ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 10 (461)

УДК 517.956

В.И. УШАКОВ, М.В. ИВАНОВА

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА ТРЕТЬЕЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

Пусть область Ω лежит в полупространстве $\{t > 0\} \times \{x \in \mathbf{R}^n\}$. Обозначим D_τ проекцию сечения плоскостью $\{t = \tau\}$ области Ω на плоскость $\{t = 0\}$. Предположим, что Ω расширяется с увеличением времени, т. е.

$$D_{t_1} \subset D_{t_2} \ \ \forall t_1, t_2, \ \ t_1 < t_2. \tag{1}$$

В силу этого условия для каждой точки $(t_0, x) \in \Omega$ луч $\{(t,x)|t \geq t_0\}$ также принадлежит Ω. Обозначив через $s(x) = \inf\{t \mid (t,x) \in \Omega\}$, получим

$$\Omega = \{(t,x) \mid x \in D, \ t > s(x)\}, \tag{2}$$

где $D = \cup_{t>0} D_t$. При этом, поскольку для каждого $t > 0$ $\{x \in D \mid t > s(x)\}$ открыто (Ω — область), то $s(x)$ — полунепрерывная сверху функция.

В области Ω рассмотрим задачу для параболического уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_0 \equiv \nu_0 u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j = \nu_0 \varphi(x), \qquad (t,x) \in \Gamma, \tag{4}$$

где Γ — граница Ω, $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней (по отношению к Ω) нормали к Γ. Коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ — измеримые функции в Ω, удовлетворяющие условию

$$\gamma_1 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \gamma_2 \tag{5}$$

для любого единичного вектора ξ (γ_1, γ_2 — положительные постоянные).

Отметим, что (4) включает и начальное условие (если $D_0 = \Gamma \cap \{t = 0\}$, то $\nu_i = 0$ при $1 \leq i \leq n$, $\nu_0 = -1$, т. е. (4) принимает вид $u|_{t=0} = \varphi(x)$).

Будем рассматривать обобщенное решение задачи (3), (4) в п. 2. В частности, никаких свойств регулярности Γ (за исключением (1)) не предполагается.

Целью работы является построение и изучение функции Грина $G(t,x;\tau,\xi)$, с помощью которой выражается решение задачи (3), (4)

$$u(t,x) = \int_\Omega G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\tau d\xi + \int_D G \varphi(\xi) d\xi. \tag{6}$$

Для произвольных (вообще говоря, неограниченных и с негладкой границей) цилиндрических областей такая функция Грина была построена в [1]. Там же установлены оценки

$$\int\limits_{D\cap\{|x-\xi|>r\}} G^2(t,x;\tau,\xi)d\xi \le Be^{-\kappa\frac{r^2}{t-\tau}}/\min\{t-\tau,\rho^2(x)\}^{\frac{n}{2}}, \tag{7}$$

$$G(t,x;\tau,\xi) \le \frac{B\exp\left(-\frac{\kappa|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)}{(\min\{t-\tau,\rho^2(x)\}\min\{t-\tau,\rho^2(\xi)\})^{\frac{n}{4}}}, \tag{8}$$

где $\rho(x)$ — расстояние от x до границы D. Постоянная B зависит только от γ_1, γ_2 и n. В данной работе устанавливаются оценки функции Грина задачи (3), (4), аналогичные (7), (8). Именно, введем цилиндры

$$Q_\rho^+(\tau,\xi) = \{(t,x) \mid \tau < t < \tau+\rho^2,\ |x-\xi|<\rho\},$$
$$Q_\rho^-(t,x) = \{(\tau,\xi) \mid t-\rho^2 < \tau < t,\ |x-\xi|<\rho\},$$

и пусть

$$d^+(\tau,\xi;t_0) = \sup\{\rho \mid Q\rho^+ \subset \Omega\cap\{t<t_0\}\},$$
$$d^-(t,x;\tau_0) = \sup\{\rho \mid Q\rho^- \subset \Omega\cap\{\tau<\tau_0\}\}.$$

Так как Ω расширяется, то $d^+(\tau,\xi;t) = \min(\sqrt{t-\tau},\rho_\tau(\xi))$, где $\rho_\tau(\xi)$ — расстояние от ξ до границы D_τ.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть Ω удовлетворяет условию* (1). *Тогда существуют постоянные C_m (зависящие от γ_1, γ_2 из* (5) *и размерности пространства n) и κ (зависящая от γ_2) такие, что для функции Грина задачи* (3), (4) *для всех p, $1\le p\le\infty$, справедливы неравенства*

$$\left(\int\limits_{D_t\cap\{|x-\xi|>r\}} G^q(t,x;\tau,\xi)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{C_1\exp(-\kappa\min(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\frac{r^2}{t-\tau})}{(d^+(\tau,\xi;t))^{\frac{n}{p}}}, \tag{9}$$

$$\left(\int\limits_{D_\tau\cap\{|x-\xi|>r\}} G^p(t,x;\tau,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C_2\exp(-\kappa\min(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\frac{r^2}{t-\tau})}{(d^-(t,x;\tau))^{\frac{n}{q}}}, \tag{10}$$

$$G(t,x;\tau,\xi) \le \frac{C_3\exp(-\kappa\min(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\frac{r^2}{t-\tau})}{(d^+(\tau,\xi;t))^{\frac{n}{q}}(d^-(t,x;\tau))^{\frac{n}{p}}}, \tag{11}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $t>\tau$, $r>0$.

Замечание. Как обычно, при $p=1$ считаем $\frac{1}{q}=0$, при $p=\infty$ считаем $\frac{1}{p}=0$, $q=1$, $(\int|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} = \operatorname{ess\,sup}|f(x)|$.

Отметим, что из (11) (в отличие от (8)) следует, что $G(t,x;\tau,\xi)$ как функция переменной x ограничена вплоть до границы D_t (при фиксированных $\tau<t$, $\xi\in D_\tau$), и как функция переменной ξ ограничена вплоть до границы D_τ.

2. Функциональные пространства и обобщенные решения

Отметим прежде всего, что аналогичные рассуждения для случая цилиндрических областей имеются в работе [2].

Пусть область Ω удовлетворяет условию (1). Через Ω_T обозначим пересечение Ω с полупространством $\{t<T\}$, а через Γ_T — параболическую границу Ω_T, $\Gamma_T = \Gamma\cap\{t<T\}$.

Пусть $V = V(\Omega_T)$ — множество функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, обращающихся в нуль при $t \geq T$ (точнее — множество сужений на Ω_T функций указанного класса). Под $W_2^{0,1}$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}$ будем понимать пополнение V по нормам

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{W_2^{0,1}} &= \int_{\Omega_T} \left(u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right) dx\, dt,\\
\|u\|^2_{W_2^{1,1}} &= \int_{\Omega_T} \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right) dx\, dt.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Разумеется, в определении $W_2^{0,1}$ класс V можно заменить на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Если пополнение $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в норме (12) обозначить через $W_2^{1,1}$, то

$$
\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1} = \{u \in W_2^{1,1} \mid \ u|_{t=T} = 0\},
$$

где $u|_{t=T}$ — след функции u.

Пусть $-\frac{d}{dt}$ — оператор, отображающий $W_2^{0,1} \to W_2^{0,1^*}$, с областью определения V. Как обычно, отождествляем $L_2(\Omega_T)$ со своим сопряженным. Поэтому

$$
W_2^{0,1} \subset L_2 = (L_2)^* \subset W_2^{0,1^*},
$$

и для любой $u \in L_2$

$$
\|u\|_{W_2^{0,1^*}} = \sup_{\varphi \in W_2^{0,1}} \frac{\left|\int_{\Omega_T} u\varphi \, dx\, dt\right|}{\|\varphi\|_{W_2^{0,1}}}.
$$

Лемма 1. *Оператор* $-\frac{d}{dt} : V \subset W_2^{0,1} \to W_2^{0,1^*}$ *допускает замыкание.*

Заметим, что для любой $u \in V$ справедливо равенство

$$
u^2(s(x), x) = -\int_{s(x)}^T 2u \frac{\partial u}{\partial t} dt
$$

(функция $s(x)$ определена в (2)). Следовательно,

$$
\int_{D_T} u^2(s(x), x) dx \leq 2 \left| \int_{\Omega_T} u \frac{\partial u}{\partial t} dx\, dt \right| \leq 2\|u\|_{W_2^{0,1}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{W_2^{0,1^*}}. \tag{13}
$$

Обозначим через $\mathcal{D}^- : W_2^{0,1} \to W_2^{0,1^*}$ замыкание оператора $-\frac{d}{dt}$, а через H^- — его область определения, которое снабдим нормой графика

$$
\|u\|^2_{H^-} = \|u\|^2_{W_2^{0,1}} + \|\mathcal{D}^- u\|^2_{W_2^{0,1^*}}.
$$

Очевидно, H^- — банахово пространство (более того, в нем можно ввести скалярное произведение, задающее данную норму), которое плотно в $W_2^{0,1}$.

Из оценки (13) вытекает утверждение о следах функций из H^-.

Лемма 2. *Отображение* $\gamma : u(t, x) \to u(s(x), x)$, *определенное на функциях из* V, *продолжается по непрерывности до отображения* $\gamma : H^- \to L_2(D_T)$.

Для любой функции $u \in H^-$ будем использовать обозначения $\gamma u = u(s(x), x)$.

Обозначим через $\mathcal{D}^+ : W_2^{0,1} \to W_2^{0,1^*}$ оператор, сопряженный в смысле теории неограниченных операторов к $\mathcal{D}^- : W_2^{0,1} \to W_2^{0,1^*}$. Область определения $\mathcal{D}^+$ будем обозначать H^+. Снабженное нормой графика

$$
\|u\|^2_{H^+} = \|u\|^2_{W_2^{0,1}} + \|D^+ u\|^2_{W_2^{0,1^*}},
$$

H^+ будет гильбертовым (с подходящим скалярным произведением) пространством.

Лемма 3. 1) $\langle \mathcal{D}^- u, u\rangle \geq 0$ *для любой функции* $u \in H^-(\Omega_T)$,
2) $\langle \mathcal{D}^+ u, u\rangle \geq 0$ *для любой функции* $u \in H^+(\Omega_T)$.

Доказательство. 1. Если $u \in V$, то

$$\langle \overline{\mathcal{D}} u, u\rangle = -\Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u\Big\rangle = -\frac{1}{2}\int_{\Omega_T} \frac{\partial u^2}{\partial t} dx\, dt = \frac{1}{2} u^2(s(x), x) \geq 0.$$

Так как V плотно в H^-, то предельным переходом легко получить требуемое неравенство для любой $u \in H^-(\Omega_T)$.

2. Пусть $u \in H^+(\Omega_T)$. Обозначим через u_h осреднение Стеклова функции u: $u_h(t,x) = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} u(\tau, x) d\tau$, где $h > 0$. (Считаем $u(t,x) = 0$ при $t > T$.) Так как $u \in W_2^{0,1}(\Omega_T)$, то $u_h \in W_2^{1,1}(\Omega_T)$ (напомним, что Ω_T расширяется). При этом $\mathcal{D}^- u_h = -\frac{\partial u_h}{\partial t} = \frac{u(t,x) - u(t+h,x)}{h}$ и $u_h \to u$ в $W_2^{0,1}$ при $h \to 0$. Тогда

$$\langle \mathcal{D}^+ u, u_h\rangle = \langle u, \mathcal{D}^- u_h\rangle = \frac{1}{h}\int_{\Omega_T} u(t,x)(u(t,x) - u(t+h,x)) dx\, dt \geq$$
$$\geq \frac{1}{2h}\int_{\Omega_T} (u^2(t,x) - u^2(t+h,x)) dx\, dt = \frac{1}{2h}\int_{D_T}\int_{s(x)}^{s(x)+h} u^2(t,x) dt\, dx \geq 0.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получим нужное неравенство. □

Пусть $(H^-)^*$, $(H^+)^*$ — сопряженные пространства к H^- и H^+ соответственно, $(\mathcal{D}^-)^* : W_2^{0,1} \to (H^-)^*$, $(\mathcal{D}^+)^* : W_2^{0,1} \to (H^+)^*$ — сопряженные операторы к ограниченным операторам $\mathcal{D}^- : H^- \to (W_2^{0,1})^*$ и $\mathcal{D}^+ : H^+ \to (W_2^{0,1})^*$. Легко видеть, что $\mathcal{D}^- = (\mathcal{D}^+)^*|_{H^-}$, $\mathcal{D}^+ = (\mathcal{D}^-)^*|_{H^+}$,

$$H^+ = \{u \in W_2^{0,1} \mid (\mathcal{D}^-)^* u \in (W_2^{0,1})^*\},$$
$$H^- = \{u \in W_2^{0,1} \mid (\mathcal{D}^+)^* u \in (W_2^{0,1})^*\}.$$

Предложение 1. *Пусть* $\mathcal{M} : W_2^{0,1} \to (W_2^{0,1})^*$ *— линейный ограниченный оператор, удовлетворяющий для всех* $u \in W_2^{0,1}$ *неравенству*

$$\langle \mathcal{M}u, u\rangle \geq \mu \|u\|^2_{W_2^{0,1}} + \alpha \|u\|^2_{L_2}, \quad \mu > 0. \tag{14}$$

Тогда следующие операторы являются линейными гомеоморфизмами:

1. $\mathcal{D}^- + \mathcal{M} : H^- \to (W_2^{0,1})^*$,
2. $\mathcal{D}^+ + \mathcal{M}^* : H^+ \to (W_2^{0,1})^*$,
3. $(\mathcal{D}^-)^* + \mathcal{M}^* : W_2^{0,1} \to (H^-)^*$,
4. $(\mathcal{D}^+)^* + \mathcal{M} : W_2^{0,1} \to (H^+)^*$.

Доказательство. Предположим вначале, что постоянная α из (14) положительна. Тогда в силу леммы 3 неограниченные операторы $\mathcal{D}^- + \mathcal{M} : W_2^{0,1} \to (W_2^{0,1})^*$ и $\mathcal{D}^+ + \mathcal{M}^* : W_2^{0,1} \to (W_2^{0,1})^*$ имеют ограниченные обратные на своей области определения. Следовательно (напр., [3]), $\mathcal{D}^+ + \mathcal{M}^*$ и $\mathcal{D}^- + \mathcal{M}$ сюрьективны (как сопряженные к операторам с ограниченными обратными). Тем самым пп. 1 и 2 предложения 1 доказаны (непрерывность $\mathcal{D}^- + \mathcal{M} : H^- \to (W_2^{0,1})^*$, $\mathcal{D}^+ + \mathcal{M}^* : H^+ \to (W_2^{0,1})^*$ очевидна). Утверждения пп. 3 и 4 немедленно следуют из 1 и 2. Осталось заметить, что отображение $u \to e^{\lambda t} u$ является изоморфизмом пространств $W_2^{0,1}$ и $(W_2^{0,1})^*$ в себя ($T < \infty$). Поэтому условие $\alpha > 0$ не ограничивает общности. □

Заметим теперь, что если в качестве $\mathcal{M}$ взять оператор $\mathcal{M}u = -\Delta u + u$ (более точно оператор $\mathcal{M}$ определим равенством

$$\langle \mathcal{M}u, v\rangle = \int_{\Omega_T} \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + uv\Big) dx\, dt$$

для всех $u, v \in W_2^{0,1}(\Omega_T)$), то решение уравнения $\mathcal{D}^+ u + \mathcal{M}^* u = f$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \Big(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + uv\Big) dx\, dt = \int_{\Omega_T} fv\, dx\, dt$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}$ и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u = f$$

в смысле теории обобщенных функций в Ω. Поэтому u бесконечно дифференцируема, если f бесконечно дифференцируема.

Поскольку множество гладких функций плотно в $(W_2^{0,1}(\Omega_T))^*$, то из п. 2 предложения 1 вытекает, что пересечение $H^+(\Omega_T)$ с множеством бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega_T} \setminus \overline{\Gamma_T}$ функций (обозначим его V^+) плотно в $H^+(\Omega_T)$.

Лемма 4. *Пусть* $0 < t_0 \le T$. *Тогда для любой функции* u *из* V^+ $u(t_0, x) \in L_2(D_{t_0})$. *При этом отображение* $u(t, x) \to u(t_0, x)$ *продолжается по непрерывности до отображения*

$$\gamma_{t_0} : H^+(\Omega_T) \to L_2(D_{t_0}).$$

Замечание. Для функций из H^+ наряду с обозначением $\gamma_{t_0} u$ будем использовать обозначения $u|_{t=t_0}$ или $u(t_0, x)$.

В предложении 1 по существу доказаны существование и единственность решений задачи (3), (4) и сопряженной с ней задачи (16)–(18) (см. ниже). Сейчас мы дадим более традиционное определение обобщенных решений в терминах интегральных тождеств. А именно, функцию $u \in W_2^{0,1}$ будем называть обобщенным решением задачи (3), (4), если для всех $v \in V$ справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \Big(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) dx\, dt = \int_{\Omega_T} f(t,x)v(t,x) dx\, dt + \int_{D_T} \varphi(x) v(s(x), x) dx. \quad (15)$$

Интегралы, входящие в (15), определены, если $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi(x) \in L_2(D_T)$.

Рассмотрим теперь сопряженную к (3), (4) задачу

$$\widetilde{\mathcal{L}} v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i} = g(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_T, \quad (16)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\nu_j = 0, \quad (t,x) \in \Gamma_T, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$v|_{t=T} = \psi(x), \quad x \in D_T. \quad (18)$$

Под обобщенным решением задачи (16)–(18) будем понимать функцию $v \in W_2^{0,1}$, удовлетворяющую для всех $u \in H^+(\Omega_T)$ тождеству

$$\langle v, D^+ u\rangle + \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dx\, dt = \int_{\Omega_T} g(t,x)u(t,x) dx\, dt - \int_{D_T} \psi(x) u(T,x) dx. \quad (19)$$

Предложение 2. *Для любых* $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(D_T)$ *задача* (3), (4) *имеет единственное обобщенное решение.*

Для любых $g \in L_2(\Omega_T)$, $\psi \in L_2(D_T)$ *задача* (16)–(18) *имеет единственное обобщенное решение.*

Доказательство. Определяем оператор $\mathcal{M} : W_2^{0,1} \to (W_2^{0,1})^*$ равенством

$$\langle \mathcal{M}u, v\rangle = \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx\, dt. \tag{20}$$

В силу лемм 2 и 4 функционалы $v \to \int\limits_{D_T} v(s(x), x)\varphi(x)dx$, $u \to \int\limits_{D_T} \psi(x)u(T, x)dx$ принадлежат $(H^-)^*$ и $(H^+)^*$ соответственно. Применение утверждений 3 и 4 предложения 1 завершает доказательство. $\square$

3. Построение функции Грина

Пусть U — открытое подмножество Ω_T. Будем говорить,что функция (определенная в U) принадлежит $H^-(H^+, W_2^{0,1})$ в U, если она является сужением на U функции из $H^-(\Omega_T)(H^+, W_2^{0,1})$.

Будем говорить, что функция u (соответственно v) является решением однородной задачи (3), (4) (соответственно (16)–(18)) в U, если она принадлежит $W_2^{0,1}$ в U и удовлетворяет (15) с $f = 0$, $\varphi = 0$ для всех $v \in V$ (соответственно (19) с $g = 0$, $\psi = 0$ для всех $u \in H^+$), обращающихся в нуль в окрестности $\Omega_T \setminus U$.

Предложение 3. *Существует функция $G(t, x; \tau, \xi) \in L_2(\Omega_T \times \Omega_T)$, непрерывная вне диагонали $(t, x) = (\tau, \xi)$, такая, что*

а) *для всех $(\tau_0, \xi_0) \in \Omega_T$ функция $G(t, x; \tau_0, \xi_0)$ принадлежит H^+ вне любой окрестности (τ_0, ξ_0), для всех $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ функция $G(t_0, x_0; \tau, \xi)$ принадлежит H^- вне любой окрестности (t_0, x_0);*

б) *для обобщенных решений задачи* (3), (4) *почти всюду справедливо равенство* (6), *для обобщенных решений задачи* (16)–(18) *почти всюду справедливо равенство*

$$v(\tau, \xi) = \int_{\Omega_T} G(t, x; \tau, \xi)g(t, x)dx\, dt + \int_{D_T} G(T, x; \tau, \xi)\psi(x)dx; \tag{21}$$

в) *вне любой окрестности каждой точки $(\tau_0, \xi_0) \in \Omega_T$ функция $G(t, x; \tau_0, \xi_0)$ является решением однородной задачи* (3), (4), *вне любой окрестности каждой точки $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ функция $G(t_0, x_0; \tau, \xi)$ является решением однородной задачи* (16)–(18).

Доказательство. Для всех f и g из $L_2(\Omega_T)$ определим функционал Φ равенством

$$\langle \Phi, f(\tau, \xi)g(t, x)\rangle = \langle (\mathcal{D}^- + \mathcal{M})^{-1}g, f\rangle = \langle (\mathcal{D}^+ + \mathcal{M})^{-1}f, g\rangle,$$

где оператор $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ определен в (20). В силу предложения 1 Φ однозначно продолжается до линейного непрерывного функционала на $L_2(\Omega_T \times \Omega_T)$.

По теореме Рисса существует $G \in L_2(\Omega_T \times \Omega_T)$ такая, что

$$\langle \Phi, f(\tau, \xi)g(t, x)\rangle = \int_{\Omega_T \times \Omega_T} G(t, x; \tau, \xi)f(\tau, \xi)g(t, x)d\tau\, d\xi\, dt\, dx.$$

Справедливость равенств (6) (при $\varphi = 0$) и (19) (при $\psi = 0$) следует из теоремы Фубини.

Пусть U_1, U_2 — открытые подмножества Ω_T, замыкания которых не пересекаются, $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ — открытые подмножества, компактно лежащие в U_1 и U_2 соответственно. Пусть $f(\tau, \xi)$, принадлежащая $H^-(\Omega_T)^*$, имеет носитель в U_2, тогда $u(t, x) = ((\mathcal{D}^-)^* + \mathcal{M})^{-1} f$ является решением однородной задачи (3), (4) в U_1 и поэтому [3] непрерывна по Гёльдеру в U_1 с показателем $\alpha = \alpha(\gamma_1, \gamma_2, n) > 0$, причем

$$\|u\|_{C^\alpha(\widetilde{U}_1)} \le c\|u\|_{L_2(U_1)}, \tag{22}$$

где c зависит только от γ_1, γ_2, n, U_1, $\widetilde{U}_1$.

Поэтому для всех $(t,x)\in U_1$ функционал $f\to u(t,x)$ непрерывен в норме $(H^-)^*$ и по теореме Хана–Банаха продолжается до элемента $G^1_{t,x}(\tau,\xi)\in(H^-)^{**}=H^-$,

$$u(t,x)=\langle f(\tau,\xi),G^1_{t,x}(\tau,\xi)\rangle, \tag{23}$$

причем норма $G^1_{t,x}$ в $H^-(\Omega_T)$ равномерно относительно $(t,x)\in\widetilde{U}_1$ ограничена. Очевидно, $G^1_{t,x}(\tau,\xi)=G(t,x;\tau,\xi)$ почти всюду в $U_1\times U_2$. Тем самым первое утверждение п. а) доказано.

Аналогично строится семейство функций $G^2_{\tau,\xi}(t,x)\in H^+(\Omega_T)$, совпадающих почти всюду в $U_1\times U_2$ с $G(t,x;\tau,\xi)$, равномерно ограниченное в $H^+(\Omega_T)$ относительно $(\tau,\xi)\in\widetilde{U}_2$.

Если в качестве U_1 взять окрестность некоторой точки (t,x), компактно лежащую в Ω_T, в качестве U_2 — окрестность границы Ω_T, а в качестве f — функционал

$$u\to\int_{D_T}u(s(x),x)\varphi(x)dx,$$

то из (23) следует (6) (для п. в. (t,x) следы функций G и $G^1_{t,x}$ на Γ_T, очевидно, совпадают). Равенство (21) получается аналогично.

Пусть теперь $u\in H^+(\Omega_T)$ имеет носитель вне $\widetilde{U}_1$. Тогда, положив $f=(\mathcal{D}^++\mathcal{M})u$, в силу (23) получим

$$\langle G^1_{t,x},(\mathcal{D}^++\mathcal{M})u\rangle=0 \tag{24}$$

при $(t,x)\in U_1$. Поэтому $G^1_{t,x}$ является решением однородной задачи (16)–(18) в U_2 и, следовательно, удовлетворяет там условию Гёльдера. Так как норма $G^1_{t,x}(\tau,\xi)$ в $H^-(\Omega_T)$ ограничена равномерно относительно $(t,x)\in\widetilde{U}_1$, то из неравенства, аналогичного (22), вытекает, что $\|G^1_{t,x}\|_{C^\alpha(\widetilde{U}_2)}$ также равномерно ограничена. $G^2_{\tau,\xi}$, очевидно, обладает тем же свойством. Функция $G(t,x;\tau,\xi)$ для п. в. $(t,x;\tau,\xi)\in\widetilde{\mathcal{U}}_1\times\widetilde{\mathcal{U}}_2$ совпадает как с $G^1_{t,x}(\tau,\xi)$, так и с $G^2_{\tau,\xi}(t,x)$ и, значит, ее можно считать (исправив на множестве нулевой меры) непрерывной по Гёльдеру в $\widetilde{U}_1\times\widetilde{U}_2$ по совокупности переменных. В силу произвольности $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ $G(t,x;\tau,\xi)$ непрерывна по Гёльдеру всюду вне диагонали $(t,x)=(\tau,\xi)$.

Из (24) следует, что равенство

$$\langle G(t,x;\tau,\xi),(\mathcal{D}^++\mathcal{M})u(\tau,\xi)\rangle=0 \tag{25}$$

справедливо при $(t,x)\in\widetilde{U}_1\setminus E$, где E — множество нулевой меры. Приближая теперь произвольную точку $(t,x)\in\widetilde{U}_1$ последовательностью $(t_k,x_k)\in\widetilde{U}_1\setminus E$ и учитывая ограниченность норм $G(t_k,x_k;\tau,\xi)$ в H^-, можем выбрать слабо сходящуюся в H^- подпоследовательность последовательности $G(t_k,x_k;\tau,\xi)$. Перейдя к пределу в (25), получим, что для всех $(t,x)\in\widetilde{U}_1$ $G(t,x;\tau,\xi)$ является решением однородной задачи (16)–(18) в U_2. Первое утверждение п. в) доказывается аналогично. □

Следствие. При $t<\tau$ $G(t,x;\tau,\xi)=0$.

Так как в области $\Omega_T\cap\{t<\tau-\delta\}$ $(\delta>0)$ $G(t,x;\tau,\xi)$ как функция переменных (t,x) является решением однородной задачи (3), (4), то в силу единственности решения она равна нулю.

4. Оценки функции Грина

Пусть теперь $\Omega^{t_2}_{t_1}=\Omega\cap\{t_1<t<t_2\}$, $0\le t_1<t_2\le T$. Покажем, что построенная в п. 3 функция Грина задач (3), (4) и (16)–(18) является также функцией Грина в области $\Omega^{t_2}_{t_1}$ задачи

$$\mathcal{L}u=0,\quad (t,x)\in\Omega^{t_2}_{t_1}, \tag{26}$$

$$\mathcal{L}_0u=0,\quad (t,x)\in\Gamma,\quad t_1<t<t_2, \tag{27}$$

$$u\Big|_{t=t_1}=\varphi(x),\quad x\in D_{t_1}, \tag{28}$$

и сопряженной к ней задачи

$$\widetilde{\mathcal{L}}v = 0, \quad (t,x) \in \Omega_{t_1}^{t_2}, \tag{29}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\nu_j = 0, \quad (t,x) \in \Gamma, \ \ t_1 < t < t_2, \tag{30}$$

$$v|_{t=t_2} = \psi(x), \quad x \in D_{t_2}. \tag{31}$$

Обобщенные решения задачи (26)–(28) и (29)–(31) определяются интегральными тождествами (аналогичными (15) и (19))

$$\int_{\Omega_{t_1}^{t_2}} \Big(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) dx\, dt = \int_{D_{t_1}} \varphi(x)v(t_1,x)dx \tag{32}$$

для всех $v \in V(\Omega_T)$, обращающихся в нуль при $t > t_2$ и соответственно

$$\langle v, D^+u\rangle + \int_{\Omega_{t_1}^{t_2}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx\, dt = \int_{D_{t_2}} \psi(x)u(t_2,x)dx \tag{33}$$

для всех $u \in H^+(\Omega_{t_1}^{t_2})$.

Лемма 5. *Функция* $u(t,x) = \int\limits_{D_{t_1}} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi$ *является обобщенным решением задачи* (26)–(28). *Функция* $v(\tau,\xi) = \int\limits_{D_{t_2}} G(t_2,x;\tau,\xi)\psi(x)dx$ *является обобщенным решением задачи* (29)–(31).

Доказательство. Пусть $\langle f, v\rangle = \int\limits_{D_{t_1}} v(t_1,\xi)\varphi(\xi)d\xi$ для всех $v \in H^-(\Omega_T)$. Тогда в силу леммы 2 $f \in H^-(\Omega_T)^*$. Из свойств функции Грина следует, что $((\mathcal{D}^-)^* + \mathcal{M})u = f$, а т. к. из следствия к предложению 3 вытекает, что $u = 0$ при $t < t_1$, то (32) доказано.

Аналогичными рассуждениями мы докажем справедливость (33), если проверим, что всякую функцию $u \in H^+(\Omega_{t_1}^{t_2})$ можно продолжить до функции $\widetilde{u} \in H^+(\Omega_T)$, равной нулю при $\tau < t_1$, и сужение $\mathcal{D}^+\widetilde{u}$ на $\Omega_{t_1}^{t_2}$ совпадает с $\mathcal{D}^+u$. Пусть $f = (\mathcal{D}^+ + \mathcal{M})u$, $\widetilde{f}$ — продолжение нулем на Ω_T функции f, которое не выводит за пределы класса $(W_2^{0,1})^*$. Тогда $\widetilde{u} = (\mathcal{D}^+ + \mathcal{M})^{-1}f = 0$ при $\tau < t_1$. Следовательно, для любой функции $v \in V(\Omega_T)$, обращающейся в нуль при $t > t_2$, справедливо равенство

$$\int_{\Omega_{t_1}^{t_2}} \Big(-\widetilde{u}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) dx\, dt = \int_{\Omega_{t_1}^{t_2}} f\, v\, dx,$$

т. е. u совпадает с сужением $\widetilde{u}$ на $\Omega_{t_1}^{t_2}$ (в силу единственности обобщенного решения). □

Замечание. При доказательстве леммы мы не делали различия в обозначениях операторов $\mathcal{D}^+$ в Ω_T и в $\Omega_{t_1}^{t_2}$, что не должно привести к недоразумениям, поскольку всегда указывался его аргумент.

Пусть A_0 — открытое подмножество $\mathbf{R}^n$, $A_\rho = \{x \in A_0 \mid \inf\limits_{\xi \notin A_0} |x - \xi| > \rho\}$, $D_{t,\rho} = D_t \cap A_\rho$, $\Omega_\rho = \Omega \cap \{A_\rho \times \{t > 0\}\}$,

$$H(t,\rho) = \int_{D_{t,\rho}} u^2(t,x)dx + 2\int_0^t \int_{D_{t,\rho}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx\, d\tau.$$

Лемма 6. *Пусть $u(t,x)$ является решением однородной задачи* (3), (4) *в* Ω_0. *Тогда для всех* $t>0$, $R>0$

$$H(t,R)\le c_0\exp\Big(-\kappa_0\frac{R^2}{t}\Big)H(t,0), \tag{34}$$

где c_0 — абсолютная постоянная, κ_0 зависит от γ_2.

Доказательство. Из интегрального тождества (15) с $f=0$, $\varphi=0$ с помощью стандартных рассуждений (см. [3], [4]) получаем неравенство

$$\frac12\int_{D_t}u^2(t,x)\theta(x)dx+\int_0^t\int_{D_\tau}\theta\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\,d\tau\le\Big|\int_0^t\int_{D_\tau}u\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}dx\,d\tau\Big| \tag{35}$$

для любой неотрицательной функции $\theta(x)$ с носителем в A_0 и равномерно ограниченными первыми производными.

Для любого множества A функция $d(x,A)=\inf\limits_{y\in A}|x-y|$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица

$$|d(x,A)-d(y,A)|\le|x-y|$$

и, следовательно, имеет обобщенные производные первого порядка, причем для п. в. $x\in\mathbf{R}^n$ $|\frac{\partial}{\partial x_i}d(x,A)|\le 1$.

Пусть при $r>0$, $\rho>0$

$$\theta_{r,\rho}(x)=\min(1,\tfrac1\rho d(x,\mathbf{R}^n\setminus A_r)).$$

Тогда $\theta(x)=0$ при $x\notin A_r$, $\theta(x)=1$ при $x\in A_{r+\rho}$ и $|\frac{\partial\theta}{\partial x_i}|\le\frac1\rho$ при п. в. $x\in\mathbf{R}^n$.

Положив в (35) $\theta(x)=\theta_{r,\rho}(x)$, получим

$$H(t,r+\rho)\le 2\Big(\int_0^t\int_{D_{\tau,r}}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\,d\tau\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^t\int_{D_{t,r}}u^2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}dx\,d\tau\Big)^{\frac12}\le$$
$$\le\frac{\sqrt{2\gamma_2}}{\rho}\Big(H(t,r)\int_0^t H(\tau,r)d\tau\Big)^{\frac12}.$$

Повторяя далее рассуждения из ([4], предложение 3), получим (34). □

При произвольных t_1 и t_2 ($0<t_1<t_2$) через $\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}$ обозначим оператор, который каждой функции $\varphi\in L_2(D_{t_1})$ ставит в соответствие функцию $u(t_2,x)\in L_2(D_{t_2})$, где $u(t,x)$ — решение задачи (26)–(28). В силу леммы 5 сопряженный к $\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}$ оператор $(\mathcal{U}_{t_1}^{t_2})^*:L_2(D_{t_2})\to L_2(D_{t_1})$ переводит функцию $\psi\in L_2(D_{t_2})$ в $v(t,x)$, где v — решение задачи (29)–(31).

В [4] установлено, что

$$\|\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}\|\le 1, \tag{36}$$

и что оценка (36) справедлива, если рассматривать $\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}$ как оператор, отображающий $L_1(D_{t_1})\to L_1(D_{t_2})$ и $L_\infty(D_{t_1})\to L_\infty(D_{t_2})$.

С учетом (36) из (34) следует, что норма $\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}$ как оператора из $L_2(D_{t_1}\setminus D_{t_1,0})$ (функция $\varphi=0$ вне A_0) в $L_2(D_{t_2,R})$ удовлетворяет неравенству

$$\|\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}\|\le C_0\exp\Big(-\kappa\frac{R^2}{t_2-t_1}\Big)$$

для любого множества A_0 и $R\ge 0$.

Применяя теперь интерполяционную теорему Рисса–Торина ([5]–[7]), для оператора $\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}$: $L_p(D_{t_1} \setminus D_{t_1,0}) \to L_p(D_{t_2,R})$ получим оценку

$$\|\mathcal{U}_{t_1}^{t_2}\| \le C_0 \exp\Big(- \kappa_0 \min(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}) \frac{R^2}{t_2 - t_1} \Big), \tag{37}$$

где $p \ge 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Из этой же теоремы следует, что (36) справедлива для $\mathcal{U}_{t_1}^{t_2} : L_p(D_{t_1}) \to L_p(D_{t_2})$ при всех p $(1 \le p \le \infty)$. Следовательно, для любой функции $\varphi \in L_2(D_{t_1}) \cap L_q(D_{t_1})$

$$\Big\| \int_{D_{t_1}} G(t_2, x; t_1, \xi) \varphi(\xi) d\xi \Big\|_{L_q(D_{t_2})} \le \|\varphi(\xi)\|_{L_q(D_{t_1})}$$

для всех $t_2 > t_1$.

Как следует из результатов работы [5], для любого решения $u(t,x)$ уравнения (26) в цилиндре $Q_\rho^-(t,x)$ справедлива оценка

$$|u(t,x)| \le \frac{c_1}{\rho^{\frac{n}{q}}} \max_{t-\rho^2 < \tau < t} \|u(\tau, x)\|_{L_q(D_\tau)}. \tag{38}$$

Следовательно,

$$\Big| \int_{D_{t_1}} G^q(t, x; t_1, \xi) \varphi(\xi) d\xi \Big| \le \frac{C_1 \|\varphi\|_{L_q}}{(d^-(t,x;t_1))^{\frac{n}{q}}},$$

отсюда в силу произвольности φ

$$\Big(\int_{D_{t_1}} G^p(t, x; t_1, \xi) d\xi \Big)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C_1}{(d^-(t,x;t_1))^{\frac{n}{q}}}. \tag{39}$$

Аналогично,

$$\Big(\int_{D_{t_2}} G^q(t_2, x; \tau, \xi) dx \Big)^{\frac{1}{q}} \le \frac{C_1}{(d^+(\tau,\xi;t_2))^{\frac{n}{p}}}. \tag{40}$$

Применяя теперь (38) к $G(t,x;\tau,\xi)$, получим

$$|G(t,x;\tau,\xi)| \le \frac{c_1}{\rho^{\frac{n}{q}}} \max_{t-\rho^2 < \eta < t} \Big(\int_{D_\eta} G^q(t,x;\eta,\xi) d\xi \Big)^{\frac{1}{q}} \tag{41}$$

для любого цилиндра $Q_\rho^-(t,x)$, лежащего в Ω_τ^t. Из (40) и (41) получаем

$$|G(t,x;\tau,\xi)| \le \frac{C_1^2}{(d^+(\tau,\xi;\frac{t+\tau}{2}))^{\frac{n}{p}} (d^-(t,x;\frac{t+\tau}{2}))^{\frac{n}{q}}} \le \frac{C}{(d^+(\tau,\xi;t))^{\frac{n}{p}} (d^-(t,x;\tau))^{\frac{n}{q}}}. \tag{42}$$

Из (39), (40) следует, что для доказательства неравенств (10) и (9) достаточно рассмотреть случай $r > 4(t-\tau)$. При этом

$$d^+(\tau,\xi;t) < \frac{r}{2}, \quad d^-(t,x;\tau) < \frac{r}{2}. \tag{43}$$

Возьмем в качестве A_0 шар с центром в точке x радиуса r. Из (37) с $R = \frac{r}{2}$ следует, что для всех $\varphi \in L_q \cap L_2$ с носителем вне A_0

$$\Big\| \int_{D_{t_1}} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi) d\xi \Big\|_{L_q(D_{t_2,\frac{r}{2}})} \le C_0 \exp\Big(- \kappa_0 \min(\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{q}) \frac{r^2}{4(t-\tau)} \Big) \|\varphi\|_{L_q}.$$

Следовательно, учитывая (43), из (38) получим

$$\Big| \int_{D_{t_1}} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi) d\xi \Big| \le \frac{C \exp(-\kappa_0 \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \frac{r^2}{4(t-\tau)})}{d^-(t,x;\xi)^{\frac{n}{q}}} \|\varphi\|_{L_q}.$$

Отсюда в силу произвольности φ следует (10). Неравенство (9) доказывается аналогично.

Для доказательства (11) достаточно (в силу (42)) ограничиться случаем $|x-\xi|^2 > 4(t-\tau)$. Возьмем $r = \frac{|x-\xi|}{2}$, тогда $d^+(\tau,\xi;t) + r \leq |x-\xi|$. Из (10) и (41) следует

$$|G(t,x;\tau,\xi)| \leq \frac{C_1\, C \exp(-\kappa_0 \min(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\frac{r^2}{4(t-\tau)})}{(d^+(\tau,\xi;\frac{t+\tau}{2}))^{\frac{n}{p}}(d^-(t,x;\frac{t+\tau}{2}))^{\frac{n}{q}}}.$$

Простой оценкой получим отсюда (11). Теорема доказана. □

Литература

1. Гущин А.К. *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. – 1982. – Т. 119. – № 4. – С. 451–508.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 538 с.
4. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области* // Матем. сб. – 1980. – Т. 111 – № 1. – С. 95–115.
5. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
6. Riesz M. *Sur les maxima des formes bilinaires et sur les fonctionelles linaires* // Acta math. – 1926. – V. 49. – P. 460 –497.
7. Thorin G.O. *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz* // Comm. sem. math. univ. Lund. – 1939. – V. 4. – P. 1–5.

Челябинский государственный университет

Поступили
первый вариант 17.08.1998
окончательный вариант 22.05.2000