+6\varepsilon)\ln_3 20N)^{k-6}}{(k-6)!}\Bigr)\frac{N}{\ln N} = R'(N,t,k).$$

Перейдем к оценке той части суммы $r(N-n)$, где $E_1^*(t,l_1,\dots,l_k,d_0;z_1,z_2) = E_1^*$. Воспользовавшись предложением 17.6.1 ([9], с. 343), можем записать

$$\sum_{E_1^*\ni n<N} r(N-n) = 4\sum_{E_1^*\ni n<N}\ \sum_{dm=N-n}\chi_4(d). \tag{2}$$

Можно считать, что $(d,N)=1$, т. к. в противном случае существует $\delta\ne 1$, делящее d и N, а следовательно, n. По условию все простые делители n больше или равны t, поэтому и у δ все простые множители будут такими же. Обозначим через $\sum^{\diamond}$ сумму по $\delta|N$, $\delta\ne 1$, и, если $p|\delta$, $p\ge t$. Очевидно, что та часть изучаемой суммы, где $\delta\ne 1$, не превосходит

$$\sum\nolimits^{\diamond}\sum_{d<N/\delta}\ \sum_{\substack{n\le N/\delta,\\ n\equiv N/\delta (\mathrm{mod}\, d)}} 1 \ll N\ln N\Bigl(\sum_{\substack{\delta|N,\\ p|\delta\to p\ge t}}\frac{1}{\delta}-1\Bigr) \le N\ln N\Bigl(\prod_{\substack{p|N,\\ p\ge t}}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)^{-1}-1\Bigr) \ll N\ln^{-B+1}N.$$

В сумме (2) промежуток $[1;N)$ изменения d разобьем на два $d\le Q_2$, $d>Q_2$, где $Q_2 = \sqrt{N}\ln^{A(B)}N$, а $A(B)=\min(3B+12, B+C_0+\frac{27}{8})$, и обозначим их $\sum_A$ и $\sum_B$ соответственно.

Займемся изучением $\sum_A$. Покажем, что в этой сумме $(d,d_0)=1$. Предположим,что существует p такое, что $p^r||d_0$ и $p^t||d$. По условию $n\equiv l(\mathrm{mod}\, d_0)$, $n\in E_1^*$ и $n\equiv N(\mathrm{mod}\, d)$, следовательно, $n\equiv l(\mathrm{mod}\, p^r)$ и $n\equiv N(\mathrm{mod}\, p^t)$. Из двух последних сравнений вытекает, что $l\equiv N(\mathrm{mod}\, p^s)$, где $s=\min(r,t)$. Одно из условий теоремы — числа $N-l$ и d_0 взаимно-просты, значит, $s=0$. Итак, $(d,d_0)=1$, если $(d_0,N-l)=1$. Следовательно,

$$\sum\nolimits_A = \sum_{\substack{d\le Q_2,\\ (d,Nd_0)=1}}\chi_4(d)\Bigl(\sum_{\substack{E_1^*\ni n<N,\\ n\equiv N(\mathrm{mod}\, d)}} 1-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{E_1^*\ni n<N} 1\Bigr)+\sum_{\substack{d\le Q_2,\\ (d,Nd_0)=1}}\frac{\chi_4(d)}{\varphi(d)}\sum_{E_1^*\ni n<N} 1 = \sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2.$$

Асимптотическую формулу $\sum_2$ найдем с помощью леммы 10 ([12], гл. V, § 3, с. 87), если для оценки остатка воспользоваться леммой 2 ([10], с. 18),

$$\sum\nolimits_2 = \frac{\pi}{4}DE(Nd_0)\sum_{E_1^*\ni n<N} 1+O(N\ln^{-B}N),$$

где $D=\prod\limits_{p>2}(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)})$, $E(m)=\prod\limits_{p|m}(1-\frac{\chi_4(p)p}{p^2-p+\chi_4(p)})$.

Оценим $\sum_1$. Интервал изменения d разобьем на два промежутка $d\le Q_1$ и $Q_1<d\le Q_2$, где $Q_1=\sqrt{N}\ln^{-A(B)}N$. К первой части применим теорему 1, если от множества E_1^* перейдем к множеству $E_1(t,l_1,\dots,l_k,d_0)$. Множество E_1^* есть объединение двух подмножеств: чисел, имеющих простые делители, меньшие z_1, и чисел, не имеющих таковых делителей. В первом случае, сделав внешними суммы по u и $n_1\le y_1$ таким, что $n_1\in E_1(t,l_1,\dots,l_u,d_0)$, множество $E_1^*(z_1,l_{u+1},\dots,l_k,d_0;z_1,z_2)$ представим как разность двух множеств $E_1(z_1,l_{u+1},\dots,l_k,d_0)$ и $E_1(z_2,l_{u+1},\dots,l_k,d_0)$. Во втором случае множество $E_1^*(z_1)$ — это разность таких множеств как $E_1(z_1,l_1,\dots,l_k,d_0)$ и $E_1(z_2,l_1,\dots,l_k,d_0)$. Итак, после применения теоремы 1 первая часть $\sum_1$, где $d\le Q_1$, имеет оценку $O(N\ln^{-B+2}N)$.

При проведении оценки второй части $\sum_1$, где $Q_1<d\le Q_2$, выделим суммы по u и по $n_1\le y_1$, $n_1\in E_1(t,l_1,\dots,l_u,d_0)$. Вследствие того, что внутренняя сумма удовлетворяет всем условиям леммы 6, оценка второй части $\sum_1$ равна $O(N\ln^{-B+2}N)$.

Перейдем к оценке $\sum_B$. По условию в этой сумме $d>Q_2$ и $dm=N-n$, следовательно, $m<N/Q_2=\sqrt{N}\ln^{-A(B)}N$. Проведя рассуждения, аналогичные тем, что были сделаны при введении условия $(d,N)=1$ для суммы (2), можем считать, что в $\sum_B$ $(m,N)=1$, а условия $(d,N)=1$ нет.

Неглавный характер по модулю 4 может быть равен либо -1, либо 0, либо 1. Таким образом, сумма по $n<N$, $n=N-dm$ будет равна разности двух сумм: по $n\equiv N-m(\operatorname{mod}4m)$ и $n\equiv N+m(\operatorname{mod}4m)$, где $n<N-mQ_2$. Кроме того, если $(m,N)=1$, то $(N\pm m,m)=1$. Таким образом, в случае, когда $N\pm m$ и $4m$ не взаимно просты, их наибольший общий делитель может быть равен 2 или 4. Из условий $n\equiv N\pm m(\operatorname{mod}4m)$ и $n\in E_1^*$ вытекает, что числа 2 и 4 не могут делить $N\pm m$. Исходя из всего изложенного выше, имеем

$$\sum\nolimits_B=\sum_{\substack{m<N/Q_2,\\(N-m,4m)=1}}\ \sum_{\substack{E_1^*\ni n<N-mQ_2,\\n\equiv N-m(\operatorname{mod}4m)}}1-\sum_{\substack{m<N/Q_2,\\(N+m,4m)=1}}\ \sum_{\substack{E_1^*\ni n<N-mQ_2,\\n\equiv N+m(\operatorname{mod}4m)}}1+\\+O(N\ln^{-B+1}N)=\sum\nolimits_3-\sum\nolimits_4+O(N\ln^{-B+1}N).$$

Выясним, чему может быть равен $(4m,d_0)$. Рассуждения проведем для $\sum_3$, т. к. для $\sum_4$ они будут аналогичны.

Пусть $p|(4m,d_0)$. Рассмотрим два случая $p\ne2$ и $p=2$.

В первом случае из выполнимости сравнений $n\equiv l(\operatorname{mod}d_0)$ и $n\equiv N-m(\operatorname{mod}4m)$ следует, что $n\equiv l(\operatorname{mod}p)$ и $n\equiv N(\operatorname{mod}p)$, значит, p должно делить $N-l$. По условию теоремы $(d_0,N-l)=1$, следовательно, $p=2$, если $p|(4m,d_0)$.

Во втором случае из условий $(l,d_0)=1$ и $(d_0,N-l)=1$ вытекает, что 2 делит N, но не делит l. Из тех же соображений, что и в первом случае, имеем $n\equiv l(\operatorname{mod}2)$ и $n\equiv N-m(\operatorname{mod}2)$. Это возможно только в том случае, если m не делится на 2. Таким образом, наибольший общий делитель $4m$ и d_0 может принимать только три значения 1, 2 и 4.

Рассмотрим $\sum_B$ при всевозможных значениях $(4m,d_0)$.

При $(4m,d_0)=1$, учитывая эквивалентность условий $(N-m,4m)=1$ и $(N+m,4m)=1$, получим

$$\sum\nolimits_B=\sum\begin{bmatrix}m<N/Q_2\\(N-m,4m)=1\\(4m,d_0)=1\\(m,2)=1\end{bmatrix}\Bigg(\sum_{\substack{E_1^*\ni n<N-mQ_2,\\n\equiv N-m(\operatorname{mod}4m)}}1-\frac{1}{\varphi(4m)}\sum_{E_1^*\ni n<N-mQ_2}1\Bigg)-\\-\sum\begin{bmatrix}m<N/Q_2\\(N+m,4m)=1\\(4m,d_0)=1\\(m,2)=1\end{bmatrix}\Bigg(\sum_{\substack{E_1^*\ni n<N-mQ_2,\\n\equiv N+m(\operatorname{mod}4m)}}1-\frac{1}{\varphi(4m)}\sum_{E_1^*\ni n<N-mQ_2}1\Bigg)+O(N\ln^{-B+1}N).$$

К каждой из записанных сумм применим лемму 1 и, следовательно, оценка $\sum_B$ в случае $(4m, d_0) = 1$ равна $O(N \ln^{-B+1} N)$.

Если $(4m, d_0) = 2$, то $d_0 = 2d_0'$, $(d_0', 2) = 1$. По условию $(l, d_0) = 1$, поэтому можем утверждать, что множество $E_1^*(t, l_1, \dots, l_k, d_0'; z_1, z_2)$ совпадает с множеством E_1^* при выполнимости вышеназванного условия. Таким образом, для оценки $\sum_B$ можно вновь применить лемму 1 и получить $\sum_B = O(N \ln^{-B+1} N)$.

Осталось рассмотреть последний случай, когда $(4m, d_0) = 4$, т. е. $d_0 = 2^r d_0'$, $r \geq 2$, $(d_0', 2) = 1$. Из условий, налагаемых на суммы по n, вытекает, что $l \equiv N \pm m (\operatorname{mod} 4)$. Таким образом, во внутренней сумме можно перейти к условию $n \equiv N (\operatorname{mod} m)$, если во внешних суммах добавить условия $m \equiv N - l (\operatorname{mod} 4)$ и $m \equiv l - N (\operatorname{mod} 4)$ соответственно. Следовательно, воспользовавшись леммой 1, получаем

$$\sum\nolimits_B = \sum \begin{bmatrix} m < N/Q_2 \\ (Nd_0, m) = 1 \\ m \equiv N - l (\operatorname{mod} 4) \end{bmatrix} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{E_1^* \ni n < N - mQ_2} 1 - \\ - \sum \begin{bmatrix} m < N/Q_2 \\ (Nd_0, m) = 1 \\ m \equiv l - N (\operatorname{mod} 4) \end{bmatrix} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{E_1^* \ni n < N - mQ_2} 1 + O(N \ln^{-B+1} N).$$

Изменив порядок суммирования, запишем

$$\sum\nolimits_B = \sum_{E_1^* \ni n < N} \left(\sum \begin{bmatrix} m < (N-n)/Q_2 \\ (Nd_0, m) = 1 \\ m \equiv N - l (\operatorname{mod} 4) \end{bmatrix} \frac{1}{\varphi(m)} - \sum \begin{bmatrix} m < (N-n)/Q_2 \\ (Nd_0, m) = 1 \\ m \equiv l - N (\operatorname{mod} 4) \end{bmatrix} \frac{1}{\varphi(m)} \right) + O(N \ln^{-B+1} N).$$

Используя основные свойства характера, учитывая, что $(N - l, 4) = 1$, избавимся от последнего из условий, наложенных на m. Имеем

$$\sum\nolimits_B = \chi_4(N - l) \sum_{E_1^* \ni n < N} \sum_{\substack{m < (N-n)/Q_2, \\ (Nd_0, m) = 1}} \frac{\chi_4(m)}{\varphi(m)} + O(N \ln^{-B+1} N).$$

Асимптотическая формула для внутренней суммы приведена в лемме 10 ([12], гл. V, § 3, с. 87). Проведя оценку остатка в этой формуле в случае, когда $d_0 = 2^r d_0'$, $r \geq 2$, $(d_0, 2) = 1$, получим

$$\sum\nolimits_B = \frac{\pi}{4} D E(Nd_0) \chi_4(N - l) \sum_{E_1^* \ni n < N} 1 + O(N \ln^{-B+1} N).$$

Теперь для того чтобы получить утверждение теоремы, необходимо от множества E_1^* перейти к множеству $E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$. Этот переход сделаем в два этапа. Вначале перейдем к множеству $E_1(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$. Ошибка, возникающая при этом, составит согласно теореме 4.9 ([13], гл. II, § 4, с. 61)

$$\ll \sum_{u=k-6}^{k-1} \sum_{\substack{n_1 \leq y_1, \\ n_1 \in E_1(t, l_1, \dots, l_u, d_0)}} \sum_{\substack{n < N/n_1, \\ n \in E_1(z_2, l_{u+1}, \dots, l_k, d_0)}} 1 + N \ln^{-B} N \ll \\ \ll \left(\frac{((3 + 3\varepsilon) \ln_3 20N)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{((3 + 3\varepsilon) \ln_3 20N)^{k-6}}{(k-6)!} \right) \frac{N}{\ln N} + N \ln^{-B} N.$$

Этот остаток возникает только в тех случаях, когда появляется остаток $R'(N, t, k)$ и поглощается им.

Для того чтобы от условия $n \in E_1(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$ перейти к условию $n \in E(t, l_1, \dots, l_k, d_0)$, оценим ту часть суммы, где n имеет не менее двух равных простых делителей, больших или равных t. Получаем

$$\sum_{n<N}\sum_{\substack{p^2|n,\\ p\ge t}} 1 \ll \frac{N}{t}\sum_{p<\sqrt{N}}\frac{1}{p} \ll N\ln^{-B} N.$$

Теорема 2 доказывается аналогично.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Николаю Михайловичу Тимофееву за руководство и помощь в работе.

Литература

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. *Some problems of partitio numerorum*, III. *On the expression of a number as a sum of primes* // Acta math. – 1922. – V. 44. – P. 1–70.
2. Hooly C. *On the representation of numbers as the sum of two squares and a prime* // Acta math. – 1957. – V. 97. – P. 189–210.
3. Линник Ю.В. *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. – 207 с.
4. Бредихин Б.М. *Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа.* II // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1963. – Т. 27. – № 3. – С. 577–612.
5. Пиядина Ж.В. *Об одном аналоге уравнения Харди–Литтлвуда* // Матем. заметки. – 1984. – Т. 46. – № 3. – С. 58–67.
6. Тимофеев Н.М. *Проблема Харди–Литтлвуда для чисел, имеющих заданное число простых делителей* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1995. – Т. 59. – № 6. – С. 181–206.
7. Жукова А.А. *Теоремы типа А.И. Виноградова–Бомбьери для чисел с заданным числом простых делителей.* – Владимирск. гос. пед. ун-т. – Владимир, 1996. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.03.96, № 1022-В96.
8. Левин Б.В., Тимофеев Н.М. *Распределение арифметических функций в среднем по прогрессиям (теоремы типа Виноградова–Бомбьери)* // Матем. сб. – 1984. – Т. 125. – № 4. – С. 558–572.
9. Айерленд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* – М.: Мир, 1987. – 415 с.
10. Виноградов И.М. *Метод тригонометрических сумм в теории чисел.* – М.: Наука, 1971. – 159 с.
11. Elliot P. D. T. A. *Probabilistic number theory.* I. – Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 239. – N. Y.: Springer-Verlag, 1979. – 360 p.
12. Хооли К. *Применение методов решета в теории чисел.* – М.: Наука, 1987. – 136 с.
13. Прахар К. *Распределение простых чисел.* – М.: Мир, 1967. – 512 с.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступила
19.02.1997