И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 514.163

Д.А. КАЛИНИН

ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ПАРЫ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ [1]

Введение

Канонические типы пары билинейных форм в вещественном линейном пространстве были найдены в [1]. С их помощью в [2] были позднее определены формы проективно-эквивалентных римановых связностей.

В [3] с помощью тех же канонических типов билинейных форм были найдены H-проективно-эквивалентные римановы связности четырехмерных келеровых многообразий. Однако, даже в четырехмерном случае использование вещественных канонических типов приводит к большим вычислительным трудностям. Это указывает на необходимость использования канонических типов, которые учитывали бы комплексную структуру касательного пространства. Определению указанных типов посвящена настоящая статья.

Необходимо заметить, что найденные нами канонические типы пары эрмитовых форм хорошо согласуются по своему виду с блоками матриц, возникающих в случае пар симметричных форм и симметричной и антисимметричной форм, исследованных в [4], [5]. Указанные статьи посвящены изучению B-пространств и S-пространств[2], частным случаем которых являются келеровы многообразия. Имеющаяся аналогия видов билинейных форм позволяет предположить, что полученные нами результаты могут быть обобщены на более широкий класс пространств с алгебраическими структурами.

С помощью результатов, полученных в данной работе, автором определены H-проективно эквивалентные римановы связности на келеровом многообразии произвольной размерности и сигнатуры [6].

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе излагаются необходимые сведения о комплексных и эрмитовых линейных пространствах, а также вводится понятие приведенной характеристики Сегре эрмитовой формы. Во втором разделе определяются канонические типы пары эрмитовых форм a, g в случае вещественных корней характеристического уравнения $\det(a - \lambda g)$. В третьем разделе определяются канонические типы в случае комплексных корней и формулируется основная теорема.

Автор благодарен рецензенту за ценные библиографические сведения и другие полезные замечания.

1. Приведенная характеристика Сегре

Пусть V есть $2n$-мерное вещественное линейное пространство с определенной на нем комплексной структурой J и пусть g, a — два эрмитовых скалярных произведения в V.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01031).

[2] Риманово многообразие (M, g) называется B-пространством (S-пространством), если на M задано ковариантно-постоянное тензорное поле F^i_j, для которого тензор $F^k_i g_{kj}$ симметричен (антисимметричен).

Известно [7], [8], что если одна из этих форм, например g, положительно определена, то формы приводятся к каноническому виду $g = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \theta^\alpha \theta^{\overline{\alpha}}$, $a = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \theta^\alpha \theta^{\overline{\alpha}}$.

Мы получим решение этой задачи в общем случае, т. е. найдем канонический вид пары эрмитовых форм в случае произвольной сигнатуры форм g, a. При этом будет использован подход, разработанный в [1] для приведения пары билинейных форм к каноническому виду.

Пусть g, a — пара эрмитовых форм в V. Эти формы могут быть однозначно продолжены до симметричных билинейных форм в комплексификации $V^c \equiv V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ пространства V, удовлетворяющих условиям[1]

1) $g(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{g(Z,W)}$, $a(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{a(Z,W)}$ для всех $Z, W \in V^c$,
2) $g(Z,W) = 0$, $a(Z,W) = 0$ для всех $Z, W \in V^{(1,0)}$.

Эти формы в базисе Z_α, $Z_{\overline{\alpha}}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, адаптированном к комплексной структуре J, имеют следующие не равные нулю компоненты $g_{\alpha\overline{\beta}} = g_{\overline{\beta}\alpha} = \overline{g_{\overline{\alpha}\beta}}$, $a_{\alpha\overline{\beta}} = a_{\overline{\beta}\alpha} = \overline{a_{\overline{\alpha}\beta}}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$.

Поскольку матрица $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ невырождена, можно рассмотреть линейные операторы $K_a : V^{(1,0)} \to V^{(1,0)}$, $\overline{K_a} : V^{(0,1)} \to V^{(0,1)}$, определенные равенствами $a(X,Y) = g(K_a X, Y)$, $a(W,Z) = g(\overline{K_a} W, Z)$, где $X, W \in V^{(1,0)}$ и $Y, Z \in V^{(0,1)}$ соответственно. Матричные элементы операторов K_a, $\overline{K}_a$ в базисе Z_α, $Z_{\overline{\alpha}}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, имеют вид $K^\alpha_\beta = g^{\alpha\overline{\mu}} a_{\beta\overline{\mu}}$, $K^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}} = g^{\overline{\alpha}\mu} a_{\overline{\beta}\mu}$. Очевидно,

$$K^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}} = \overline{K^\alpha_\beta}. \tag{1}$$

Пусть оператор K_a имеет k различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$, являющихся корнями характеристического уравнения $\det(K_a - \lambda E) = 0$, и элементарные делители λ-матрицы $(K_a - \lambda E)$ определены *характеристикой Сегре* [8]

$$\chi = [(m^1_1 \ldots m^1_{s_1}) \ldots (m^k_1 \ldots m^k_{s_k})], \tag{2}$$

так что корень λ_A имеет кратность $r_A = \sum\limits_{s=1}^{s_A} m^A_s$. Известно, что собственные значения и характеристика Сегре линейного оператора не зависят от выбора базиса и определяют его алгебраическую структуру.

Характеристику Сегре χ линейного оператора K_a, соответствующего эрмитовому скалярному произведению a, назовем *приведенной характеристикой Сегре билинейной формы* a (относительно g).

Оператор $\overline{K}_a : V^{(0,1)} \to V^{(0,1)}$ в силу (1) имеет ту же характеристику Сегре (2) и собственные значения $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k$. Отсюда следует, что характеристика Сегре ξ линейного оператора $\mathcal{K}_a$, определенного равенством $a(X,Y) = g(\mathcal{K}_a X, Y)$, $X, Y \in V$, имеет вид

$$\xi = [(m^1_1 m^1_1 \ldots m^1_{s_1} m^1_{s_1}) \ldots (m^{k_1}_1 m^{k_1}_1 \ldots m^{k_1}_{s_{k_1}} m^{k_1}_{s_{k_1}})(m^{k_1+1}_1 \ldots m^{k_1+1}_{s_{k_1+1}})$$
$$\overline{(m^{k_1+1}_1 \ldots m^{k_1+1}_{s_{k_1+1}})} \ldots (m^{k_1+k_2}_1 \ldots m^{k_1+k_2}_{s_{k_1+k_2}})\overline{(m^{k_1+k_2}_1 \ldots m^{k_1+k_2}_{s_{k_1+k_2}})}],$$

где собственные значения λ_A, $A = 1, \ldots, k_1$, вещественны, а λ_A, $A = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2$, комплексны и черта над числами m^A_s означает, что они соответствуют комплексно сопряженному собственному значению $\overline{\lambda_A}$. Характеристика ξ совпадает с *характеристикой билинейной формы* a (см., напр., [2]).

Положим $n^A_s = \sum\limits_{B=1}^{A-1} r_B + \sum\limits_{p=1}^{s-1} m^A_p$. Кроме того, множество индексов $I \equiv \{1, \ldots, n\}$ разобьем на подмножества $I^A_s = \{p \in I \mid p = n^A_s + 1, \ldots, n^A_s + m^A_s\}$ и обозначим $I_A \equiv \bigcup\limits_{s=1}^{s_A} I^A_s$.

[1] Линейное пространство V^c распадается в прямую сумму подпространств $V^{(0,1)}$ и $V^{(1,0)}$, соответствующих собственным значениям $\pm i$ оператора J.

Производя невырожденное линейное преобразование базиса $Z'_\alpha = C^\beta_\alpha Z_\beta$, $\det(C^\alpha_\beta) \neq 0$ в $V^{(1,0)}$, можно привести матрицу (K^α_β) к жорданову виду [7], [8]

$$(K^\alpha_\beta) = \begin{pmatrix} K^1_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & K^1_{s_1} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & K^k_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & K^k_{s_k} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где K^A_s, $A = 1, \dots, k$, $s = 1, \dots, s_A$, есть m^A_s-мерные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_A & 1 & & & \\ & \lambda_A & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_A & 1 \\ & & & & \lambda_A \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В базисе $Z'_{\overline{\alpha}}$, $\alpha = 1, \dots, n$, пространства $V^{(0,1)}$ матрица оператора $\overline{K}_a$ определяется формулами (3), (4), в которых λ_A следует заменить на $\overline{\lambda_A}$. Заметим, что базис Z'_α, $Z'_{\overline{\alpha}}$, $\alpha = 1, \dots, n$, адаптирован комплексной структуре J в V. В дальнейшем будем считать, что матрица (K^α_β) приведена к виду (3), и штрихи в обозначении базиса будем опускать.

Действие операторов K_a, $\overline{K_a}$ на векторы базиса Z_α, $Z_{\overline{\alpha}}$ определяется формулами

$$\begin{aligned} K_a(Z_\alpha) &= \lambda_\alpha Z_\alpha + \Delta_\alpha Z_{\alpha-1}, \\ \overline{K_a}(Z_{\overline{\alpha}}) &= \overline{\lambda_\alpha} Z_{\overline{\alpha}} + \Delta_\alpha Z_{\overline{\alpha-1}}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda_\alpha = \lambda_A$, если $\alpha \in I_A$; $\Delta_\alpha = 0$, если $\alpha = n^A_s + 1$ для каких-либо $A = 1, \dots, k_1 + k_2$, $s = 1, \dots, s_A$; и $\Delta_\alpha = 1$ в остальных случаях. Отсюда получим $K^\beta_\alpha = \lambda_\alpha \delta^\beta_\alpha + \Delta_\alpha \delta^\beta_{\alpha-1}$, $K^{\overline{\beta}}_{\overline{\alpha}} = \overline{\lambda_\alpha} \delta^\beta_\alpha + \Delta_\alpha \delta^\beta_{\alpha-1}$, следовательно, $a_{\alpha\overline{\beta}} = \lambda_\alpha g_{\alpha\overline{\beta}} + \Delta_\alpha g_{\alpha-1\overline{\beta}}$, $a_{\overline{\beta}\alpha} = \overline{\lambda_\beta} g_{\alpha\overline{\beta}} + \Delta_\beta g_{\alpha\overline{\beta-1}}$.

В силу симметричности формы a найдем

$$(\lambda_\alpha - \overline{\lambda_\beta}) g_{\alpha\overline{\beta}} + \Delta_\alpha g_{\alpha-1\overline{\beta}} - \Delta_\beta g_{\alpha\overline{\beta-1}} = 0. \tag{6}$$

Полагая $\alpha = n^A_s + 1$, $\beta = n^B_p + 1$, получим $(\lambda_A - \overline{\lambda_B}) g_{n^A_s+1\ \overline{n^B_p+1}} = 0$. Отсюда с помощью (6) выведем $g_{\alpha\overline{\beta}} = 0$ при $\alpha \in I^A_s$, $\beta \in I^B_p$, $\lambda_A \neq \overline{\lambda_B}$. Следовательно,

$$g_{\alpha\overline{\beta}} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in I_A, \ \ \beta \in I_B, \ \ \lambda_A \neq \overline{\lambda_B}. \tag{7}$$

В силу невырожденности матрицы $G = (g_{\alpha\overline{\beta}})$ из этой формулы следует, что в приведенной характеристике (2) билинейной формы a каждому числу m^A_s, соответствующему комплексному собственному значению $\lambda_A \neq \overline{\lambda_A}$, сопоставляется такое же число, соответствующее комплексно сопряженному собственному значению $\overline{\lambda_A}$. Доказана

Лемма 1. *Пусть g, a — два эрмитовых скалярных произведения в вещественном линейном пространстве V с комплексной структурой J. Тогда приведенная характеристика Сегре билинейной формы a имеет вид*

$$\begin{aligned} \chi = [(m^1_1 \dots m^1_{s_1}) \dots (m^{k_1}_1 \dots m^{k_1}_{s_{k_1}}) (m^{k_1+1}_1 \dots m^{k_1+1}_{s_{k_1+1}}) \overline{(m^{k_1+1}_1 \dots m^{k_1+1}_{s_{k_1+1}})} \dots \\ (m^{k_1+k_2}_1 \dots m^{k_1+k_2}_{s_{k_1+k_2}}) \overline{(m^{k_1+k_2}_1 \dots m^{k_1+k_2}_{s_{k_1+k_2}})}], \end{aligned} \tag{8}$$

где числа m_s^A, $A = 1, \dots, k_1$, соответствуют вещественным, а числа m_s^A, $A = k_1+1, \dots, k_1+k_2$, — комплексным корням характеристического уравнения $\det(a - \lambda g) = 0$.

Как и в случае характеристики (2), произведем разбиение множества индексов $I = \{1, \dots, n\}$ на подмножества. Положим $n_s^A = \sum\limits_{B=1}^{A-1} r_B + \sum\limits_{p=1}^{s-1} m_p^A$ при $A = 1, \dots, k_1$ и $n_s^A = \sum\limits_{B=1}^{k_1} r_B + 2 \sum\limits_{B=k_1+1}^{A-1} r_B + 2 \sum\limits_{p=1}^{s-1} m_p^A$ при $A = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$. Тогда $I_s^A = \{p \in I \mid p = n_s^A + 1, \dots, n_s^A + m_s^A\}$ при $A = 1, \dots, k_1 + k_2$ и $\overset{*}{I}{}_s^A = \{p \in I \mid p = n_s^A + m_s^A, \dots, n_s^A + 2m_s^A\}$ при $A = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$, кроме того, обозначим $I_A \equiv \bigcup\limits_{s=1}^{s_A} I_s^A$, $\overset{*}{I}_A \equiv \bigcup\limits_{s=1}^{s_A} \overset{*}{I}{}_s^A$.

Из (7) следует

Лемма 2. *Пусть g, a — два эрмитовых скалярных произведения в вещественном линейном пространстве V с комплексной структурой J и билинейная форма a имеет характеристику Сегре (8), причем числа m_s^A, $A = 1, \dots, k_1$, $s = 1, \dots, s_A$, соответствуют вещественным, а числа m_s^A, $A = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$, $s = 1, \dots, s_A$, — комплексным корням характеристического уравнения* $\det(a - \lambda g) = 0$. *Пусть $\{Z_\alpha, Z_{\overline{\alpha}}\}$, $\alpha = 1, \dots, n$, — какой-либо базис в V, адаптированный к комплексной структуре J. Тогда матрица $G = (g_{\alpha\overline{\beta}})$ имеет блочно диагональный вид*

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & G_{k_1} & & & \\ & & & G_{k_1+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & G_{k_1+k_2} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Перейдем к определению структуры матриц G_A. Рассмотрим по отдельности случай вещественных и комплексных λ_A.

2. Канонические типы пары эрмитовых форм. Случай вещественных корней характеристического уравнения

Пусть $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$. Будем считать, что $A = 1$, т. е. блок G_A стоит в левом верхнем углу матрицы G и обозначим для удобства $m_s^1 = m_s$, $s = 1, \dots, s_1$. Не уменьшая общности, можно ограничиться случаем $s_1 = 2$, $m_1 \leq m_2$, т. к. при $s_A > 2$ исследование проводится по индукции аналогично случаю $s_1 = 2$, а структура матрицы G_1 при $s_1 = 1$ является частным случаем структуры этой матрицы при $s_1 = 2$.

При $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$ из (6) следует $\Delta_\alpha g_{\alpha-1\overline{\beta}} - \Delta_\beta g_{\alpha\overline{\beta-1}} = 0$, $\alpha, \beta = 1, \dots, m_1 + m_2$, отсюда, рассматривая различные значения индексов $\alpha, \beta = 1, \dots, m_1 + m_2$, найдем, что (при $m_1 \leq m_2$) матрица G_1 имеет вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} & & \alpha_1 & & & & \gamma_1 \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \alpha_1 & \cdot & \alpha_{m_1} & & \gamma_1 & \cdot & \gamma_{m_1} \\ & & & & & & \beta_1 \\ & & \overline{\gamma_1} & & & \cdot & \beta_2 \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{\gamma_1} & \cdot & \overline{\gamma_{m_1}} & \beta_1 & \beta_2 & \cdot & \beta_{m_2} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Рассмотрим сначала случай $m_1 < m_2$. Так как матрица G_1 невырождена, то $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$, в противном случае, раскладывая определитель $\det(G_1)$ по элементам первой строки, будем получать миноры (m_1+m_2-1)-го порядка, у которых одна строка состоит из нулей, т. е. получим $\det(G_1)=0$, что в силу леммы 2 противоречит предположению о невырожденности матрицы G.

Назовем преобразования базиса, сохраняющие соотношения (5), *допустимыми.* Совершим преобразование[1]

$$Z'_\mu = \sigma^\mu Z_1 + \sigma^{\mu-1} Z_2 + \dots + \sigma^1 Z_\mu, \quad Z'_\nu = Z_\nu, \quad \mu = 1,\dots,m_1, \ \ \nu > m_1.$$

Это преобразование является допустимым и, следовательно, не меняет форму (10) матрицы G_1. Отсюда имеем

$$\alpha'_\mu = g(Z'_\mu, Z'_{m_1}) = g(\sigma^\mu Z_1 + \dots + \sigma^1 Z_\mu, \sigma^{m_1} Z_1 + \dots + \sigma^1 Z_{m_1}) = \\ = (\sigma^\mu \overline{\sigma^1} + \sigma^1 \overline{\sigma^\mu})\alpha_1 + R(\alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \sigma^1, \dots, \sigma^{\mu-1}, \overline{\sigma^1}, \overline{\sigma^{\mu-1}}), \quad (11)$$

где $\mu = 2,\dots,m_1$, а R есть целая рациональная функция. Так как $\alpha_1, \sigma_1 \neq 0$, то уравнение $(\sigma^\mu \overline{\sigma^1} + \overline{\sigma^\mu}\sigma^1)\alpha_1 + R = 0$ всегда имеет решение $\sigma^\mu = \sigma^\mu(\alpha_1,\dots,\alpha_\mu,\ \sigma^1,\dots,\sigma^{\mu-1}, \overline{\sigma^1},\dots,\overline{\sigma^\mu-1})$. Подставляя это решение в (11), обратим в нуль все α'_μ, $\mu=2,\dots,m_1$. Аналогично можно сделать равными нулю β'_ν, $\nu=2,\dots,m_2$. Совершая, кроме того, допустимое преобразование $Z''_\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha'_1}} Z'_\mu$, $\mu = 1,\dots,m_1$, $Z''_\nu = \frac{1}{\sqrt{\beta'_1}} Z'_\nu$, $\nu=1,\dots,m_2$, можно сделать все $\alpha''_1, \beta''_1 = \pm 1$.

Итак, пусть Z_μ, $\mu = 1,\dots,m_1+m_2$, — базис, в котором $\alpha_1,\beta_1=\pm1$, $\alpha_\mu,\beta_\nu = 0$, $\mu=2,\dots,m_1$, $\nu = 2,\dots,m_2$. Рассмотрим еще одно допустимое преобразование базиса $Z'_{\nu+m_2} = Z_{\nu+m_2} - \overline{\pi^\nu} Z_1 - \dots - \overline{\pi^1} Z_\nu$, $\nu=1,\dots,m_1$, $Z'_\zeta = Z_\zeta$, $\quad \zeta > m_1+m_2$, $\quad Z'_\mu = Z_\mu$, $\mu=1,\dots,m_2$. В новом базисе имеем $\gamma'_\mu = g(Z'_\mu, Z'_{m_1+m_2}) = g(Z_\mu, Z_{m_1+m_2} - \overline{\pi^{m_1}} Z_1 - \dots - \overline{\pi^1} Z_{m_1}) = \gamma_\mu - \pi_\mu \alpha_1$, $\mu = 1,\dots,m_1$. Полагая $\pi_\mu = \gamma_\mu/\alpha_1$, обратим в нуль γ'_μ, $\mu=1,\dots,m_1$.

В случае $m_1 = m_2$ возможна ситуация, когда $\alpha_1 = 0$ или $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$ (если бы и γ_1 равнялось нулю, то матрица G_1 оказалась бы вырожденной). Применяя допустимое преобразование базиса $Z'_\alpha = Z_\alpha + \tau^1 Z_{m_1+\alpha} + \dots + \tau^\alpha Z_{m_1+1}$, $\alpha = 1,\dots,m_1$, $Z'_\beta = Z_\beta$, $\beta > m_1$, можно сделать $\alpha'_1 \neq 0$. Аналогично можно сделать не равным нулю β_1 и свести задачу к рассмотренной выше.

3. Канонические типы пары эрмитовых форм. Случай комплексных корней характеристического уравнения

Рассмотрим случай комплексного собственного значения $\lambda_A \neq \overline{\lambda_A}$. Обозначим через $\widetilde{I}_A = I_A \bigcup \overset{*}{I}_A$ множество всех индексов, соответствующих паре комплексно сопряженных собственных значений λ_A, $\overline{\lambda_A}$. Согласно лемме 2 множеству $\widetilde{I}_A$ в матрице $G = (g_{\alpha\overline{\beta}})$ соответствует блок G_A. Не ограничивая общности, будем считать, что этот блок стоит в левом верхнем углу матрицы G, т.е. $A=1$, $\widetilde{I}_1 = \{1,\dots,\widetilde{l}\}$, причем индексы $\alpha = 1,\dots,l_1$ соответствуют корню λ_1, а индексы $\alpha = l_1+1,\dots,l_1+l_2 = \widetilde{l}$ — корню $\overline{\lambda_1}$. Из (7) следует, что не равны нулю только такие элементы $g_{\alpha\overline{\beta}}$ матрицы G_1, для которых $\alpha = 1,\dots,l_1$, $\beta = l_1+1,\dots,\widetilde{l}$ или $\beta = 1,\dots,l_1$, $\alpha = l_1+1,\dots,\widetilde{l}$. Отсюда в силу невырожденности матрицы G_1 следует $l_1 = l_2 = l = \sum\limits_{s=1}^{s^1} m^1_s$, $\widetilde{l} = 2l$. Обозначим для удобства $m_s = m^1_s$, $s = 1,\dots,s_1$. Как и для вещественных корней, достаточно рассмотреть случай $s_1 = 2$, $m_1 \leq m_2$. Если $s_1 > 2$ или $s_1 = 1$, то рассмотрение проводится аналогично.

С помощью (6) найдем, что при $s_1 = 2$ матрица G_1 имеет вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}_1 \\ (\mathcal{G}_1)^* & 0 \end{pmatrix},$$

[1]Такое преобразование рассматривалось П.А. Широковым [8], а затем А.З. Петровым [1] в задаче о приведении пары билинейных форм к каноническому виду.

где звезда обозначает эрмитово сопряжение и

$$\mathcal{G}_1 = \begin{pmatrix} & & \alpha_1 & & & & \gamma_1 \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \alpha_1 & \cdot & \alpha_{m_1} & & \gamma_1 & \cdot & \gamma_{m_1} \\ & & & & & & \beta_1 \\ & & \zeta_1 & & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \beta_{m_2-1} \\ \zeta_1 & \cdot & \zeta_{m_1} & \beta_1 & \cdot & \beta_{m_2-1} & \beta_{m_2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала случай $m_1 < m_2$. Поскольку матрица G_1 невырождена, $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$. Перейдем к допустимому базису Z'_α по формулам

$$\begin{aligned} &Z'_\mu = \sigma^\mu Z_1 + \sigma^{\mu-1} Z_2 + \cdots + \sigma^1 Z_\mu, \\ &Z'_{l+\mu} = \sigma^\mu Z_{l+1} + \sigma^{\mu-1} Z_{l+2} + \cdots + \sigma^1 Z_{l+\mu}, \quad \mu = 1, \ldots, m_1, \\ &Z'_\nu = Z_\nu, \quad \nu = m_1+1, \ldots, m_1+m_2, \;\; l+m_1+1, \ldots, 2l. \end{aligned} \tag{12}$$

В новом базисе имеем

$$\begin{aligned} \alpha'_\mu = g(Z'_\mu, Z'_{l+m_1}) = g(\sigma^\mu Z_1 + \cdots + \sigma^1 Z_\mu, \sigma^{m_1} Z_{l+1} + \cdots + \sigma^1 Z_{l+m_1}) = \\ = (\sigma^\mu \overline{\sigma^1} + \overline{\sigma^\mu} \sigma^1)\alpha_1 + R(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \sigma^1, \ldots, \sigma^{\mu-1}, \overline{\sigma^1}, \ldots, \overline{\sigma^{\mu-1}}), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\mu = 2, \ldots, m_1$, а R есть целая рациональная функция. Так как α_1, $\sigma_1 \neq 0$, то уравнение $(\sigma^\mu \overline{\sigma^1} + \overline{\sigma^\mu} \sigma^1)\ \alpha_1 + R = 0$ всегда имеет решение $\sigma^\mu = \sigma^\mu\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu,\ \sigma^1, \ldots, \sigma^{\mu-1},\ \overline{\sigma^1}, \ldots, \overline{\sigma^\mu - 1})$, подставляя которое в (13), получим $\alpha'_\mu = 0$, $\mu = 2, \ldots, m_1$. Аналогично можно обратить в нуль β'_ν, $\nu = 2, \ldots, m_2$. Совершая, кроме того, допустимые преобразования $Z''_\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha'_1}} Z'_\mu$, $\mu = 1, \ldots, m_1$, $Z''_\nu = \frac{1}{\sqrt{\beta'_1}} Z'_\nu$, $\nu = m_1+1, \ldots, m_1+m_2$, $Z''_\mu = \frac{1}{\sqrt{\bar\alpha'_1}} Z'_\mu$, $\mu = l+1, \ldots, l+m_1$, $Z''_\nu = \frac{1}{\sqrt{\bar\beta'_1}} Z'_\nu$, $\nu = l+m_1+1, \ldots, l+m_1+m_2$, получим $\alpha''_1 = \beta''_1 = 1$.

Пусть Z_μ, $\mu = 1, \ldots, n$, — базис, в котором $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, а α_μ, β_ν, $\mu = 2, \ldots, m_1$, $\nu = 2, \ldots, m_2$, равны нулю.

Рассмотрим допустимое преобразование базиса

$$\begin{aligned} &Z'_\mu = Z_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, m_2, \;\; l+1, \ldots, l+m_2, \\ &Z'_{\nu+m_2} = Z_{\nu+m_2} - \rho^\nu Z_1 - \cdots - \rho^1 Z_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m_1, \\ &Z'_{l+m_2+\rho} = Z_{l+m_2+\rho} - \overline{\tau^\rho} Z_{l+1} - \cdots - \overline{\tau^1} Z_\rho, \quad \rho = 1, \ldots, m_1. \end{aligned} \tag{14}$$

В новом базисе имеем $\gamma'_\nu = g(Z'_\nu, Z'_{2l} - \overline{\tau^{m_1}} Z_{l+1} - \cdots - \overline{\tau^1} Z_{l+m_1}) = \gamma_\nu - \tau_\nu \alpha_1$, $\nu = 1, \ldots, m_1$, $\zeta'_\mu = g(Z_{m_2+\mu} - \overline{\pi^\mu} Z_1 - \cdots - \overline{\pi^1} Z_\mu, Z_{l+m_1}) = \zeta_\mu - \pi_\mu \alpha_1$, $\mu = 1, \ldots, m_1$. Полагая $\tau_\mu = \gamma_\mu / \alpha_1$, $\pi_\mu = \zeta_\mu / \alpha_1$, $\mu = 1, \ldots, m_1$, все γ_μ, ζ_ν, $\mu, \nu = 1, \ldots, m_1$, обратим в нуль.

Таким образом, применяя допустимые невырожденные преобразования базиса (12), (14), можно сделать постоянные γ_μ, ζ_ν, $\mu, \nu = 1, \ldots, m_1$, α_μ, β_κ, $\mu = 2, \ldots, m_1$, $\kappa = 2, \ldots, m_2$, равными нулю.

В случае $m_1 = m_2$ возможна ситуация, когда $\alpha_1 = 0$ или $\beta_1 = 0$, $\gamma_1, \zeta_1 \neq 0$. Если бы и γ_1 или ζ_1 равнялись нулю, то матрица G_1 оказалась бы вырожденной. Применяя допустимое преобразование базиса $Z'_\mu = Z_\mu + d^1 Z_{m_1+\mu} + \cdots + d^\mu Z_{m_1+1}$, $\mu = 1, \ldots, m_1$, $Z'_\nu = Z_\nu + d^1 Z_{m_1+\nu} + \cdots + d^\nu Z_{l+m_1+1}$, $\nu = l+1, \ldots, l+m_1$, $Z'_\rho = Z_\rho$, $\rho = m_1+1, \ldots, m_2$, $l+m_1+1, \ldots, 2l$, можно сделать $\alpha'_1 \neq 0$. Аналогично можно получить $\beta'_1 \neq 0$ и свести задачу к рассмотренной выше.

Итогом полученных результатов является

Теорема. *Пусть V — $2n$-мерное вещественное линейное пространство с комплексной структурой J и g, a — два эрмитовых скалярных произведения в V. Если билинейная форма a имеет приведенную характеристику Сегре (8) и собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1+k_2}$, то в комплексификации $V^c \equiv TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ пространства V существует базис $\{Z_\alpha, Z_{\overline{\alpha}}\}$, $\alpha = 1, \ldots, n$,* *адаптированный к комплексной структуре J, в котором матрицы $G = (g_{\alpha\overline{\beta}})$, $A = (a_{\alpha\overline{\beta}})$ имеют блочно-диагональный вид (9) с блоками G_A и A_A соответственно, причем в случае вещественного собственного значения $\lambda_A = \overline{\lambda_A}$ матрицы G_A, $\mathcal{A}_A$ — r_A-мерные блочно-диагональные матрицы, состоящие из s_A m_s^A-мерных блоков*

$$G_s^A = \begin{pmatrix} & & e_s^A \\ & \iddots & \\ e_s^A & & \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_s^A = \begin{pmatrix} & & & & e_s^A\lambda_A \\ & & & e_s^A\lambda_A & e_s^A \\ & & \iddots & \iddots & \\ & e_s^A\lambda_A & \iddots & & \\ e_s^A\lambda_A & e_s^A & & & \end{pmatrix}$$

соответственно, а при $\lambda_A \neq \overline{\lambda_A}$

$$G_A = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{G}_A \\ (\widetilde{G}_A)^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_A = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\mathcal{A}}_A \\ (\widetilde{\mathcal{A}}_A)^* & 0 \end{pmatrix},$$

где звезда означает эрмитово сопряжение, а $\widetilde{G}_A$, $\widetilde{\mathcal{A}}_A$ — r_A-мерные блочно-диагональные матрицы, состоящие из s_A m_s^A-мерных блоков

$$G_s^A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_s^A = \begin{pmatrix} & & & & \lambda_A \\ & & & \lambda_A & 1 \\ & & \iddots & \iddots & \\ & \lambda_A & \iddots & & \\ \lambda_A & 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Петров А.З. *К теореме о главных осях тензора* // Изв. физ.-матем. об-ва при Казанс. ун-те. – 1949. – Т. 14. – С. 37–51.
2. Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН. – 1993. – Т. 48. – С. 107–159.
3. Аминова А.В., Калинин Д.А. *H-проективно-эквивалентные четырехмерные римановы связности* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 8. – С. 11–20.
4. Вишневский В.В. *О комплексных структурах B-пространств* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1963. – Т. 123. – № 1. – С. 24–48.
5. Вишневский В.В. *Об одном обобщении пространств Широкова-Рашевского* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1965. – Т. 125. – № 1. – С. 60–73.
6. Калинин Д.А. *Канонические типы пары эрмитовых форм и H-проективно-эквивалентные римановы связности* // Тез. докл. Междунар. геометрич. семин. им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 1997. – С. 42.
7. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр* II. *Линейная алгебра.* Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 400 с.
8. Широков П.А. *Тензорное исчисление. Алгебра тензоров.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во КГУ, 1961. – 447 с.

Казанский государственный университет

Поступила 05.07.1996