ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 517.552

*А.Б. СЕКЕРИН*

# ТЕОРЕМА О НОСИТЕЛЕ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Хорошо известна теорема о носителе для вещественного преобразования Радона [1], [2], утверждающая, что непрерывная в $\mathbb{R}^m$ функция с компактным носителем равна нулю вне данного выпуклого компакта $K$ при условии, что равны нулю интегралы от этой функции по всем вещественным гиперплоскостям, не пересекающим $K$. Эта теорема имеет ряд важных приложений (см., напр., [2], [3]). Отметим также, что имеется ряд обобщений этой теоремы [4]. Следует указать, что относящийся к данному вопросу результат работы [5] неверен (см. контрпример в работе автора [6]).

Целью предлагаемой работы является рассмотрение данного вопроса для случая комплексного преобразования Радона. В связи с тем, что комплексное преобразование Радона учитывает комплексную структуру, данный вопрос не сводится к рассмотрению теорем о носителе, связанных с интегрированием по $k$-мерным плоскостям в $\mathbb{R}^m$.

Обозначения. Для $z, w \in \mathbb{C}^n$ полагаем $\langle z, w\rangle = \sum z_j w_j$, $d\omega_{2n}$ — стандартная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \,\big|\, |z| = 1\}$. Через $C_c(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ будем обозначать соответственно пространства непрерывных и гладких $\mathbb{C}$-значных функций с компактным носителем. Для $\varphi \in C_c(\mathbb{C}^n)$ через $\hat\varphi(\xi, s)$ будем обозначать комплексное преобразование Радона, определяемое равенством (см. [7], с. 160)

$$\hat\varphi(\xi, s) = \frac{1}{|\xi|^2}\int_{\langle z,\xi\rangle = s} \varphi(z)\,d\lambda(z), \quad (\xi, s) \in (\mathbb{C}^n \setminus 0) \times \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $d\lambda(z)$ — стандартный элемент площади на гиперплоскости $\{z : \langle z, \xi\rangle = s\}$.

Для множества $A \subset \mathbb{C}^n$ через $\hat A$ будем обозначать множество всех таких $(\xi, s) \in (\mathbb{C}^n \setminus 0) \times \mathbb{C}$, что комплексная гиперплоскость $\{z : \langle z, \xi\rangle = s\}$ пересекает $A$.

Пусть $K$ — компакт в $\mathbb{C}^n$, линейно выпуклый по Мартино, т. е. для каждой точки $z_0 \notin K$ существует комплексная гиперплоскость $\{z : \langle z, \xi\rangle = s\}$, содержащая $z_0$ и не пересекающая $K$. Будем говорить, что для компакта $K$ верна теорема о носителе комплексного преобразования Радона, если для любой функции $\varphi \in C_c(\mathbb{C}^n)$ и такой, что ее комплексное преобразование Радона $\hat\varphi(\xi, s)$ равно нулю вне $\widehat{K}$, верно $\varphi(z) = 0$ для $z \notin K$.

Условие линейной выпуклости по Мартино вполне уместно в этом определении. Естественным образом возникает вопрос геометрического и топологического описания линейно выпуклых компактов, для которых верна теорема о носителе. Следующая теорема дает достаточное условие.

**Теорема 1.** *Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — компакт, линейно выпуклый по Мартино и такой что для каждой точки $z_0 \notin K$ существует комплексная гиперплоскость $\{z : \langle z, \xi_0\rangle = s_0\}$, содержащая $z_0$, не пересекающая $K$ и такая, что проекция $K_{\xi_0} = \{\langle z, \xi_0\rangle\}_{z\in K}$ имеет в плоскости $\mathbb{C}$ связное дополнение. Тогда для компакта $K$ верна теорема о носителе комплексного преобразования Радона.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-259).

Основой доказательства теоремы 1 служит доказанная в работе автора [6]

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi(z) \in C_c(\mathbb{C}^n)$ и $\hat{\varphi}(\xi, z)$ — комплексное преобразование Радона $\varphi$. Пусть точка $(\xi_0, s_0)$ не принадлежит носителю $\hat{\varphi}$. Пусть далее существует открытое связное неограниченное множество $M \subset \mathbb{C}$ такое, что $s_0 \in M$ и пересечение $(\{\xi_0\} \times M) \cap \operatorname{supp} \hat{\varphi}$ пусто. Тогда функция $\varphi$ равна нулю на гиперплоскости $\{z : \langle z, \xi_0 \rangle = s_0\}$.*

**Доказательство теоремы 1.** Пусть $\varphi(z) \in C_c(\mathbb{C}^n)$ и преобразование Радона $\hat{\varphi}(\xi, s)$ обращается в нуль для $(\xi, s) \notin \widehat{K}$. Возьмем любую точку $z_0 \notin K$. Тогда по условию существует точка $(\xi_0, s_0) \in (\mathbb{C}^n \setminus 0) \times \mathbb{C}$ такая, что $\{z : \langle, \xi_0 \rangle = s_0\} \cap K = \emptyset$, $\langle z_0, \xi_0 \rangle = s_0$ и множество $\mathbb{C} \setminus K_{\xi_0}$ связно, где $K_{\xi_0} = \{\langle z, \xi_0 \rangle\}_{z \in K}$. Множество $K_{\xi_0}$ — компакт в $\mathbb{C}$, поскольку оно является непрерывным образом компакта.

По условию $\hat{\varphi}(\xi_0, s_0) = 0$ и $s_0 \notin K_{\xi_0}$. Следовательно, функция $\alpha(s) = \hat{\varphi}(\xi_0, s)$ обращается в нуль на открытом связном неограниченном множестве $\mathbb{C} \setminus K_{\xi_0}$, содержащем точку $s_0$. Тогда по теореме 2 исходная функция $\varphi(z)$ равна нулю на плоскости $\{z : \langle z, \xi_0 \rangle = s_0\}$ и, в частности, в точке $z_0$. $\square$

Отметим, что условию теоремы 1 удовлетворяет любой компакт в $\mathbb{C}^n$ вида $K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$, где для $1 \le 1 \le n$ $K_j$ — компакты в $\mathbb{C}$ такие, что $\mathbb{C} \setminus K_j$ связно. При этом компакт $K$ может быть даже несвязным множеством.

Покажем теперь, что условие теоремы 1 существенно, т. е. существует компакт, линейно выпуклый по Мартино, не удовлетворяющий условию теоремы 1, для которого теорема о носителе не верна.

Отметим следующий очевидный факт: если $K$ — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$ (в обычном смысле) и функция $\varphi(z) \in C_c(\mathbb{C}^n)$ такова, что ее преобразование Радона $\hat{\varphi}(\xi, s)$ обращается в нуль для $(\xi, s) \notin \widehat{K}$, то равны нулю и интегралы от $\varphi$ по всем вещественным гиперплоскостям, не пересекающим $K$, т. е. по теореме о носителе для вещественного преобразования Радона $\varphi(z) = 0$ вне $K$ (безусловно для выпуклого компакта выполнены и условия теоремы 1, но ее применение в данной ситуации было бы неуместным). Таким образом (в случае произвольного компакта $K$), если $\varphi(z) \in C_c(\mathbb{C}^n)$ и $\hat{\varphi}(\xi, s) = 0$ для $(\xi, s) \notin \widehat{K}$, то $\varphi(z) = 0$ вне выпуклой оболочки $\operatorname{conv} K$. Это означает, что при построении примера нас будет интересовать только множество $\operatorname{conv} K \setminus K$.

Пусть $n = 2$ и $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \, 1 \le |z_1| \le 2, \ |z_2| \le 2\}$. Считая вектор $w \in \mathbb{C}^2$ единичным, найдем условие, при выполнении которого плоскость $P = \{z \in \mathbb{C}^2 : \langle z, w \rangle = s\}$ не пересекает $K$, но пересекает $\operatorname{conv} K$. Так как $\operatorname{conv} K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \, |z_1| \le 2, \ |z_2| \le 2\}$, то элементарные выкладки показывают, что необходимым и достаточным условием является неравенство

$$|s| < |w_1| - 2|w_2|. \tag{2}$$

В этом случае, в частности, $0 < |w_1| - 2|w_2|$ и проекция $K_w = \{\langle z, w \rangle\}_{z \in K}$ представляет собой кольцо

$$K_w = \{\lambda \in \mathbb{C} | \, |w_1| - 2|w_2| \le |\lambda| \le 2|w_1| + 2|w_2|\},$$

т. е. $\mathbb{C} \setminus K_w$ несвязно. Следовательно, для любой плоскости $\{z \in \mathbb{C}^2 : \langle z, w \rangle = 0\}$, проходящей через начало координат и не пересекающей $K$, множество $\mathbb{C} \setminus K_w$ несвязно, т. е. $K$ не удовлетворяет условию теоремы 1. Пусть функция $h(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что функция $\varphi_1(z_1) = h(|z_1|^2)$ равна 1 для $|z_1| \le 2 - 2\delta$ и нулю для $|z_1| \ge 2 - \delta$, где $0 < \delta < 1$. Пусть далее $\varphi_2(\lambda) = \partial g(\lambda)/\partial \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $g(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{C})$ такова, что $\partial g(0)/\partial \lambda \neq 0$ и $g(\lambda) = 0$ для $|\lambda| \ge 1$. Положим

$$\varphi(z) = \varphi_1(z_1) \varphi_2(z_2/\varepsilon),$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Имеем $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2)$ и $\varphi(0) \neq 0$. Носитель функции $\varphi(z)$ содержится в $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \, |z_1| \le 2 - \delta, \ |z_2| \le \varepsilon\}$, поэтому интеграл от $\varphi(z)$ по любой плоскости $P = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 :$

$\langle z, w\rangle = s\}$, не пересекающей $\mathrm{conv}(K)$, равен нулю. Пусть теперь плоскость $P = \{z \in \mathbb{C}^2 : \langle z, w\rangle = s\}$ не пересекает $K$, но пересекает $\mathrm{conv}(K)$, т. е. выполнено (2). Тогда по определению

$$\int_{\langle z,w\rangle=s} \varphi(z)d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi_1(s\bar{w}_1 + \mu w_2)\frac{\partial g((s\bar{w}_2 - \mu w_1)/\varepsilon)}{\partial \lambda} d\omega_2(\mu). \tag{3}$$

В правой части (3) интегрирование фактически ведется по множеству $\{\mu \in \mathbb{C}|\ |s\bar{w}_2 - \mu w_1| \leq \varepsilon\}$, но на этом множестве в силу (2) имеем

$$|s\bar{w}_1 + \mu w_2| \leq \left| s\bar{w}_1 + \frac{s\bar{w}_2 w_2}{w_1}\right| + \frac{\varepsilon|w_2|}{|w_1|} \leq \frac{|s| + \varepsilon|w_2|}{|w_1|} \leq 1.$$

Поэтому на множестве интегрирования имеем $\varphi_1(s\bar{w}_1 + \mu w_2) \equiv 1$. Тогда интеграл в правой части (3) равен

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial g((s\bar{w}_2 - \mu w_1)/\varepsilon)}{\partial \lambda} d\omega_2(\mu).$$

Так как при этом $w_1 \neq 0$, то последний интеграл равен нулю, т. е. функция $\varphi(z)$ такова, что интеграл от нее по любой комплексной гиперплоскости, не пересекающей $K$, равен нулю, и тем не менее $\varphi(z) \not\equiv 0$ вне $K$, т. к. $\varphi(0) \neq 0$.

## Литература


1. Хелгасон С. *Преобразование Радона.* – М.: Мир, 1983. – 152 с.
2. Ludwig D. *The Radon transform on Euclidean space* // Comm. Pure and Appl. Math. – 1996. – V. 19. – P. 49–81.
3. Wiegerinck J.J.O.O. *Growth properties of Paley-Wiener functions on* $\mathbb{C}^n$ // Proc. Koninkl. Nederl. akad. Wetensch. – Ser. A. – 1984. – V. 87. – № 1. – P.95–112.
4. Boman J., Quinto E.T. *Support theorems for real-analytic Radon transforms* // Duke Math. J. – 1987. – V. 55. – № 4. – P. 943–948.
5. Wiegerinck J.J.O.O. *A support theorem for Radon transforms on* $\mathbb{R}^n$ // Proc. Koninkl. Nederl. akad. Wetensch. – Ser. A. – 1985. – V. 88. – № 1. – P. 87–93.
6. Секерин А.Б. *Теорема о носителе для преобразования Радона в комплексном пространстве* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – № 3. – С. 152–154.
7. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.* – М.: Наука, 1962. – 656 с.



*Институт математики*
*с Вычислительным Центром*
*Уфимского научного центра*
*Российской Академии Наук*



*Поступила*
06.02.1995