ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.977

С.Ю. КУЛТЫШЕВ, Л.М. КУЛТЫШЕВА

К ВОПРОСУ ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Известно (напр., [1]–[3]), что довольно широкий класс реальных объектов описывается функционально-дифференциальными системами, в частности, дифференциальными системами с запаздывающим аргументом и системами с последействием, но задача идентификации таких систем мало изучена. Кроме того, многие работы по идентификации динамических систем (напр., [4], [5]) предполагают, что входной сигнал полностью известен на отрезке времени измерения, хотя для нахождения параметров модели иногда достаточно знать лишь некоторые величины, функционально связанные с входным сигналом, а не сам сигнал. И, наконец, часто предполагается (напр., [6]–[8]), что производятся измерения выхода модели, а не объекта, модель которого мы хотим построить (модель отождествляется с объектом).

Предлагаемая статья посвящена задаче нахождения параметров функционально-дифференциальной системы с последействием, моделирующей реальный объект по косвенным измерениям входа и выхода этого объекта, и написана с целью устранения указанных выше пробелов в теории математического моделирования реальных объектов.

1. Постановка задачи

Пусть R — множество действительных чисел, R^n — пространство n-мерных векторов с компонентами из R, $L^m_{[a,b]}$ — пространство m-мерных вещественных вектор-функций с суммируемыми на $[a,b]$ компонентами, $D^n_{[a,b]}$ — пространство n-мерных вещественных вектор-функций с абсолютно непрерывными на $[a,b]$ компонентами, Y и Z — линейные нормированные пространства, H — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\varphi,\psi\rangle$ и нормой $\|\cdot\|_H=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

Пусть имеется реальный объект, который мы будем рассматривать на конечном отрезке времени $[\theta,T]$.

Через $\overline{v}(t)$ обозначим m-мерный вектор параметров, характеризующих внешние воздействия на объект в момент времени $t\in[\theta,T]$, а через $\overline{x}(t)$ — n-мерный вектор параметров, характеризующих реакцию объекта на внешние воздействия в момент времени $t\in[\theta,T]$. Вектор-функции $\overline{v}$ и $\overline{x}$ будем называть входом и выходом объекта соответственно. Будем считать, что $\overline{v}\in L^m_{[\theta,T]}$, а $\overline{x}\in D^n_{[\theta,T]}$.

Назовем $y\in Y$ и $z\in Z$ измерениями входа и выхода объекта соответственно, если они связаны с $\overline{v}$ и $\overline{x}$ равенствами

$$y=P(\overset{\tau}{\underset{\theta}{C}}\,\overline{v}),\tag{1}$$

$$z=Q(\overset{\tau}{\underset{\theta}{C}}\,\overline{x}),\tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01613, 96-15-96195).

где $P : L^m_{[\theta,\tau]} \to Y$ и $Q : D^n_{[\theta,\tau]} \to Z$ — непрерывные операторы, $\overset{\tau}{\underset{\theta}{C}}$ — оператор сужения вектор-функций на отрезок $[\theta, \tau]$, $\tau \in (\theta, T]$, $[\theta, \tau]$ — отрезок времени, в течение которого производятся измерения входа и выхода объекта, τ — фиксированный момент времени.

Рассмотрим функционально-дифференциальную систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i(\omega) A_i(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x) + \sum_{j=1}^{N} \psi_j(\omega) B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v), \quad x(\theta) = \alpha, \tag{3}$$

в следующих предположениях: $t \in [\theta, T]$, $v \in L^m_{[\theta,T]}$, $x \in D^n_{[\theta,T]}$, $\omega \in \Omega \subseteq R^l$, $\alpha \in R^n$, $A_i(t, \cdot)$ почти при каждом $t \in [\theta, T]$ есть вектор-функционал из $D^n_{[\theta,t]}$ в R^n, оператор $(\overline{A}_i x)(t) = A_i(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x)$ действует из $D^n_{[\theta,T]}$ в $L^n_{[\theta,T]}$, $B_j(t, \cdot)$ почти при каждом $t \in [\theta, T]$ есть вектор-функционал из $L^m_{[\theta,t]}$ в R^n, оператор $(\overline{B}_j v)(t) = B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v)$ действует из $L^m_{[\theta,T]}$ в $L^n_{[\theta,T]}$, $\varphi_i : \Omega \to R$ и $\psi_j : \Omega \to R$ — непрерывные функции, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$; A_i, B_j, φ_i и ψ_j заданы; система (3), рассматриваемая при $t \in [\theta, \nu]$, однозначно разрешима относительно $x \in D^n_{[\theta,\nu]}$ при любых $v \in L^m_{[\theta,\nu]}$, $\alpha \in R^n$, $\omega \in \Omega$ и $\nu \in (\theta, T]$.

Отметим, что операторы $\overline{A}_i$ и $\overline{B}_j$ являются вольтерровыми в смысле [9], следовательно, (3) при $t \in [\theta, \nu]$ ($\nu \in (\theta, T]$) — это система с последействием.

Задачу идентификации поставим следующим образом. По известным y, z, P и Q найти такие α и ω, при которых каждому $v \in L^m_{[\theta,T]}$, удовлетворяющему условию (1), соответствует решение x системы (3), удовлетворяющее условию (2).

Определение. Систему (3) назовем идентифицируемой по измерениям (1), (2), если задача идентификации однозначно разрешима.

2. Основные теоремы

Пусть измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_j(t) = B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} \overline{v}), \quad j = \overline{1, N}, \quad t \in [\theta, \tau], \tag{4}$$

$$z = \overline{Q}(\overset{\tau}{\underset{\theta}{C}} \overline{x}), \tag{5}$$

$$\overline{z}_i = \overline{Q}\Big[\overset{\tau}{\underset{\theta}{C}} \int_{\theta}^{(\cdot)} A_i(s, \overset{s}{\underset{\theta}{C}} \overline{x}) ds\Big], \quad i = \overline{1, M}, \tag{6}$$

где $y_j \in L^n_{[\theta,\tau]}$, $z \in H$, $\overline{Q} : D^n_{[\theta,\tau]} \to H$ — линейный ограниченный оператор, $\overline{z}_i \in H$.

Введем обозначения: α_k — k-я компонента вектора α, e_k — k-й столбец единичной $n \times n$-матрицы, $f_k = \overline{Q}(e_k)$, $k = \overline{1, n}$, $g_j = \overline{Q}\Big[\overset{\tau}{\underset{\theta}{C}} \int_{\theta}^{(\cdot)} y_j(s) ds\Big]$, $j = \overline{1, N}$.

Теорема 1. *Пусть*

а) *элементы* f_k $(k = \overline{1, n})$, $\overline{z}_i$ $(i = \overline{1, M})$ *и* g_j $(j = \overline{1, N})$ *линейно независимы;*

б) *выполняется равенство* $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k f_k + \sum\limits_{i=1}^{M} \overline{\beta}_i \overline{z}_i + \sum\limits_{j=1}^{N} \overline{\gamma}_j g_j$, *где* $\{\overline{\alpha}_k, \overline{\beta}_i, \overline{\gamma}_j\}$ — *решение линейной* *алгебраической системы*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle f_k, f_\xi\rangle + \sum_{i=1}^{M} \beta_i \langle \overline{z}_i, f_\xi\rangle + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \langle g_j, f_\xi\rangle = \langle z, f_\xi\rangle, \quad \xi = \overline{1,n}; \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle f_k, \overline{z}_\eta\rangle + \sum_{i=1}^{M} \beta_i \langle \overline{z}_i, \overline{z}_\eta\rangle + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \langle g_j, \overline{z}_\eta\rangle = \langle z, \overline{z}_\eta\rangle, \quad \eta = \overline{1,M}; \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle f_k, g_\mu\rangle + \sum_{i=1}^{M} \beta_i \langle \overline{z}_i, g_\mu\rangle + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \langle g_j, g_\mu\rangle = \langle z, g_\mu\rangle, \quad \mu = \overline{1,N}; \end{cases} \tag{7}$$

в) *система*

$$\varphi_i(\omega) = \overline{\beta}_i, \quad \psi_j(\omega) = \overline{\gamma}_j, \quad \omega \in \Omega, \quad i = \overline{1,M}, \quad j = \overline{1,N}, \tag{8}$$

имеет единственное решение $\omega = \overline{\omega}$;

г) *решение* $\hat{x}$ *системы* (3) *при* $t \in [\theta, \tau]$, *при* $B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v) = y_j(t)$, *при* $\alpha = \overline{\alpha}$ *и при* $\omega = \overline{\omega}$ *удовлетворяет условию* (6).

Тогда система (3) *идентифицируема по измерениям* (4), (5), (6), *при этом* $(\overline{\alpha}, \overline{\omega})$ — *решение задачи идентификации.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены, тогда существуют такие $\alpha = \overline{\alpha}$ и $\omega = \overline{\omega}$, при которых каждому v, удовлетворяющему (4), соответствует в силу системы (3) x, удовлетворяющее условиям (5) и (6). Действительно, при $\alpha = \overline{\alpha}$, $\omega = \overline{\omega}$, $t \in [\theta, \tau]$ и $B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v) = y_j(t)$ $(j = \overline{1,N})$ выполняется равенство $x(t) = \hat{x}(t)$, а $\hat{x}$ удовлетворяет условиям (6) и в силу равенства

$$z = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k f_k + \sum_{i=1}^{M} \overline{\beta}_i \overline{z}_i + \sum_{j=1}^{N} \overline{\gamma}_j g_j$$

— условию (5). Кроме того, такие $\alpha = \overline{\alpha}$ и $\omega = \overline{\omega}$ единственны, т.к. если существуют $\overline{\overline{\alpha}}$ и $\overline{\overline{\omega}}$ такие, что $(\overline{\overline{\alpha}}, \overline{\overline{\omega}}) \neq (\overline{\alpha}, \overline{\omega})$ и при $\alpha = \overline{\overline{\alpha}}$, $\omega = \overline{\overline{\omega}}$ решение системы (3) удовлетворяет условиям (5) и (6) для любого v, удовлетворяющего условию (4), то $\{\overline{\overline{\alpha}}_k, \overline{\overline{\beta}}_i, \overline{\overline{\gamma}}_j\}$, где $\overline{\overline{\beta}}_i = \varphi_i(\overline{\overline{\omega}})$, $\overline{\overline{\gamma}}_j = \psi_j(\overline{\overline{\omega}})$, удовлетворяет системе (7). Но система (7) в силу условия а) однозначно разрешима, значит, $\{\overline{\overline{\alpha}}_k, \overline{\overline{\beta}}_i, \overline{\overline{\gamma}}_j\} = \{\overline{\alpha}_k, \overline{\beta}_i, \overline{\gamma}_j\}$ и $\overline{\overline{\omega}}$ удовлетворяет системе (8). Но и система (8) разрешима однозначно, следовательно, $\overline{\overline{\omega}} = \overline{\omega}$ и $(\overline{\overline{\alpha}}, \overline{\overline{\omega}}) = (\overline{\alpha}, \overline{\omega})$ — получили противоречие. □

Для иллюстрации теоремы 1 приведем

Пример 1. Пусть $\overline{v} \in L^1_{[\theta,\theta+4]}$, $\overline{x} \in D^1_{[\theta,\theta+4]}$, $\tau = \theta + 3$, $\Omega = R^2$. Скалярная система

$$\dot{x}(t) = \omega_1\omega_2 \int_\theta^t \sin[x(s)]ds + \omega_2\left(1 + \int_\theta^t \sin[v(s)]ds\right), \quad x(\theta) = \alpha, \tag{9}$$

где $t \in [\theta, \theta+4]$, $v \in L^1_{[\theta,\theta+4]}$, $x \in D^1_{[\theta,\theta+4]}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, идентифицируема по измерениям

$$y(t) = 1 + \int_\theta^t \sin[\overline{v}(s)]ds = \cos(t-\theta), \quad t \in [\theta, \theta+3],$$
$$z = \mathrm{col}(1,2,3), \quad \overline{z} = \mathrm{col}(1-\sin 1,\ 2-\sin 2,\ 3-\sin 3)$$

(где компоненты векторов определяются формулами $\overline{x}(\theta+k)$ для z и $\int_\theta^{\theta+k}\int_\theta^s \sin[\overline{x}(r)]dr\,ds$ для $\overline{z}$, $k = 1,2,3$), т.к. векторы $f = \mathrm{col}(1,1,1)$, $\overline{z}$ и $g = \mathrm{col}(\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3)$, (где компоненты вектора g

вычисляются по формулам $\int_\theta^{\theta+k} y(s)ds$, $k=1,2,3$) линейно независимы, выполняется равенство

$$z = \overline{\alpha} f + \overline{\beta}\overline{z} + \overline{\gamma} g$$

при $\overline{\alpha}=0$, $\overline{\beta}=1$, $\overline{\gamma}=1$, система

$$\omega_1\omega_2 = \overline{\beta} = 1, \quad \omega_2 = \overline{\gamma} = 1$$

имеет единственное решение $(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = (1,1)$, функция $\hat{x}(t) = t-\theta$ является решением системы (9) при $t \in [\theta, \theta+3]$, при $1 + \int_\theta^t \sin[v(s)]ds = \cos(t-\theta)$, при $\alpha = \overline{\alpha} = 0$, при $\omega_1 = \overline{\omega}_1 = 1$ и при $\omega_2 = \overline{\omega}_2 = 1$, а $\hat{x}$ удовлетворяет условиям

$$\int_\theta^{\theta+k}\int_\theta^s \sin[x(r)]dr\,ds = k - \sin k, \quad k=1,2,3.$$

Искомые α, ω_1, и ω_2 имеют значения $\alpha = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Следует отметить, что система (9) при $t \in [\theta, \nu]$ имеет решение $x \in D^1_{[\theta,\nu]}$ при любых $v \in L^1_{[\theta,\nu]}$, $\omega \in R^2$, $\alpha \in R$, $\nu \in [\theta, \theta+4]$ в силу принципа Шаудера ([10], гл. 16, § 3, с. 627), примененного к эквивалентному уравнению второго рода

$$x(t) = \alpha + \omega_1\omega_2 \int_\theta^t \int_\theta^s \sin[x(r)]dr\,ds + \omega_2 \int_\theta^t (1 + \int_\theta^s \sin[v(r)]dr)ds, \quad t \in [\theta, \nu],$$

и это решение единственно в силу теоремы 1.2 ([1], гл. 10, § 10, с. 212).

Пусть далее измерения входа объекта имеют вид

$$y = \overset{\tau}{\underset{\theta}{C}} \overline{v}, \tag{10}$$

где $y \in L^m_{[\theta,\tau]}$, а измерения выхода объекта имеют вид (5), (6). Введем обозначения

$$g_i = \overline{Q}\Big[\overset{\tau}{\underset{\theta}{C}} \int_\theta^{(\cdot)} B_j(s, \overset{s}{\underset{\theta}{C}} y)ds\Big], \quad j = \overline{1,N}.$$

Теорема 2. *Пусть*
а) *элементы* f_k $(k=\overline{1,n})$, $\overline{z}_i$ $(i = \overline{1,M})$ *и* g_j $(j = \overline{1,N})$ *линейно независимы;*
б) *выполняется равенство*

$$z = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha}_k f_k + \sum_{i=1}^M \overline{\beta}_i \overline{z}_i + \sum_{j=1}^N \overline{\gamma}_j g_j,$$

где $\{\overline{\alpha}_k, \overline{\beta}_i, \overline{\gamma}_j\}$ — *решение системы* (7);
в) *система* (8) *имеет единственное решение* $\omega = \overline{\omega}$;
г) *решение* $\hat{x}$ *системы* (3) *при* $t \in [\theta, \tau]$, *при* $v(t) = y(t)$, *при* $\alpha = \overline{\alpha}$ *и при* $\omega = \overline{\omega}$ *удовлетворяет условиям* (6).

Тогда система (3) *идентифицируема по измерениям* (10), (5), (6), *при этом* $(\overline{\alpha}, \overline{\omega})$ — *решение задачи идентификации.*

Доказательство такое же, как в теореме 1.
Теорему 2 иллюстрирует

Пример 2. Пусть $\overline{v} \in L^1_{[\theta,\theta+4]}$, $\overline{x} \in D^1_{[\theta,\theta+4]}$, $\tau = \theta+3$, $\Omega = R^2$. Скалярная система

$$\dot{x}(t) = \omega_1\omega_2 \int_\theta^t \sin[x(s)]ds + \omega_2\Big(1 + \int_\theta^t \operatorname{arctg}[v(s)]ds\Big), \quad x(\theta) = \alpha, \tag{11}$$

где $t \in [\theta, \theta+4]$, $v \in L^1_{[\theta,\theta+4]}$, $x \in D^1_{[\theta,\theta+4]}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, идентифицируема по измерениям

$$y(t) = \overline{v}(t) = -\operatorname{tg}[\sin(t-\theta)], \quad t \in [\theta, \theta+3],$$
$$z = \operatorname{col}(1,2,3), \quad \overline{z} = \operatorname{col}(1-\sin 1,\ 2-\sin 2,\ 3-\sin 3),$$

где компоненты векторов z и $\overline{z}$ определяются формулами $\overline{x}(\theta+k)$ и $\int_\theta^{\theta+k}\int_\theta^s \sin[\overline{x}(r)]dr\, ds$ соответственно для $k = 1,2,3$. Действительно, векторы $f = \operatorname{col}(1,1,1)$, $\overline{z}$ и $g = \operatorname{col}(\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3)$ (где компоненты вектора g вычисляются по формулам

$$\int_\theta^{\theta+k}\left(1 + \int_\theta^s \operatorname{arctg}[y(r)]dr\right)ds$$

для $k = 1,2,3$) линейно независимы, выполняется равенство $z = \overline{\alpha} f + \overline{\beta}\overline{z} + \overline{\gamma} g$ при $\overline{\alpha} = 0$, $\overline{\beta} = 1$, $\overline{\gamma} = 1$, система $\omega_1\omega_2 = \overline{\beta} = 1$, $\omega_2 = \overline{\gamma} = 1$ имеет единственное решение $(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = (1,1)$, функция $\hat{x}(t) = t - \theta$ является решением системы (11) при $t \in [\theta, \theta+3]$, $v(t) = y(t) = -\operatorname{tg}[\sin(t-\theta)]$, $\alpha = \overline{\alpha} = 0$, $\omega_1 = \overline{\omega}_1 = 1$ и при $\omega_2 = \overline{\omega}_2 = 1$, а $\hat{x}$ удовлетворяет условиям

$$\int_\theta^{\theta+k}\int_\theta^s \sin[x(r)]dr\, ds = k - \sin k$$

при $k = 1,2,3$. Искомые α, ω_1 и ω_2 имеют значения $\alpha = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

Пусть далее измерения входа и выхода объекта имеют вид (10) и

$$z = \overset{\tau}{\underset{\theta}{C}}\, \overline{x}, \quad z \in D^n_{[\theta,\tau]}. \tag{12}$$

Введем обозначения: $(\cdot)^*$ — символ транспонирования,

$$a_i(t) = \int_\theta^t A_i(s, \overset{s}{\underset{\theta}{C}}\, z)ds, \quad i = \overline{1,M}, \quad t \in [\theta,\tau],$$
$$b_j(t) = \int_\theta^t B_j(s, \overset{s}{\underset{\theta}{C}}\, y)ds, \quad j = \overline{1,N},$$

$L_2^n[\theta,\tau]$ — пространство n-мерных вектор-функций с квадратично суммируемыми на $[\theta,\tau]$ компонентами и скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_0 = \int_\theta^\tau f^*(t)g(t)dt.$$

Теорема 3. *Пусть*

а) *вектор-функции* a_i $(i = \overline{1,M})$ *и* b_j $(j = \overline{1,N})$ *линейно независимы на* $[\theta,\tau]$;

б) *выполняется равенство*

$$z(t) = \overline{\alpha} + \sum_{i=1}^M \overline{\beta}_i a_i(t) + \sum_{j=1}^N \overline{\gamma}_j b_j(t), \quad t \in [\theta,\tau], \tag{13}$$

где $\overline{\alpha} = z(\theta)$, *а* $\{\overline{\beta}_i, \overline{\gamma}_j\}$ — *решение линейной алгебраической системы*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^M \beta_i\langle a_i, a_\xi\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \gamma_j\langle b_j, a_\xi\rangle_0 = \langle z-\overline{\alpha}, a_\xi\rangle_0, \quad \xi = \overline{1,M};\\ &\sum_{i=1}^M \beta_i\langle a_i, b_\eta\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \gamma_j\langle b_j, b_\eta\rangle_0 = \langle z-\overline{\alpha}, b_\eta\rangle_0, \quad \eta = \overline{1,N}; \end{aligned} \tag{14}$$

в) *система*

$$\varphi_i(\omega) = \overline{\beta}_i, \quad \psi_j(\omega) = \overline{\gamma}_j, \quad \omega \in \Omega, \quad i = \overline{1,M}, \quad j = \overline{1,N}, \tag{15}$$

имеет единственное решение $\omega = \overline{\omega}$.

Тогда система (3) *идентифицируема по измерениям* (10), (12), *при этом* $(\overline{\alpha}, \overline{\omega})$ — *решение задачи идентификации.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, тогда существуют такие $\alpha = \overline{\alpha}$ и $\omega = \overline{\omega}$, при которых каждому v, удовлетворяющему (10), соответствует решение x системы (3), удовлетворяющее (12) (в силу равенства (13)), причем такие α и ω единственны, т.к. система (14), (15) однозначно разрешима относительно (β, γ, ω), где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$. □

Теорему 3 иллюстрирует

Пример 3. Пусть $\overline{v} \in L^1_{[\theta, \theta+2]}$, $\overline{x} \in D^1_{[\theta, \theta+2]}$, $\tau = \theta + 1$, $\Omega = R^2$. Скалярная система

$$\dot{x}(t) = \omega_1 \omega_2 \int_\theta^t \sin[x(s)]ds + \omega_2 v(t), \quad x(\theta) = \alpha,$$

где $t \in [\theta, \theta+2]$, $v \in L^1_{[\theta, \theta+2]}$, $x \in D^1_{[\theta, \theta+2]}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, идентифицируема по измерениям

$$y(t) = \overline{v}(t) = \cos(t - \theta), \quad z(t) = \overline{x}(t) = t - \theta, \quad t \in [\theta, \theta+1],$$

т.к. функции

$$a(t) = \int_\theta^t \int_\theta^s \sin[z(r)]dr\, ds = t - \theta - \sin(t-\theta) \qquad \text{и} \qquad b(t) = \int_\theta^t y(s)ds = \sin(t - \theta)$$

линейно независимы на $[\theta, \theta+1]$, выполняется равенство

$$z(t) = \overline{\alpha} + \overline{\beta} a(t) + \overline{\gamma} b(t)$$

при $\overline{\alpha} = 0$, $\overline{\beta} = \overline{\gamma} = 1$, $t \in [\theta, \theta+1]$, и система $\omega_1\omega_2 = \overline{\beta} = 1$, $\omega_2 = \overline{\gamma} = 1$ имеет единственное решение $(\omega_1, \omega_2) = (1, 1)$. При этом искомые α, ω_1 и ω_2 имеют значения $\alpha = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

Рассмотрим частный случай системы (3)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{M} \beta_i A_i(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x) + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j B_j(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v), \quad x(\theta) = \alpha, \tag{16}$$

где $t \in [\theta, T]$, $\omega = (\beta_1, \dots, \beta_M, \gamma_1, \dots, \gamma_N) \in R^l$, $l = M + N$, $\Omega = R^l$. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. Пусть
а) элементы f_k $(k = \overline{1,n})$, $\overline{z}_i$ $(i = \overline{1,M})$ и g_j $(j = \overline{1,N})$ линейно независимы;
б) выполняется равенство

$$z = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k f_k + \sum_{i=1}^{M} \overline{\beta}_i \overline{z}_i + \sum_{j=1}^{N} \overline{\gamma}_j g_j,$$

где $\{\overline{\alpha}_k, \overline{\beta}_i, \overline{\gamma}_j\}$ — решение системы (7);

в) решение $\hat{x}$ системы (16) при $t \in [\theta, \tau]$, $v(t) = y(t)$, $\alpha = \overline{\alpha}$ и $\omega = (\overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_M, \overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_N)$ удовлетворяет условиям (6).

Тогда система (16) идентифицируема по измерениям (10), (5), (6).

Для иллюстрации следствия 1 можно взять пример 2, где вместо $\omega_1\omega_2$ использовано β, а вместо ω_2 использовано γ.

Теорема 4. *Система* (16) *идентифицируема по измерениям* (10), (12) *тогда и только тогда, когда вектор-функции* a_i $(i = \overline{1,M})$, b_j $(j = \overline{1,N})$ *линейно независимы на* $[\theta, \tau]$ *и выполняется равенство*

$$z(t) = \overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{M} \overline{\beta}_i a_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \overline{\gamma}_j b_j(t)$$

при всех $t \in [\theta, \tau]$, *где* $\overline{\alpha} = z(\theta)$, *а* $\{\overline{\beta}_i, \overline{\gamma}_j\}$ — *решение системы* (14). *Здесь* a_i, b_j *такие же, как в теореме* 3.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 3.

Необходимость. Пусть система (16) идентифицируема по измерениям (10), (12), тогда существует единственная пара $(\overline{\alpha}, \overline{\omega})$ такая, что при $(\alpha, \omega) = (\overline{\alpha}, \overline{\omega})$ решение x системы (16) удовлетворяет (12) для любого v, удовлетворяющего (10), при этом $x(t) = z(t)$ на $[\theta, \tau]$, $\overline{\alpha} = z(\theta)$ и

$$z(t) - \overline{\alpha} = \sum_{i=1}^{M} \overline{\beta}_i a_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \overline{\gamma}_j b_j(t)$$

на $[\theta, \tau]$, где $\overline{\omega} = (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_M, \overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_N)$. Предположим (от противного), что $a_1, \ldots, a_M, b_1, \ldots, b_N$ линейно зависимы на $[\theta, \tau]$, тогда существует такое $\overline{\overline{\omega}} = (\overline{\overline{\beta}}, \overline{\overline{\gamma}})$, где $\overline{\overline{\beta}} = (\overline{\overline{\beta}}_1, \ldots, \overline{\overline{\beta}}_M)$, $\overline{\overline{\gamma}} = (\overline{\overline{\gamma}}_1, \ldots, \overline{\overline{\gamma}}_N)$, что $\overline{\overline{\omega}} \neq \overline{\omega}$ и выполняется равенство

$$z(t) - \overline{\alpha} = \sum_{i=1}^{M} \overline{\overline{\beta}}_i a_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \overline{\overline{\gamma}}_j b_j(t)$$

на $[\theta, \tau]$, далее

$$z(t) = \overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{M} \overline{\overline{\beta}}_i \int_{\theta}^{t} A_i(s, \overset{s}{\underset{\theta}{C}} z) ds + \sum_{j=1}^{N} \overline{\overline{\gamma}}_j \int_{\theta}^{t} B_j(s, \overset{s}{\underset{\theta}{C}} y) ds,$$

следовательно, $z(t)$ является решением системы (16) при $t \in [\theta, \tau]$, $v(t) = y(t)$, $\alpha = \overline{\alpha}$ и $\omega = \overline{\overline{\omega}}$, т.е. $x(t) = z(t)$ при $t \in [\theta, \tau]$, где x — решение системы (16) при любом v, удовлетворяющем (10), и при $(\alpha, \omega) = (\overline{\alpha}, \overline{\overline{\omega}})$, а это противоречит единственности $(\overline{\alpha}, \overline{\omega})$. Таким образом, $a_1, \ldots, a_M$, $b_1, \ldots, b_N$ линейно независимы и $\overline{\omega} = (\overline{\beta}, \overline{\gamma})$ — единственное решение системы (14). $\square$

Для иллюстрации теоремы 4 можно взять пример 3, где $\omega_1\omega_2$ заменено на β, а ω_2 — на γ.

3. Идентифицируемость линейных систем

Рассмотрим линейную функционально-дифференциальную систему

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = \sum_{\xi=1}^{L} A_\xi \overline{f}_\xi(t) x(t) + \sum_{\eta=1}^{M} B_\eta \int_{\theta}^{t} \overline{g}_\eta(t,s) \dot{x}(s) ds + \sum_{\mu=1}^{N} C_\mu \overline{u}_\mu(t) v(t), \\ x(\theta) = \alpha, \quad t \in [\theta, T], \quad v \in L^m_{[\theta,T]}, \quad x \in D^n_{[\theta,T]}, \end{gathered} \tag{17}$$

в следующих предположениях: $\alpha \in R^n$, $A_\xi = \{a_{\xi ij}\}$ — $n \times n$-матрица, где $a_{\xi ij} \in R$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $B_\eta = \{b_{\eta ij}\}$ — $n \times n$-матрица, где $b_{\eta ij} \in R$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $C_\mu = \{c_{\mu ik}\}$ — $n \times m$-матрица, где $c_{\mu ik} \in R$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$, $f_\xi \in L^1_{[\theta,T]}$, $\overline{u}_\mu$ — скалярная функция, ограниченная в существенном на $[\theta, T]$, $\overline{g}_\eta(t,s)$ — скалярная функция, определенная при $\theta \leq s \leq t \leq T$ и такая, что оператор

$$G : L^n_{[\theta,T]} \to L^n_{[\theta,T]}, \quad (G\varphi)(t) = B_\eta \int_{\theta}^{t} \overline{g}_\eta(t,s) \varphi(s) ds$$

слабо вполне непрерывен (это условие гарантирует однозначную разрешимость системы (17) при любых v, α, A_ξ, B_η, C_μ [11]).

Система (17) является частным случаем системы (16), где

$$\omega = \mathrm{col}(a_{111}, \ldots, a_{Lnn},\, b_{111}, \ldots, b_{Mnn},\, c_{111}, \ldots, c_{Nnm}) \in R^l,$$

$l = L \cdot n \cdot n + M \cdot n \cdot n + N \cdot n \cdot m$, $\Omega = R^l$.

Пусть измерения входа и выхода объекта имеют вид (10) и

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \Big[\psi_{ij} \overline{x}_j(\theta) + \int_\theta^\tau \varphi_{ij}(t) \dot{\overline{x}}_j(t) dt \Big], \quad i = \overline{1,l}, \tag{18}$$

$$z_{ij\xi k} = \int_\theta^\tau \varphi_{ij}(t) \overline{f}_\xi(t) \overline{x}_k(t) dt, \quad i = \overline{1,l}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{19}$$

$$\overline{z}_{ij\eta k} = \int_\theta^\tau \varphi_{ij}(t) \int_\theta^t \overline{g}_\eta(t,s) \dot{\overline{x}}_k(s) ds\, dt, \quad \eta = \overline{1,M}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{20}$$

где $\psi_{ij} \in R$, а φ_{ij} — функции, ограниченные в существенном на $[\theta, \tau]$.

Введем обозначения

$$\beta_{ij\mu k} = \int_\theta^\tau \varphi_{ij}(t) \overline{u}_\mu(t) y_k(t) ds, \quad \mu = \overline{1,N}, \quad k = \overline{1,m},$$

$$F = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \ldots & \psi_{1n} & z_{1111} & \ldots & z_{1nLn} & \overline{z}_{1111} & \ldots & \overline{z}_{1nMn} & \beta_{1111} & \ldots & \beta_{1nNm} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{l1} & \ldots & \psi_{ln} & z_{l111} & \ldots & z_{lnLn} & \overline{z}_{l111} & \ldots & \overline{z}_{lnMn} & \beta_{l111} & \ldots & \beta_{lnNm} \end{pmatrix}$$

— $l \times l$-матрица, F^{-1} — матрица, обратная F.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. Пусть $\det F \neq 0$ и $\hat{x}$ удовлетворяет условиям (19), (20), где $\hat{x}$ — решение системы (17) при $t \in [\theta, \tau]$, $\alpha = \overline{\alpha}$, $\omega = \overline{\omega}$ и $v(t) = y(t)$, $\mathrm{col}(\overline{\alpha}, \overline{\omega}) = F^{-1} z$, $z = \mathrm{col}(z_1, \ldots, z_l)$. Тогда система (17) идентифицируема по измерениям (10), (18)–(20).

Следствие 2 иллюстрирует

Пример 4. Скалярная система

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b v(t), \quad t \in [0,4], \quad x(0) = \alpha,$$

где $v \in L^1_{[0,4]}$, $x \in D^1_{[0,4]}$, $\omega = (a, b, \alpha)$, идентифицируема по измерениям

$$y(t) = v(t) = 1, \quad t \in [0,3], \quad z_1 = \overline{x}(1) = 2e - 1,$$

$$z_2 = \overline{x}(2) = 2e^2 - 1, \quad z_3 = \overline{x}(3) = 2e^3 - 1,$$

$$z_{11} = \int_0^1 \overline{x}(s) ds = 2e - 3, \quad z_{21} = \int_0^2 \overline{x}(s) ds = 2e^2 - 4, \quad z_{31} = \int_0^3 \overline{x}(s) ds = 2e^3 - 5,$$

т.к. матрица F имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2e - 3 & 1 \\ 1 & 2e^2 - 4 & 2 \\ 1 & 2e^3 - 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \det F = -2e(e-1)^2 \neq 0,$$

при этом искомые параметры имеют значения $a = b = \alpha = 1$, а $\hat{x}(t) = 2e^t - 1$, $t \in [0,3]$.

Пусть измерения входа и выхода объекта имеют вид (10), (12). Введем обозначения: $y_k(\cdot)$ — k-я компонента вектор-функции y, $k=\overline{1,m}$, $z_j(\cdot)$ — j-я компонента вектор-функции z, $j=\overline{1,n}$,

$$f_{\xi\eta}(t)=\int_\theta^t \overline{f}_\xi(s)z_j(s)ds, \quad \xi=\overline{1,L}, \quad j=\overline{1,n}, \quad t\in[\theta,\tau],$$

$$g_{\eta j}(t)=\int_\theta^t\int_\theta^s \overline{g}_\eta(s,r)\dot{z}_j(r)dr\,ds, \quad \eta=\overline{1,M}, \quad j=\overline{1,n}, \quad t\in[\theta,\tau],$$

$$u_{\mu k}(t)=\int_\theta^t \overline{u}_\mu(s)y_k(s)ds, \quad \mu=\overline{1,N}, \quad k=\overline{1,m}, \quad t\in[\theta,\tau],$$

$$\delta_j(t)=z_j(t)-z_j(\theta), \quad j=\overline{1,n}, \quad t\in[\theta,\tau],$$

$$\langle\varphi,\psi\rangle_1=\int_\theta^\tau \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 3. Система (17) идентифицируема по измерениям (10), (12) тогда и только тогда, когда функции $f_{\xi j}$ ($\xi=\overline{1,L}$, $j=\overline{1,n}$), $g_{\eta j}$ ($\eta=\overline{1,M}$, $j=\overline{1,n}$), $u_{\mu k}$ ($\mu=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,m}$) линейно независимы на $[\theta,\tau]$ и выполняются равенства

$$\delta_i(t)=\sum_{\xi=1}^L\sum_{j=1}^n a_{\xi ij}f_{\xi j}(t)+\sum_{\eta=1}^M\sum_{j=1}^n b_{\eta ij}g_{\eta j}(t)+\sum_{\mu=1}^N\sum_{k=1}^m c_{\mu ik}u_{\mu k}(t), \quad t\in[\theta,\tau], \quad i=\overline{1,n},$$

где $\{a_{\xi ij},b_{\eta ij},c_{\mu ik}\}$ — решение линейной алгебраической системы

$$\sum_{\xi=1}^L\sum_{j=1}^n a_{\xi ij}\langle f_{\xi j},f_{\hat\xi\hat j}\rangle_1+\sum_{\eta=1}^M\sum_{j=1}^n b_{\eta ij}\langle g_{\eta j},f_{\hat\xi\hat j}\rangle_1+\sum_{\mu=1}^N\sum_{k=1}^m c_{\mu ik}\langle u_{\mu k},f_{\hat\xi\hat j}\rangle_1=\langle\delta_i,f_{\hat\xi\hat j}\rangle_1,$$
$$i=\overline{1,n}, \quad \hat\xi=\overline{1,L}, \quad \hat j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{\xi=1}^L\sum_{j=1}^n a_{\xi ij}\langle f_{\xi j},g_{\hat\eta\hat j}\rangle_1+\sum_{\eta=1}^M\sum_{j=1}^n b_{\eta ij}\langle g_{\eta j},g_{\hat\eta\hat j}\rangle_1+\sum_{\mu=1}^N\sum_{k=1}^m c_{\mu ik}\langle u_{\mu k},g_{\hat\eta\hat j}\rangle_1=\langle\delta_i,g_{\hat\eta\hat j}\rangle_1,$$
$$i=\overline{1,n}, \quad \hat\eta=\overline{1,M}, \quad \hat j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{\xi=1}^L\sum_{j=1}^n a_{\xi ij}\langle f_{\xi j},u_{\hat\mu\hat k}\rangle_1+\sum_{\eta=1}^M\sum_{j=1}^n b_{\eta ij}\langle g_{\eta j},u_{\hat\mu\hat k}\rangle_1+\sum_{\mu=1}^N\sum_{k=1}^m c_{\mu ik}\langle u_{\mu k},u_{\hat\mu\hat k}\rangle_1=\langle\delta_i,u_{\hat\mu\hat k}\rangle_1,$$
$$i=\overline{1,n}, \quad \hat\mu=\overline{1,N}, \quad \hat k=\overline{1,m}.$$

Приведем примеры, иллюстрирующие следствие 3.

Пример 5. Скалярная система

$$\dot{x}(t)=ax(t)+b\int_0^t(t-s)\dot{x}(s)ds+cv(t), \quad t\in[0,2],$$
$$x(0)=\alpha, \quad v\in L^1_{[0,2]}, \quad x\in D^1_{[0,2]}, \quad \omega=(a,b,c), \quad \Omega=R^2,$$

идентифицируема по измерениям

$$y(t)=\overline{v}(t)=1-t-\frac{1}{2}t^2, \quad z(t)=\overline{x}(t)=t, \quad t\in[0,1],$$

т.к. функции

$$f_{11}(t)=\int_0^t z(s)ds=\frac{1}{2}t^2, \quad g_{11}(t)=\int_0^t\int_0^s(s-r)\dot{z}(r)dr\,ds=\frac{1}{6}t^3,$$

$$u_{11}(t) = \int_0^t y(s)ds = t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$$

линейно независимы на $[0,1]$ и выполняется равенство

$$\delta(t) = t = af_{11}(t) + bg_{11}(t) + cu_{11}(t)$$

при $t \in [0,1]$ и при $a = b = c = 1$; искомые параметры имеют значения $\alpha = 0$, $a = b = c = 1$.

Пример 6. Скалярная система

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bv(t), \quad t \in [0,2], \quad x(0) = \alpha, \quad \omega = (a,b),$$

не идентифицируема по измерениям $y(t) = \overline{v}(t) = e^t$, $z(t) = \overline{x}(t) = e^t$, $t \in [0,1]$, т.к. функции

$$f_{11}(t) = \int_0^t z(s)ds = e^t - 1 \qquad \text{и} \qquad u_{11} = \int_0^t y(s)ds = e^t - 1$$

линейно зависимы на $[0,1]$.

4. Идентификация запаздывания в простейших скалярных системах

Пусть $\overline{v} \in L^1_{[t_0,T]}$, $\overline{x} \in D^1_{[t_0,T]}$, а измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y(t) = \overline{v}(t) = 1, \quad t \in [t_0, t_3], \tag{21}$$

$$z_i = \overline{x}(t_i), \quad (i = 0,1,2,3), \quad t_i = t_0 + i\Delta, \quad t_3 < T, \quad \Delta > 0. \tag{22}$$

Рассмотрим скалярную систему с запаздыванием

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = ax(t-h) + bv(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = \alpha, \\ x(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi < t_0, \ \ v \in L^1_{[t_0,T]}, \ \ x \in D^1_{[t_0,T]}, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\omega = (a,b,h)$, $\frac{3}{2}\Delta \le h \le 2\Delta$, $a \in R$, $b \in R$. Введем обозначения

$$\begin{gathered} p_0 = (z_1 - z_0)(z_3 - z_2 - z_1 + z_0), \\ p = 2[(z_3 - 3z_1 + 2z_0)(2z_1 - z_0) - (z_2 - 2z_1 + z_0)(3z_1 - 2z_0)]/p_0, \\ q = [3(z_2 - 2z_1 + z_0)(3z_1 - z_0) - 4(z_3 - 3z_1 + 2z_0)z_1]/p_0. \end{gathered}$$

Утверждение 1. *Пусть $z_1 \ne z_0$, $z_3 - z_2 - z_1 + z_0 \ne 0$. Система* (23) *идентифицируема по измерениям* (21), (22) *тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ имеет на отрезке $[\frac{3}{2}, 2]$ только один корень λ_0. При этом искомые параметры имеют вид*

$$\alpha = z_0, \quad b = \frac{z_1 - z_0}{\Delta}, \quad h = \lambda_0\Delta, \quad a = \frac{2(z_2 - z_0 - 2b\Delta)}{(2\Delta - h)[2z_0 + b(2\Delta - h)]}.$$

Доказательство этого утверждения вытекает из представления решения системы (23), которое строится методом интегрирования по шагам ([12], гл. 3, § 3.2, с. 57–58).

Рассмотрим далее простейшую скалярную систему нейтрального типа

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = a\dot{x}(t-h) + bv(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = \alpha, \\ x(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi < t_0, \ \ v \in L^1_{[t_0,T]}, \ \ x \in D^1_{[t_0,T]}, \end{gathered} \tag{24}$$

где $\omega = (a,b,h)$, $\frac{3}{2}\Delta \le h \le 2\Delta$, $a \in R$, $b \in R$.

Утверждение 2. *Система* (24) *идентифицируема по измерениям* (21), (22) *тогда и только тогда, когда $z_1 \ne z_0$ и $z_3 - z_2 - z_1 + z_0 \ne 0$. При этом искомые параметры имеют вид*

$$\alpha = z_0, \quad b = \frac{z_1 - z_0}{\Delta}, \quad a = \frac{z_3 - z_2 - z_1 + z_0}{z_1 - z_0}, \quad h = \frac{2z_3 - 3z_2 + z_0}{z_3 - z_2 - z_1 + z_0}\Delta.$$

Доказательство этого утверждения также вытекает из представления решения системы (24), которое строится методом интегрирования по шагам.

Далее рассмотрим скалярную систему

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = ax(\theta) + bv(t), \quad t \in [\theta, T], \quad x(\theta) = \alpha, \\ v \in L^1_{[\theta,T]}, \quad x \in D^1_{[\theta,T]}, \quad \omega = (a, b) \quad \Omega = R^2. \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть $\overline{v} \in L^1_{[\theta,T]}$, $\overline{x} \in D^1_{[\theta,T]}$, а измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_i = \int_\theta^{t_i} \overline{v}(s)ds, \quad (i = 1, 2, 3), \quad \theta < t_1 < t_2 < t_3 < T, \tag{26}$$

$$z_i = \overline{x}(t_i), \quad (i = 1, 2, 3). \tag{27}$$

Утверждение 3. *Система* (25) *идентифицируема по измерениям* (26), (27) *тогда и только тогда, когда линейная алгебраическая система*

$$\alpha + (t_i - \theta)\beta + y_i b = z_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

имеет единственное решение $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{b})$ *и* $\overline{\alpha} \neq 0$. *При этом искомые параметры имеют вид* $\alpha = \overline{\alpha}$, $a = \dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$, $b = \overline{b}$.

Доказательство этого утверждения следует непосредственно из представления решения системы (25)

$$x(t) = \alpha + (t - \theta)a\alpha + b\int_\theta^t v(s)ds, \quad t \in [\theta, T].$$

Интересно отметить, что система

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = Ax(t_0) + Bv(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = \alpha, \\ v \in L^m_{[\theta,T]}, \quad x \in D^n_{[\theta,T]}, \end{gathered} \tag{28}$$

где $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ik}\}$ — постоянные $n{\times}n$- и $n{\times}m$-матрицы, а $\omega = (a_{11}, \dots, a_{1,n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}, b_{11}, \dots, b_{1m}, \dots, b_{n1}, \dots, b_{nm})$, при $n \geq 2$ не идентифицируема по измерениям

$$y_\xi = \int_{t_0}^{t_\xi} \overline{v}(s)ds, \quad z_\xi = \overline{x}(t_\xi), \quad (\xi = 0, 1, 2, \dots, n + m),$$

т.к. линейная алгебраическая система

$$(t_\xi - t_0)Az_0 + By_\xi = z_\xi - z_0, \quad \xi = \overline{1, n + m},$$

не является однозначно разрешимой относительно матриц A и B, а к ней сводится вопрос об идентифицируемости системы (28) в силу представления решения этой системы

$$x(t) = \alpha + (t - t_0)A\alpha + B\int_{t_0}^t v(s)ds, \quad t \in [t_0, T].$$

Заключение

Таким образом, если система (3) идентифицируема по измерениям (1), (2), то можно построить математическую модель (3), которая имитирует поведение реального объекта относительно измерений его входа и выхода.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – 1-е изд. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
2. Гурецкий Х. *Анализ и синтез систем управления с запаздыванием.* – М.: Машиностроение, 1974. – 328 с.
3. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
4. *Справочник по теории автоматического регулирования.* – М.: Наука, 1987. – 712 с.
5. Мазуров М.Е. *Об идентификации нелинейных систем по методу "фиксированного напряжения"* (*по серии откликов на входные воздействия*) // Матем. моделирование. – 1992. – Т. 4. – № 3. – С. 91–104.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. *Качественная теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1971. – 508 с.
7. Бодунов Н.А., Постников Е.В. *Условия локальной идентифицируемости нелинейных систем при дискретных наблюдениях* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 11. – С. 8–11.
8. Качанов Б.О., Хролович К.Б. *Метод идентификации динамических систем с запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 1. – С. 67–72.
9. Тихонов А.Н. *0 функциональных уравнениях типа Вольтерра и их примененияx к некоторым задачам математической физики* // Бюлл. МГУ. Секц. А. – 1938. – Т. 1. – № 8. – С. 1–25.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
11. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Рахматуллина Л.Ф. *О линейном функционально-дифференциальном уравнении эволюционного типа* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 11. – С. 1915–1925.
12. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 549 с.

Пермский государственный технический университет

Поступила 27.04.1996