МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт фундаментальной медицины и биологии

Кафедра генетики

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В БИОЛОГИИ И ГЕНЕТИКЕ. ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Казань - 2016

УДК 51-76; 573
ББК 28

Печатается по решению редакционно-издательсткого совета ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», Учебно-методической комиссии Института фундаментальной медицины и биологии К(П)ФУ, протокол №6 от 10 марта 2016, заседания кафедры генетики Института фундаментальной медицины и биологии Казанского (Приволжского) федерального университета, протокол №2 от 2.02.2016,

Рецензенты:

Кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, **М.И.Богачев**
Кандидат биологических наук, доцент, **Н.И.Акберова**

Каюмов А.Р., Маркелов О.А.
Математические методы в биологии и генетике. Часть 1. Основы теории вероятностей. Учебно-методическое пособие / А.Р. Каюмов, О.А. Маркелов. – Казань: Казань, КФУ, 2016. -46 с.

В учебно-методическом пособии рассматриваются основные понятия и теоремы теории вероятностей, а также вопросы закономерностей распределения дискретной случайной величины. Каждый раздел пособия снабжен примерами, иллюстрирующими введенные понятия, а также набором задач для самостоятельного решения. Пособие направлено на формирование навыков применения статистических подходов к планированию биологических экспериментов и развитию логического мышления студентов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Предметом теории вероятности является математический анализ случайных явлений.

Математическая статистика занимается установлением закономерностей, которым подчинены массовые статистические данные, в качестве которых выступают результаты биологических экспериментов (испытаний, наблюдений, обследований).

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, получаемых в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача – разработать методику анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

Случайное событие – это любой факт, который может произойти или не произойти в результате испытания.

Испытание (опыт, эксперимент) – выполнение определенного комплекса (совокупности) условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.

Достоверное событие – которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Невозможное событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S**.**

Пример 1.1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

Пример 1.2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета – событие.

События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1.3. Из ящика с карандашами разных цветов по 1 шт каждого цвета наудачу извлечен один. Появление красного исключает появление синего. События «появился красный карандаш» и «появился синий карандаш» – **несовместные**.

Пример 1.4. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление «решки». События «появился герб» и «появилась решка» – **несовместные**.

События называют **равновозможными (равновероятными)**, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 1.5. Появление «герба» и появление «решки» при бросании монеты – равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 1.6. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости – равновозможные события. Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника, и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

Пример 1.7. Набор наудачу последней цифры телефонного номера – это 10 равновозможных событий, поскольку там может быть любая цифра.

Пример 1.8. А вот какой стороной упадет на пол бутерброд с маслом – намазанной стороной или нет – уже нельзя считать события равновозможными, так как сторона с маслом более тяжелая и поэтому бутерброд имеет тенденцию упасть маслом вниз.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания достоверно (обязательно) произойдет хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится только одно из этих событий.

Пример 1.9. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий:«выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Пример 1.10. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

1.1 Классическое определение вероятности

Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т.е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара).

Вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем элементарным исходом (элементарным событием). Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т.д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 – появился белый шар; ω_2, ω_3 – появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 – появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны). Полную группу попарно несовместных событий обозначают буквой Ω.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем благоприятствующими этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию А (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие А наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих А; в нашем примере А наблюдается, если наступит ω_2 или ω_3, или ω_4, или ω_5, или ω_6. В этом смысле событие А подразделяется на несколько элементарных событий (ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием А и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию А элементарных исходов к их общему числу возможных исходов называют вероятностью события А и обозначают через *P*(*A*).

В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию А. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A)=\frac{5}{6}$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти.

Вероятность события А определяется формулой $P(A)=\frac{m}{n}$,

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих А; n – число всех возможных элементарных исходов испытания. Из данного отношения очевидно, что вероятность не может быть больше 1 (когда все события являются благоприятными) и меньше 0 (когда нет ни одного благоприятного события).

1.2 Статистическое определение вероятности

Пусть А – случайное событие по отношению к некоторому испытанию. Представим себе, что это испытание произведено N раз и при этом событие А наступило в N_A случаях. Тогда отношение

$$W = \frac{N_A}{N}$$

называется *частотой* события А в данной серии испытаний.

Вероятностью случайного события А называется число p(А), к которому сходится частота этого события в длинных сериях испытаний.

Задачи

1. Наудачу выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что это число кратно 5?
2. В урне 4 желтых и 6 красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется белым?
3. В урне 4 желтых и 6 красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется желтым?
4. В урне 4 желтых и 6 красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется окрашенным?
5. В урне 4 желтых и 6 красных шаров. Из этой урны вынули один желтый шар. После этого из урны берут еще один шар. Какова вероятность того, что этот шар также желтый?
6. В урне 4 желтых и 6 красных шаров. Из этой урны вынули один желтый шар. После этого из урны берут еще один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

7. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе все цифры одинаковы?
8. Какова вероятность наугад вынуть из кошелька единственную монету в 1 рубль из 10 разных монет?
9. Какова вероятность, не посмотрев на номер, сесть не в тот автобус, если на остановке из 8 автобусов в нужном направлении едут 3.
10. Наудачу выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что выбранное число делится на 10?
11. Какова вероятность выпадения числа 3 при бросании игральной кости?
12. Какова вероятность, не посмотрев на номер, сесть в правильный автобус, если на остановке из 5 автобусов в нужном направлении едут 2.
13. В урне 5 шаров: 2 красных, 2 синих и 1 белый. Найти вероятность появления цветного шара.
14. В урне 5 шаров: 2 красных, 2 синих и 1 белый. Найти вероятность появления белого шара.
15. В урне 5 шаров: 2 красных, 2 синих и 1 белый. Найти вероятность появления зеленого шара.
16. Набирая семизначный номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.
17. В лаборатории посеяно 1000 семян, из которых 234 не взошли. Какова частота нормального всхода семян?
18. В роддоме из 598 детей 312 оказались мальчиками. Какова частота рождения девочек?
19. Частота встречаемости второй группы крови в исследовании оказалась 0.25. Сколько человек имело вторую группу крови, если в исследовании приняло участие 500 человек?
20. За три летних месяца 27 дней были дождливыми. Найдите частоту дождливых дней.
21. Экзаменационные билеты пронумерованы от 1 до 35. Какова вероятность того, что наудачу взятый билет имеет номер, кратный пяти?

22. Из урны, содержащей 9 белых, 9 черных, 9 синих и 9 красных шаров, наудачу извлекли 3 шара. Какова вероятность, что это окажутся белые или черные шары.
23. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 17 из России, 22 из США, остальные – из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.
24. В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 4 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.
25. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 80 качественных сумок приходится одна сумка со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.
26. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Эстонии, 6 спортсменов из Латвии, 3 спортсмена из Литвы и 7 – из Польши. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Литвы.
27. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 50 докладов – первые два дня по 11 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвертым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?
28. На семинар приехали 2 ученых из Польши, 3 из Бельгии и 5 из Болгарии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что девятым окажется доклад ученого из Бельгии.
29. В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 20 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно

выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

30. В сборнике билетов по истории всего 60 билетов, в 18 из них встречается вопрос по смутному времени. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по смутному времени.
31. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики.

Правило суммы. Если некоторый объект **A** может быть выбран из совокупности объектов ***k*** способами, а другой объект **B** может быть выбран ***s*** способами, то выбрать либо объект **A**, либо объект **B** можно ***k*** + ***s*** способами.

Пример 2.1. Выбрать книгу ***ИЛИ*** диск из 10 книг и 12 дисков можно 10 + 12 = 22 способами.

Правило произведения. Если объект **A** можно выбрать из совокупности объектов ***k*** способами, и при любом выборе **A** объект **B** можно выбрать ***s*** способами, то пара объектов (**A, B**) в указанном порядке может быть выбрана ***k***×***s*** способами

Пример 2.2. Выбрать книгу ***И*** диск из 10 книг и 12 дисков можно $10 \times 12 = 120$ способами.

Перестановки

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ – n факториал (по определению 0! = 1).

Пример 2.3. Сколько трехзначных чисел можно составить из карточек с цифрами 1, 2, 3?

Решение: Так как каждая карточка может быть использована только 1 раз, искомое число трехзначных чисел P3=3!=1×2×3=6.

Пример 2.4. Сколько существует способов рассадки 6 гостей за стол?

Решение: Поскольку посадив одного гостя за стол, его уже нельзя пересадить, то искомое число способов будет числом перестановок 6 гостей, т.е. 6! = 120 способов.

Размещения

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 2.5. 10 спортсменов разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами эти медали могут быть распределены между спортсменами?

Искомое число смесей $A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$

Количество размещений с повторениями

Если есть множество из n типов элементов и нужно на каждое из m мест расположить элемент какого-либо типа (типы элементов могут совпадать на разных местах), то количество вариантов этого будет n^m, так как выборы независимы. Количество размещений с повторениями определяется формулой:

$$\bar{A}_n^m = n^m .$$

Пример 2.6. Сколько можно составить двузначных чисел из 10 цифр, взятых по 2?

Решение.

Искомое число чисел $\bar{A}_{10}^2 = 10^2 = 100$.

Сочетания

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 2.7. Сколько различных смесей можно приготовить, если брать по два раствора из 10. при условии, что свойства смеси не зависят от порядка соединения растворов?

Решение.

Искомое число способов $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$

Пример 2.8. Сколькими способами из 10 спортсменов можно отобрать команду из 6 человек?

Решение.

Очевидно, команда из 6 человек является 6-членным подмножеством 10-членного множества, т.е. сочетанием из 10 элементов по 6. Следовательно, искомое число способов равно $C_{10}^6 = 210$.

Пример 2.9. В магазине 5 желтых роз, 4 красных розы, 2 лилии. Сколько разных букетов по 5 можно сделать?

Решение.

Искомое число способов $C_{11}^5 = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462$

ГЛАВА 3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1 Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Определение 1. Суммой А + В двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении события А, или события В, или обоих этих событий.

Определение 2. Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример 3.1. Из орудия произведены два выстрела и А – попадание при первом выстреле, В – попадание при втором выстреле, тогда А + В – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах. Таким образом для нахождения вероятности поражения цели после двух выстрелов необходимо сложить вероятности p(А) и p(В).

Пример 3.2. Событие А+В+С состоит в появлении одного из следующих событий: А; В; С; А и В; А и С; В и С; А и В и С.

Если два события А и В – несовместные, то А+В – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого. Как найти вероятности того, что наступит либо событие А, либо событие В?

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{A+B}) = \boldsymbol{P}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{P}(\mathbf{B})$$

Следствие: Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Пример 3.3. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Введем следующие обозначения:

событие A={появление красного шара}, причем $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$;

событие B={появление синего шара}, причем $P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Таким образом, искомая вероятность:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.4. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0.45, во вторую – 0.35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение.

События A={стрелок попал в первую область} и B={стрелок попал во вторую область} – несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения для несовместных событий применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.45 + 0.35 = 0.8.$$

3.2 Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Пример 3.5. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами только из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0.7, из B – 0.2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

Решение. События

A={пакет получен из города A},

B={пакет получен из города B},

C={пакет получен из города C}

образуют полную группу, т.к. консультационный пункт не получает пакеты из других городов, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице: P(A) + P(B) + P(C) = 1.
Отсюда искомая вероятность P(C) = 1 – P(A) – P(B) = 1 – 0.7 – 0.2 = 0.1.

3.3 Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое обозначают $\bar{A}$.

Пример 3.6. Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если A - попадание, то $\bar{A}$ – промах.

Пример 3.7. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» – противоположные.

Другие примеры: Бросание монеты и выпадение орла или решки, ребенок мальчик или девочка, цветок распустился или нет.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q. Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p + q = 1.$$

Пример 3.8. Вероятность того, что день будет дождливым, p=0.7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение.

События A={день дождливый} и B={день ясный} – противоположные и составляют полную группу, поэтому искомая вероятность

$q = 1 - p = 1 – 0.7 = 0.3.$

3.4 Теорема умножения вероятностей

Произведением двух событий A и B называют событие A*B, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Например, если A – деталь годная, B – деталь окрашенная, то A*B – деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A, B, C – появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то A*B*C — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

3.5 Условная вероятность

Мы определили случайное событие как событие, которое при осуществлении совокупности условий S, может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют безусловной; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют условной. Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 3.9. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании – (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B) = \frac{3}{5}$.

Этот же результат можно получить по формуле $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}, P(A)>0.$

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$. Найдем вероятность P(АВ) того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2=6\cdot 5=30$. Из этого числа исходов событию АВ благоприятствуют 3×3 = 9 исходов. Следовательно, $P(AB)=\dfrac{9}{30}=\dfrac{3}{10}$.

Искомая условная вероятность $P_A(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{3/10}{1/2}=\dfrac{3}{5}$.

Как видим, получен прежний результат.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились.

Заметим, что порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т.е. безразлично какое событие считать первым, вторым и т.д.

Пример 3.10. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков - конусный, а второй - эллиптический.

Решение.

Событие А = {первый валик окажется конусным}, событие В = {второй валик окажется эллиптическим}. При этом $P(A)=\frac{3}{10}$.

Условная вероятность события В, вычисленная в предположении, что А произошло $P_A(B)=\frac{7}{9}$.

По теореме умножения, искомая вероятность $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем:

$$P(B)=\frac{7}{10},\ P_B(A)=\frac{3}{9},\ P(B)\cdot P_B(A)=\frac{7}{30}.$$

Пример 3.11. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равна 0.8, а вторым (событие В) – 0.7.

Решение. События А и В независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.8=0.56\,.$$

Пример 3.12. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение.

Событие А ={появления герба первой монеты}, событие В={появления герба второй монеты}, $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$.

События А и В независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$

Пример 3.13. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7, а в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие А), $P(A) = \frac{8}{10}$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие В), $P(B) = \frac{7}{10}$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие С), $P(C) = \frac{9}{10}$.

Так как события А, В и С независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.504.$$

Пример 3.14. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение. Заметим, что появление только первого события A_1 равносильно появлению события $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ (появилось первое, и не появились второе и третье события).

Введем обозначения:

B_1 - появилось только событие A_1, т.е. $B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;

B_2 - появилось только событие A_2, т.е. $B_2 = A_2 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_3}$;

B_3 - появилось только событие A_3, т.е. $B_3 = A_3 \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$.

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3, будем искать вероятность $P(B_1+B_2+B_3)$ появления одного, безразлично какого из событий B_1, B_2, B_3.

Так как события B_1, B_2, B_3 несовместны, то применима теорема сложения

$$P(B_1+B_2+B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3). \qquad (*)$$

Остается найти вероятности каждого из событий B_1, B_2, B_3. События A_1, A_2, A_3 независимы, следовательно, независимы события $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$, поэтому к ним применима теорема умножения:

$$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3$$

Аналогично,

$$P(B_2) = P(A_2) \cdot P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_3}) = p_2 \cdot q_1 \cdot q_3,$$

$$P(B_3) = P(A_3) \cdot P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = p_3 \cdot q_1 \cdot q_2.$$

Подставив эти вероятности в выражение (*), найдем искомую вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + p_2 \cdot q_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_1 \cdot q_2.$$

3.6 Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий.

Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2 .... A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \dots \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

Произведение $q_1 \dots q_n$ означает вероятность не появления ни одного из событий. А выражение $1 - q_1 \dots q_n$ означает вероятность противоположного события для $q_1 \dots q_n$, т.е. противоположному к «не появлению ни одного события», а значит появлению хотя бы одного из них.

Частный случай. Если события A_1, A_2, ..., A_n имеют одинаковую вероятность, равную р, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий $P(A) = 1 - q^n$.

Пример 3.15. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p_1=0.8; p_2=0.7; p_3=0.9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, и A_3, (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.8 = 0.2$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0.7 = 0.3$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0.9 = 0.1$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.994$.

Пример 3.16. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0.9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие А).

Решение. События «машина работает» и «машина не работает» (в данный момент) – противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p + q = 1$.

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна $q = 1 - p = 1 - 0.9 = 0.1$.

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q^4 = 0.9999$.

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то на основании следствия из принципа практической невозможности маловероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

3.7 Принцип практической невозможности маловероятных событий и уровень значимости

При решении многих практических задач приходится иметь дело с событиями, вероятность которых весьма мала, т.е. близка к нулю. Можно ли считать, что маловероятное событие А в единичном испытании не произойдет? Такого заключения сделать нельзя, так как не исключено, хотя и мало вероятно, что событие А наступит.

Казалось бы, появление или не появление маловероятного события в единичном испытании предсказать невозможно. Однако длительный опыт показывает, что маловероятное событие в единичном испытании в подавляющем большинстве случаев не наступает. На основании этого факта принимают следующий «**принцип практической невозможности маловероятных событий»**: ***если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие не наступит.***

Естественно возникает вопрос: насколько малой должна быть вероятность события, чтобы можно было считать невозможным его появление в одном испытании? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Для задач, различных по существу, ответы разные. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0.01, то было бы недопустимым применять такие парашюты. Если же вероятность того, что поезд дальнего следования прибудет с опозданием, равна 0.01, то можно практически быть уверенным, что поезд прибудет вовремя.

Достаточно малую вероятность, которой (в данной определенной задаче) можно пренебречь, называют ***уровнем значимости***. На практике обычно принимают уровни значимости, заключенные между 0.01 и 0.05. Уровень значимости, равный 0.01, называют однопроцентным; уровень значимости, равный 0.02, называют двухпроцентным, и т. д.

Если случайное событие имеет вероятность, очень близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит. Разумеется, и здесь ответ на вопрос о том, какую вероятность считать близкой к единице, зависит от существа задачи.

Пример 3.17. В семье 4 девочки. Можно ли считать это маловероятным событием? Ответ зависит от уровня значимости. Проведем оценку для 5% уровня значимости. Вероятность рождения девочки p=0.5 и не зависит от номера испытания.

При n=4 $P_n(n) = p^n = 0.0625 = 6.25\%$. Это больше 5%.

При рождении пятой девочки n=5 и $P_n(n) = p^n = 0.03125 = 3.125\%$. Это меньше 5%.

Видимо для данной семьи следует увеличить значение p.

Задачи

1. В семье 2 ребенка. Найти вероятность того, что оба ребёнка мальчики.
2. В семье 2 ребенка. Найти вероятность того, что оба ребёнка мальчики, если известно что первый – мальчик.
3. Бросают две монеты. Найти вероятность того, что появятся «Орёл» и «Решка».
4. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появилась “решка”» и «появилось 3 очка».
5. У большой популяции дрозофилы 25% мух имеют мутацию глаз, 50% – мутацию крыльев, двойных мутаций нет ни у одной мухи. Какова вероятность того, что у наудачу выбранной мухи окажется какая-либо мутация?

6. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одинаковой стоимости. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
7. На вершину горы ведут 5 тропинок. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом спуститься с нее? Подъем и спуск

   а) должны происходить по разным тропинкам,

   б) могут происходить по одинаковым тропинкам
8. У одного студента 5 книг, у другого – 9. Все книги различные. Сколькими способами студенты могут произвести обмен:

   а) одной книги на книгу?

   б) 2 книги на 2 книги за 1 раз?

   в) 2 книги на 2 книги за 2 раза?
9. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнить переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского – на любой другой из этих 5 языков?
10. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Из этой урны последовательно извлечены черный и белый шары по одному. Какова вероятность того, что следующий шар будет белым?
11. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Из этой урны последовательно извлечены подряд два шара. Какова вероятность того, что

    а) оба шара белые

    б) сначала был белый шар, потом черный
12. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что на всех костях выпадает четное число?
13. Игральная кость брошена 3 раза. Какова вероятность того, что при этом все выпавшие грани равны 2?
14. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p, а для второго – 0.7. Известно, что вероятность попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0.35. Найдите p.

15. В ящике 10 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу достает 4 детали. Найдите вероятность того, что все взятые детали окрашенные.
16. Игральная кость брошена 3 раза. Какова вероятность того, что при этом все выпавшие грани различны?
17. На 6 одинаковых карточках написаны буквы «а», «в», «к», «М», «о», «с». Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «Москва»?
18. 2 стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Известно, что вероятность попадания в мишень для одного из стрелков равна 0.6, а для другого – 0.7. Найдите вероятность того, что:

    а) только один из стрелков попадет в мишень;

    б) хотя бы один из стрелков попадет в мишень;

    в) оба стрелка попадут в мишень;

    г) ни один из стрелков не попадет в мишень;

    д) ни один из стрелков не попадет в мишень.
19. Вероятность дождливого дня составляет 0.7. Найдите вероятность того, что:

    а) только один день будет дождливым;

    б) хотя бы один день будет дождливым;

    в) оба дня будут дождливыми;

    г) оба дня будут ясными;

    д) только первый день будет дождливым.
20. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.2. Произведено 10 выстрелов. Найдите вероятность поражения цели, если для этого достаточно хотя бы одно попадание.
21. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0.5. Какова вероятность, купив 5 билетов, выиграть:

    а) по всем пяти билетам;

    б) ни по одному билету;

в) хотя бы по одному билету?

22. Студент успел подготовить к экзаменам 20 вопросов из 25. В билете 3 вопроса, выбранных случайно. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных вопросов

    а) студент знает все 3?

    б) студент не знает ни один?

    в) студент знает только 2?

    г) студент знает не менее 2?

23. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне - 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих шаров наудачу взят один шар. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

24. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человек при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

25. Сколькими способами 3 различных подарка A, B и C можно сделать каким-то 3 из 15 лиц, если:

    а) никто не должен получать более одного подарка;

    б) подарок A должно получить лицо номер 1?

26. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит

    а) 5 человек?

    б) не менее 5 человек?

27. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из трех цифр?

28. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги стоят слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?

29. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.6, а для второго – 0.3.

В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

30. В одной урне 3 белых и 8 черных шаров, а в другой 5 белых и 7 черных шаров. Из первой урны вынимают 1 шар и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, белый.
31. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком p_1=0.35, вторым p_2=0.49. Первый сделал n_1=3, второй n_2=2 выстрела. Определить вероятность того, что цель не поражена.
32. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.
33. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: «а», «м», «р», «т», «ю». Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово «юрта».
34. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово «кукла»?
35. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?
36. Сколькими способами на шахматной доске можно указать:

    а) две клетки;

    б) две клетки одного цвета;

    в) две клетки разного цвета?
37. Имеются три письма, каждое из которых нужно послать по шести различным адресам. Сколькими способами можно осуществить рассылку писем, если:

    а) никакие два письма не посылать по одному адресу;

б) по одному адресу посылать более одного письма?

38. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых состоит не более чем из трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если:

а) повторение цифр в числах не разрешается;

б) разрешается повторение цифр?

39. Сколькими способами три различных подарка А, В и С можно сделать каким-то трем из пятнадцати лиц, если:

а) никто не должен получить более одного подарка;

б) подарок А должен получить определенное лицо?

40. В группе девять человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее двух человек?

41. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр, если первая цифра не равна нулю?

42. Проверьте то, что число трехбуквенных «слов», которые можно образовать из букв слова «гипотенуза», равно числу всех возможных перестановок букв слова «призма»?

43. Три дороги соединяют города А и В, четыре дороги соединяют города В и С. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В и вернуться в А также через В?

44. Сколькими способами можно расставить на полке семь различных книг, если:

а) две определенные книги должны стоять рядом;

б) эти две книги не должны стоять рядом?

45. Группу из двадцати студентов нужно разделить на три бригады, причем в первую бригаду должны входить три человека, во вторую - пять и в третью - двенадцать. Сколькими способами это можно сделать?

46. Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из три четных и три

нечетных цифр, причем никакая цифра не входит в число более одного раза?

47. В течение четырех недель студенты сдают четыре экзамена, в том числе два экзамена по математике. Сколькими способами можно распределить экзамены по неделям так, чтобы экзамены по математике не следовали один за другим?
48. Восемь человек должны сесть в два автомобиля, причем в каждом должно быть, по крайней мере, три человека. Сколькими способами они могут это сделать?
49. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 2 233 344 455?
50. Сколькими способами можно в строчку написать шесть плюсов и четыре минуса?
51. Найдите число всевозможных «слов» из букв слова «зоология». Сколько таких слов, в которых три буквы «о» стоят рядом?
52. Имеются двадцать наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено восемь наименований, во второй - семь наименований и в третий - пять наименований товаров?
53. Сколько различных вариантов хоккейной команды можно составить из десяти нападающих, пяти защитников и трех вратарей, если в состав каждой команды должно войти три нападающих, два защитника и один вратарь?
54. Сколькими способами можно распределить шесть различных предметов между тремя лицами так, чтобы каждое лицо получило по два предмета?
55. Пять девушек и три юноши играют в баскетбол. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по четыре игрока, если в каждой команде должно быть не менее одного юноши?

56. На десяти карточках написаны цифры 0. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Берут четыре карточки и составляют из цифр, записанных на них, четырехзначное число. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить таким образом?

57. Сколько можно подать сигналов из пяти различных флажков, одинаково поднимая их вверх в любом количестве и в любом порядке?

58. Эксперт оценивает качественный уровень трех видов изделий по потребительским признакам. Вероятность того, что изделию первого вида будет присвоен знак качества, равна 0.9; для изделия второго вида – 0.7. Найти вероятность того, что знак качества будет присвоен:

а) всем изделиям;

б) только одному изделию;

в) хотя бы одному изделию.

59. В партии товара, состоящей из 30 мужских пальто, находится 20 изделий местного производства. Товаровед наудачу отбирает три изделия. Какова вероятность, что все три изделия окажутся:

а) местного производства;

б) не местного производства?

60. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

61. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую - 5 и в третью - 12. Сколькими способами это можно сделать.

62. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

63. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

64. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0.95, во второе – 0.9, в третье – 0.8. Найти вероятность следующих событий:

   а) только одно отделение получит газеты вовремя;

   б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.
65. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0.95 для первого сигнализатора и 0.9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
66. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0.9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
67. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?
68. Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0.8, 0.7 и 0.6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.
69. Брошены две игральные кости. Событие А={выпадение шестерки на первой кости}. Событие В={сумма выпавших очков равна 7}. Являются ли события А и В независимыми?
70. В партии из 23 деталей находятся 10 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Используя классическое определение теории вероятности определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.
71. В ящике лежат шары: 4 белых, 10 красных, 8 зеленых, 9 коричневых. Из ящика вынимают один шар. Пользуясь теоремой сложения

вероятностей определить, какова вероятность, что шар окажется цветным (не белым)?

72. В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студенты знают ответы. Преподаватель выбирает из них два вопроса и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ.
73. На складе находятся 26 деталей, из которых 13 стандартные. Рабочий берет наугад две детали. Пользуясь теоремой умножения вероятностей зависимых событий, определить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.
74. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Результат округлите до сотых.
75. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.
76. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.
77. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одинаковой стоимости. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
78. В магазин поступает минеральная вода в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причем местный изготовитель поставляет 40% всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции 0.5%, а для иногородней 2%. Найти вероятность, того, что взятая наудачу бутылка окажется неразбитой. Какова ожидаемая доля (в %) разбитых бутылок?

79. Магазин приобретает чай у двух фабрик, при этом первая из них поставляет $\frac{2}{3}$ всего товара. Продукция высшего сорта для первой фабрики составляет 90%, а для второй 80%.Найти вероятность того, что купленная наугад пачка чая будет высшего сорта.

80. Для трех розничных торговых предприятий определен плановый уровень прибыли. Вероятность того, что первое предприятие выполнит план по прибыли, равна 90%, для второго она составляет 95%, для третьего 100%. Какова вероятность того, что плановый уровень прибыли будет достигнут:

   а) всеми предприятиями;

   б) только двумя предприятиями;

   в) хотя бы одним предприятием?

81. Для магазина потребительской кооперации куплены два холодильника. Вероятность того, что каждый из них выдержит гарантийный срок службы, составляет 90%. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока:

   а) оба холодильника не потребуют ремонта;

   б) только один из них потребует ремонта;

   в) хотя бы один не потребует ремонта.

82. Произведено три выстрела по цели из орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.75; при втором – 0.8; при третьем – 0.9. Определить вероятность того, что будет:

   а) три попадания;

   б) хотя бы одно попадание.

83. Контролер ОТК, проверив качество сшитых 20 пальто, установил, что 16 из них первого сорта, а остальные – второго. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу из этой партии трех пальто одно будет второго сорта.

84. Среди 20 поступающих в ремонт часов 8 нуждаются в общей чистке механизма. Какова вероятность того, что среди взятых одновременно наудачу 8 часов по крайней мере двое нуждаются в общей чистке механизма?

85. Среди 15 лампочек 4 стандартных. Одновременно берут наудачу две лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.

86. Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него квадрата?

87. Найти вероятность того, что из 10 книг, расположенных в случайном порядке, 3 определенные книги окажутся рядом.

88. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что все они:

а) разных цветов;

б) одного цвета?

89. Пакеты акций, имеющихся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0.5 (для каждого пакета). Сколько пакетов акций различных фирм нужно приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.96875, можно было ожидать доход хотя бы по одному пакету акций?

90. На связке 5 ключей. К замку подходит только один ключ. Найти вероятность того, что потребуется не более двух попыток открыть замок, если опробованный ключ в дальнейших испытаниях не участвует.

91. В магазине 10 телевизоров, 3 из них имеют дефекты. Какова вероятность того, что посетитель купит телевизор, если для выбора телевизора без дефектов понадобится не более трех попыток?

92. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0.2, второй – 0.3, третий – 0.4. События,

состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

93. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города:

    а) 3 сбербанка;

    б) хотя бы один?

94. В магазине 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность того, что среди 5 поданных в течение дня телевизоров окажется более трех импортных телевизоров, предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.

95. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Известно, что номер телефона не начинается с нуля. Какова вероятность того, что в нем все цифры:

    а) различные;

    б) одинаковые;

    в) нечетные?

96. В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой – 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 4 шара. Какова вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

97. При приеме партии изделий подвергается проверке половина изделий. Условие приемки – наличие брака в выборке менее 2 %. Какова вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

98. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равно соответственно 0.6, 0.5 и 0.8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом:

а) по 2 дисциплинам;

б) хотя бы по 2 дисциплинам.

99. На фирме работают 8 аудиторов, из которых 3 – высокой квалификации, и 5 программистов, из которых 2 – высокой квалификации. В командировку надо отправить группу из 3 аудиторов и 2 программистов. Какова вероятность того, что в этой группе окажется по крайней мере 1 аудитор высокой квалификации и хотя бы один программист высокой квалификации, если каждый специалист имеет равные возможности поехать в командировку?

100. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в отношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что:

а) приобретенное изделие окажется стандартным;

б) приобретенное изделие оказалось стандартным.

Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой.

101. Для проведения соревнования 16 волейбольных команд разбиты по жребию на 2 подгруппы (по 8 команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся:

а) в разных подгруппах;

б) в одной подгруппе.

102. Комиссия по качеству раз в месяц проверяет качество продуктов в двух из 30 магазинов, среди которых находятся и два известным всем магазина. Какова вероятность того, что в течение месяца они оба будут проверены?

Глава 4. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Законом распределения дискретной случайной величины (X) называется всякое соотношение, устанавливающее связь между всеми возможными значениями случайной величины (x_1, x_2, ... x_n) и соответствующими им вероятностями ($p_1, p_2, ..., p_n$). При этом события (x_1, x_2, ... x_n) образуют полную группу (т.е. появление одного из них является достоверным событием), что означает $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Про случайную величину X в таком случае говорят, что она подчинена данному закону распределения.

Задать закон распределения можно таблично.

Пример 4.1. Есть 100 лотерейных билетов, из них 1 выигрывает 10 руб, а 10 – 1 рубль, остальные без выигрыша. Зададим закон распределения таблично

X	10 руб	1 руб	0 руб
P	0.01	0.10	0.89

Пример 4.2. Из урны, в которой лежат 2 белых и 8 черных шаров, последовательно вынимают шары до тех пор, пока не появиться черный шар. Число Y вынутых при этом шаров есть дискретная случайная величина. Составим закон распределения ее вероятностей.

Решение. Возможными значениями величины Y являются, очевидно, 1, 2, 3. Событие Y = 1 означает, что уже первый шар будет черным; поэтому его вероятность равна $P(Y=1) = \frac{8}{10}$.

Событие Y = 2 означает, что приходится вынуть два шара, причем первый будет белым, а второй - черным. По правилу умножения вероятностей получим $P(Y=2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9}$.

Наконец, событие Y = 3 означает, что первые два шара оказались белыми, а третий - черным. Последовательно применяя (6.9) два раза, получим $P(Y=3)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot 1$. Последний сомножитель 1 означает, что появление третьим шаром черного при условии, что до этого вынимались два белых, является достоверным событием.

Таким образом, таблица распределения вероятностей имеет вид

Y	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

Сумма всех найденных вероятностей согласно равна единице, что может служить для контроля произведенных вычислений.

4.1 Формула Бернулли

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n-k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n\text{-}k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. C_n^k. Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий, искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления k раз события A *в* n испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}.$$

Полученную формулу называют ***формулой Бернулли.***

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при 4 испытаниях событие *ВЫПАДЕТ ОРЕЛ* осуществится ровно 2 раза и, следовательно, не осуществится $n-k$ = 2 раза. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие *ВЫПАДЕТ ОРЕЛ* повторилось ровно k раз в определенной последовательности.

Например, если речь идет о появлении события *ВЫПАДЕТ ОРЕЛ* два раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события:

$$A\,A\,\overline{A}\,\overline{A},\ A\,\overline{A}\,\overline{A}\,A,\ \overline{A}\,\overline{A}\,A\,A,\ A\,\overline{A}\,A\,\overline{A},\ \overline{A}\,A\,A\,\overline{A},\ A\,\overline{A}\,A\,\overline{A},$$

Очевидно что для данной задачи число сочетаний и вероятности p и q определяются следующим образом: $C_4^2 = 6,\ p = 0.5,\ q = 0.5$.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_4(2)$ означает вероятность того, что в 4 испытаниях событие появится ровно 2 раза и, следовательно, не наступит 2 раза. Поставленную задачу можно решить с помощью формулы Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, в данной задаче $P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = 6 \cdot 0.25 \cdot 0.25 = 0.375$.

Пример 4.3. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0.75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0.75$. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q=1-p=1-0.75=0.25$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна $P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = 0.3$.

Пример 4.4. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X - числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты $p = 0.5$, следовательно, вероятность непоявления «герба» $q = 1 - p = 0.5$.

При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: x_1=2, x_2=1, x_3=0. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$p_1(2) = C_2^2 \cdot p^2 = 0.5^2 = 0.25$$

$$p_2(1) = C_2^1 \cdot p \cdot q = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5$$

$$p_3(0) = C_2^0 \cdot q^2 = 0.5^2 = 0.25$$

Запишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	0.25	0.5	0.25

Контроль: 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1.

То число успехов k_0, которому при заданном n соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(k_0)$, называется наиболее вероятным числом успехов.

Для нахождения наиболее вероятного числа успехов k_0 по заданным n и p можно воспользоваться неравенствами

$$n \cdot p - q \le k_0 \le n \cdot p + p$$

или правилом: если число $np + p$ не целое, то k_0 равно целой части этого числа ($k_0 = [np + p]$); если же $np + p$ целое, то k_0 имеет два значения $np–q$ и p.

Задачи

1. Какова вероятность того, что в 8 семьях родится 5 девочек?
2. По данным статистики 2% приготовленных растворов неправильные. Найдите вероятность того, что из 6 растворов 2 неправильные.
3. В семье 5 детей. Найдите вероятность того, что среди детей 2 мальчика, если вероятность рождения мальчика принимается 0.5.
4. Найдите наиболее вероятное число выпаданий шестерки при 46 бросаниях игральной кости.
5. Контрольное задание состоит из 10 вопросов, предусматривающих ответы «да» и «нет». Найдите наиболее вероятное число правильных

ответов, которые даст учащийся, если он станет выбирать ответ по каждому вопросу наудачу. Найдите вероятность наиболее вероятного числа правильных ответов А если существует 4 варианта ответа?

6. Вероятность изготовления стандартной детали 0.95. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наиболее вероятное число нестандартных деталей в ней равнялось 55?
7. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0.8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не меньше 8 автомашин.
8. Вероятность того, что игровой автомат при опускании монеты сработает на выигрыш, равна 0.03. Найдите наиболее вероятное число случаев проигрыша и выигрыша, если будет опущено 150 монет.
9. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0.97. Сколько нужно опустить монет, чтобы наиболее вероятное число случаев правильной работы автомата было равно 100?
10. Контрольное задание состоит из 5 вопросов, на каждый из которых дается 4 варианта ответа, причем один из них правильный, а остальные неправильные. Найдите вероятность того, что учащийся, не знающий ни одного вопроса, даст:

    а) 3 правильных ответа;

    б) не менее 3 правильных ответов

    (предполагается, что учащийся выбирает ответы наудачу).
11. Производится 10 независимых выстрелов по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0.2. Найдите:

    а) наиболее вероятное число попаданий;

    б) вероятность того, что число попаданий равно наиболее вероятному числу попаданий.

12. Проведено 5 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 2 монет. Найдите вероятность того, что ровно в 3 испытаниях появились по 2 герба.
13. Представить закон распределения X для серии испытаний в виде таблицы при $n = 3$; $p(\text{A}) = 0.1$.
14. Представить закон распределения X для серии испытаний в виде таблицы при $n = 3$; $p(\text{A}) = 0.2$.
15. Представить закон распределения X для серии испытаний в виде таблицы при $n = 4$; $p(\text{A}) = 0.3$.
16. Представить закон распределения X для серии испытаний в виде таблицы при $n = 3$; $p(\text{A}) = 0.4$.
17. Представить закон распределения X для серии испытаний в виде таблицы при $n = 3$; $p(\text{A}) = 0.5$.
18. Эксперимент с бросанием монеты проведен 4 раза. Какова вероятность того, что герб выпадет не более:

    а) 1 раза;

    б) 2 раз;

    в) 3 раз;

    г) 4 раз.
19. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность:

    а) три автомобиля;

    б) менее трех.
20. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины – числа импортных из четырех наудачу выбранных телевизоров.
21. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0.7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0.8. На первом станке изготовлены две

детали, на втором – три. Найти вероятность того, что детали первого сорта.

22. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут:

    а) три;

    б) не менее трех;

    в) четыре.

23. В урне содержится 6 черных и 5 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шаров. Найти вероятность, что среди них имеются:

    а) 3 белых шаров;

    б) меньше, чем 3 белых шаров;

    в) хотя бы один белый шар.

24. Бросают три монеты. Найти вероятность того, что:

    а) на всех монетах появится герб

    б) хотя бы на одной монете появится герб;

    в) только на двух монетах появиться герб;

    г) только на одной монете появится герб;

    д) на ни одной монете не появится герб.

25. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0.6. Куплено 16 билетов. Найти наивероятнейшее число выигрышных билетов и соответствующую вероятность.

26. Абонент забыл последнюю цифру семизначного номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

27. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1997.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1997.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 2. – М.: Высшая школа, 1986.
4. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юнити, 2002.
5. Математическое бюро. Примеры по теории вероятности. Режим доступа http://www.matburo.ru/ex_subject.php?p=tv
6. Теория вероятностей - бесплатные задачи с решениями. Режим доступа http://matecos.ru/terver-gotresheniya/gotovye-zadachi/teoriya-verotnostej-gotovye-zadachi.html
7. ЕГЭ онлайн тест. Режим доступа http://www.ege-online-test.ru/