ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 517.54

И.Р. НЕЖМЕТДИНОВ

ДВОЙСТВЕННЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ И ОБОЛОЧКИ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

Пусть $D(a,R)=\{z:|z-a|<R\}$, где $a\in\mathbf{C}$, $R>0$. Для краткости далее положим $D_R=D(0,R)$, $D=D_1$. Обозначим через $\mathcal{A}(D_R)$ класс функций вида $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(f)z^k$, регулярных в D_R. Известно ([1], с. 98), что $\mathcal{A}(D_R)$ является топологическим векторным пространством, сходимость в котором равносильна равномерной сходимости внутри D_R. Пусть также $\mathcal{A}_0(D_R)=\{f\in\mathcal{A}(D_R):a_0(f)=1\}$, $\mathcal{A}=\mathcal{A}(D)$, $\mathcal{A}_0=\mathcal{A}_0(D)$, $\mathcal{A}(\overline{D})=\{f\in\mathcal{A}:f$ регулярна в замкнутом единичном круге $\overline{D}\}$.

Пространство Λ линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{A}$ характеризует следующая

Теорема A ([2]). *Функционал λ, заданный на $\mathcal{A}$, является линейным и непрерывным тогда и только тогда, когда найдется функция $g\in\mathcal{A}(\overline{D})$ такая, что $\lambda(f)=(f*g)(1)$ при всех $f\in\mathcal{A}$, где $(f*g)(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(f)a_k(g)z^k$ — свертка по Адамару.*

В дальнейшем указанное соответствие между λ и g будем обозначать через $\lambda:=g$.

Для $V\subset\mathcal{A}_0$, следуя работе [3], определим двойственное дополнение к V как $V^*=\{g\in\mathcal{A}_0:(f*g)(z)\neq0\ \forall z\in D,\ \forall f\in V\}$. Класс V называется двойственным, если $V=W^*$ при некотором $W\subset\mathcal{A}_0$. Многие широко известные классы функций могут быть представлены с помощью двойственности, что приводит к критериям однолистности, звездообразности, выпуклости и т. п. Двойственной оболочкой V называется класс $V^{**}=(V^*)^*$, являющийся наименьшим из всех двойственных классов, содержащих V. Приведем формулировку принципа двойственности [4], характеризущего двойственную оболочку при некоторых ограничениях на класс V.

Теорема B. *Пусть $V\subset\mathcal{A}_0$ компактно и удовлетворяет условию*

$$P_xf\in V\quad\text{при всех}\quad f\in V,\ x\in\overline{D},\tag{1}$$

где $(P_xf)(z)=f(xz)$, $z\in D$. Тогда для любого $\lambda\in\Lambda$ выполняется равенство $\lambda(V)=\lambda(V^{**})$, причем

$$f\in V^{**}\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda\quad\lambda(f)\in\lambda(V).\tag{2}$$

В данной статье получены некоторые новые представления для двойственных дополнений и оболочек. Показано, что принцип двойственности остается в силе при некотором ослаблении условий по сравнению с приводимыми в [3] и [4]. Наконец, вводятся и рассматриваются подмножества $U\subset V$, для которых $U^*=V^*$ (и $U^{**}=V^{**}$ соответственно).

2. Основные результаты

Следуя [4], назовем множество $V \subset \mathcal{A}_0$, удовлетворяющее условию (1), завершенным. Определим завершенную оболочку V как класс $\mathrm{cm}(V) = \cup_{x \in \overline{D}} P_x(V) = \{P_x f : f \in V,\ x \in \overline{D}\}$, который является наименьшим из всех завершенных множеств, содержащих V. Нетрудно видеть, что $\mathrm{cm}(V)$ совпадает с классом V', введенным в работе [3]. Там же показано, что теорема B будет справедлива и при замене (1) на более слабое условие

$$\lambda(V) = \lambda[\mathrm{cm}(V)] \ \text{ для всех } \ \lambda \in \Lambda. \tag{3}$$

Отметим без доказательства некоторые простые свойства завершенной оболочки (множества $U, V \subset \mathcal{A}_0$ предполагаются произвольными):

a) если V компактно, то $\mathrm{cm}(V)$ тоже компактно;

b) $(\mathrm{cm}(V))^* = V^*$;

c) $\mathrm{cm}(U \cup V) = \mathrm{cm}(U) \cup \mathrm{cm}(V)$;

d) $\mathrm{cm}(U \cap V) \subset \mathrm{cm}(U) \cap \mathrm{cm}(V)$.

Для $V \subset \mathcal{A}_0$ рассмотрим класс $V^T = \{g \in \mathcal{A}_0(\overline{D}) : (f * g)(1) \neq 0$ при всех $f \in V\}$. Из завершенности V легко следует завершенность V^T, но не наоборот. Аналогично, для $U \subset \mathcal{A}_0(\overline{D})$ введем класс $U^\perp = \{h \in \mathcal{A}_0 : (g * h)(1) \neq 0$ при всех $g \in U\}$.

Теперь сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Если $V \subset \mathcal{A}_0$, то $V^* = \overline{(\mathrm{cm}(V))^T}$, где замыкание берется в пространстве $\mathcal{A}$.*

Теорема 2. *Пусть V — компактный подкласс $\mathcal{A}_0$, причем V^T является завершенным. Тогда при любом $\lambda \in \Lambda$ имеем $\lambda(V) = \lambda(V^{**})$, более того, справедлива эквивалентность* (2).

Теорема 3. *В условиях предыдущей теоремы имеет место равенство*

$$V^{**} = (V^T)^\perp.$$

3. Доказательство основных результатов

Для начала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в пространстве $\mathcal{A}(D_{R_1})$, а $g_n \to g$, $n \to \infty$ в $\mathcal{A}(D_{R_2})$, то $f_n * g_n \to f * g$, $n \to \infty$ в $\mathcal{A}(D_{R_1 R_2})$.*

Доказательство. Предположим, что $z \in \overline{D_\rho}$, где $0 < \rho < R_1 R_2$. Выберем $\rho_1 < R_1$, $\rho_2 < R_2$ так, чтобы $\rho < \rho_1 \rho_2 < R_1 R_2$. Сходимость $f_n \to f$ в пространстве $\mathcal{A}(D_{R_1})$ влечет за собой равномерную сходимость f_n к f в $\overline{D_{\rho_1}}$, из которой в свою очередь следует равномерная ограниченность $\{f_n\}$ в $\overline{D_{\rho_1}}$. В силу неравенств Коши для коэффициентов можно записать

$$|a_k(f_n)| \leq M(f_n, \rho_1)\rho_1^{-k} \leq M_1 \rho_1^{-k}, \tag{4}$$

$$|a_k(f_n) - a_k(f)| \leq M(f_n - f, \rho_1)\rho_1^{-k} \leq \varepsilon_{1,n}\rho_1^{-k} \ \text{ при всех } \ n \geq 1, \ \ k \geq 0, \tag{5}$$

где $M(f, r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $\varepsilon_{1,n} \to 0$, $n \to \infty$. Точно так же для последовательности $\{g_n\}$ получим

$$|a_k(g)| \leq M(g, \rho_2)\rho_2^{-k} \leq M_2 \rho_2^{-k}, \tag{6}$$

$$|a_k(g_n) - a_k(g)| \leq M(g_n - g, \rho_2)\rho_2^{-k} \leq \varepsilon_{2,n}\rho_2^{-k} \ \text{ при всех } \ n \geq 1, \ \ k \geq 0, \tag{7}$$

где $\varepsilon_{2,n} \to 0$, $n \to \infty$.

Применяя оценки (4)–(7), для всех $z \in \overline{D_\rho}$ будем иметь

$$|(f_n * g_n)(z) - (f*g)(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f_n)a_k(g_n) - a_k(f)a_k(g)|\rho^k \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} [|a_k(f_n)|\,|a_k(g_n) - a_k(g)| + |a_k(g)|\,|a_k(f_n) - a_k(f)|]\rho^k \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} [\varepsilon_{2,n}\rho_2^{-k} M_1 \rho_1^{-k} + \varepsilon_{1,n}\rho_1^{-k} M_2 \rho_2^{-k}]\rho^k = (\varepsilon_{2,n}M_1 + \varepsilon_{1,n}M_2)(1-\rho/\rho_1\rho_2)^{-1}.$$

Последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$, что и завершает доказательство. □

Лемма 2. *Пусть V — компактное подмножество $\mathcal{A}(D_{R_1})$, $g \in \mathcal{A}(D_{R_2})$. Тогда множество $U = \{f * g : f \in V\}$ компактно в $\mathcal{A}(D_{R_1R_2})$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций вида $f_n * g$, $n = 1, 2, \ldots$, где $f_n \in V$. В силу компактности V можно выбрать подпоследовательность f_{n_k}, равномерно сходящуюся внутри D_{R_1} к некоторой функции $f \in V$. Но тогда с учетом леммы 1 $f_{n_k} * g \to f * g \in U$ в пространстве $\mathcal{A}(D_{R_1R_2})$, и поэтому U компактно. □

Лемма 3. *Пусть V — компактное множество в $\mathcal{A}(D_R)$, $R > 1$, причем $f(1) \ne 0$ для любого $f \in V$. Тогда найдется $\sigma \in (1, R)$ такое, что $f(\sigma) \ne 0$ при всех $f \in V$.*

Доказательство. Предполагая противное, фиксируем некоторую убывающую последовательность $\{x_n\}$, $1 < x_n < R$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к единице. Тогда для любого $n \ge 1$ найдется функция $f_n \in V$, для которой $f_n(x_n) = 0$. Поскольку V компактно, то, выбирая при необходимости подпоследовательность, можно считать, что $f_n \to f \in V$ в пространстве $\mathcal{A}(D_R)$. Для последовательности функций $g_n(z) = (1 - x_n z)^{-1}$, $n \in \mathbf{N}$, принадлежащих $\mathcal{A}(D_{1/x_1})$, нетрудно показать, что $g_n(z) \to g(z) = (1-z)^{-1}$, $n \to \infty$, равномерно внутри D_{1/x_1}. Поэтому $f_n * g_n \to f * g$ равномерно внутри того же круга в силу леммы 1. В частности, имеем $f_n(x_n) = (f_n * g_n)(1) \to (f * g)(1) = f(1)$, откуда $f(1) = 0$, что противоречит условию леммы. □

Лемма 4. *Пусть $V \subset U \subset \mathcal{A}_0$, причем для любого $\lambda \in \Lambda$, $\lambda := g$, имеем $g(0) \in \lambda(V)$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

а) $\lambda(U) = \lambda(V)$ *при всех* $\lambda \in \Lambda$,
б) *если* $\lambda \in \Lambda$,*то из* $0 \notin \lambda(V)$ *следует, что* $0 \notin \lambda(U)$,
в) $U^T = V^T$.

Доказательство. Импликация а) ⇒ б) тривиальна. Допустим, что справедливо условие б). Тогда при $g \in V^T$, $\lambda := g$ имеем $0 \notin \lambda(V)$, что влечет $0 \notin \lambda(U)$, т. е. $\lambda(f) = (g * f)(1) \ne 0$ при всех $f \in U$, откуда $g \in U^T$. Вместе с очевидным обратным включением $U^T \subset V^T$ это дает $U^T = V^T$. Наконец, пусть выполнено в). Фиксируем некоторый функционал $\lambda \in \Lambda$, $\lambda := g$. Достаточно доказать включение $\lambda(U) \subset \lambda(V)$. Предположим, что $w \in \mathbf{C} \setminus \lambda(V)$ (ясно, что тогда $w \ne g(0)$). Отсюда при $f \in V$ получим $\lambda(f) - w = \{[g(z) - w] * f(z)\}(1) \ne 0$, следовательно,

$$[g(z) - w][g(0) - w]^{-1} \in V^T = U^T. \tag{8}$$

Это равносильно тому, что $w \notin \lambda(U)$, иначе говоря, $\lambda(U) \subset \lambda(V)$, что и требовалось. □

Заметим, что условие а) при $U = \mathrm{cm}(V)$ совпадает с условием (3). Покажем, что для компактных классов V дополнительное предположение $g(0) \in \lambda(V)$ можно опустить.

Лемма 5. *Пусть класс $V \subset \mathcal{A}_0$ компактен, причем $(\mathrm{cm}(V))^T = V^T$. Тогда $g(0) \in \lambda(V)$ при любом $\lambda \in \Lambda$, $\lambda := g$.*

Доказательство. Предположим, что при некотором $\lambda \in \Lambda$, $\lambda := g$, имеем $g(0) \notin \lambda(V)$. В силу компактности V и непрерывности λ множество $\lambda(V)$ компактно, и найдется такое $\varepsilon > 0$, что $D(g(0), \varepsilon) \cap \lambda(V) = \emptyset$. Теперь, если $w \in D(g(0), \varepsilon)$, $w \neq g(0)$, то, рассуждая как при доказательстве леммы 4, получим соотношение (8) с $U = \mathrm{cm}(V)$. Поэтому для всех $f \in V, x \in \overline{D}$ имеем

$$\{[g(z) - w][g(0) - w]^{-1} * P_x f\}(1) = [(g * f)(x) - w][g(0) - w]^{-1} \neq 0,$$

откуда $(g * f)(x) \neq w$ при $x \in \overline{D}$. Следовательно, $g(0) = (g * f)(0)$ — изолированная точка образа $(g * f)(D)$ для любой фиксированной функции $f \in V$. По принципу сохранения области, $(g * f)(z)$ постоянна в D и даже в несколько большем круге. Но тогда $\lambda(f) = (g * f)(1) = g(0)$, что противоречит сделанному предположению. $\square$

Отметим, что V^T будет завершенным тогда и только тогда, когда $V^T = (\mathrm{cm}(V))^T$. Действительно, если V^T — завершенный класс, то $P_x g \in V^T$, если только $g \in V^T$, $x \in \overline{D}$, поэтому для любого $f \in V$ имеем

$$(P_x g * f)(1) = (g * P_x f)(1) \neq 0, \tag{9}$$

откуда $g \in (\mathrm{cm}(V))^T$. Так как $V \subset \mathrm{cm}(V)$, то из доказанного следует, что $V^T = (\mathrm{cm}(V))^T$. Обратно, если последнее равенство верно, то для любого $g \in V^T$ с учетом соотношений (9) с произвольными $f \in V$ и $x \in \overline{D}$ заключаем, что $P_x g \in V^T$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $g \in V^*$. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{r_n\}$ такую, что $0 < r_n < 1$, $n \in \mathbf{N}$, и $r_n \to 1$, $n \to \infty$. Положим $g_n(z) = (P_{r_n} g)(z) = (1 - r_n z)^{-1} * g(z)$. Так как $0 < r_n < 1$, то $g \in \mathcal{A}_0(\overline{D})$, $n = 1, 2, \ldots$ Нетрудно доказать, что $(1 - r_n z)^{-1} \to (1 - z)^{-1}$ в $\mathcal{A}$, откуда из леммы 1 следует $g_n \to g$, $n \to \infty$. Если $f \in V$, $x \in \overline{D}$, то $(g_n * P_x f)(1) = (g * f)(r_n x) \neq 0$, т. к. $g \in V^*$. Поэтому $g_n \in (\mathrm{cm}(V))^T$, и $g \in \overline{(\mathrm{cm}(V))^T}$.

Обратно, пусть $g \in (\mathrm{cm}(V))^T$. Тогда при любых $f \in V, x \in \overline{D}$ имеем $(g * f)(x) = (g * P_x f)(1) \neq 0$, т. е. $g \in V^*$. Из доказанного включения $(\mathrm{cm}(V))^T \subset V^*$ с учетом замкнутости класса V^* в $\mathcal{A}$ [3] следует, что $\overline{(\mathrm{cm}(V))^T}$ тоже содержится в V^*. $\square$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему результату.

Теорема 1′. *При $U \subset \mathcal{A}_0(\overline{D})$ имеем $U^* = \overline{(\mathrm{cm}(U))^{\perp}}$.*

Заметим, что $U^T \subset U^{\perp}$, причем $U^{\perp}$ не обязательно замкнуто в $\mathcal{A}$.

Доказательство теоремы 2. В силу лемм 4 и 5 для доказательства первого утверждения теоремы достаточно проверить включение $V^T \subset (V^{**})^T$. Пусть $g \in V^T = (\mathrm{cm}(V))^T$. Тогда $g \in \mathcal{A}(D_R)$, $R > 1$, и для любой функции $f \in \mathrm{cm}(V)$ имеем $(g * f)(1) \neq 0$. Учитывая компактность $\mathrm{cm}(V)$ в $\mathcal{A}$, из лемм 2 и 3 заключаем, что при некотором σ, $1 < \sigma < R$, неравенство $(g * f)(\sigma) \neq 0$ справедливо для всех $f \in \mathrm{cm}(V)$. Полагая теперь $h = P_\sigma g$, будем иметь $h \in \mathcal{A}(\overline{D})$, и $(h * f)(1) \neq 0$, если только $f \in \mathrm{cm}(V)$. Таким образом, $h \in (\mathrm{cm}(V))^T$, и по теореме 1 $h \in V^*$. Поэтому для произвольного $k \in V^{**}$ имеем

$$(g * k)(1) = (P_{1/\sigma} h * k)(1) = (h * k)(1/\sigma) \neq 0,$$

откуда $g \in (V^{**})^T$.

Докажем вторую часть теоремы. Как уже доказано выше, при всех $\lambda \in \Lambda$ имеем $\lambda(V) = \lambda(V^{**})$, и из $f \in V^{**}$ следует, что $\lambda(f) \in \lambda(V)$. Обратно, пусть для функции $f \in \mathcal{A}_0$ включение $\lambda(f) \in \lambda(V)$ выполняется при всех $\lambda \in \Lambda$. Фиксируем произвольное $g \in V^T$, $\lambda := g$. В силу завершенности V^T имеем $\lambda(P_x h) = (g * P_x h)(1) \neq 0$, если только $h \in V$, $x \in \overline{D}$. Положим $\lambda_x := P_x g$. При $h \in V$, $x \in \overline{D}$ получаем $\lambda_x(h) = (P_x g * h)(1) = (g * P_x h)(1) \neq 0$, т. е. $0 \notin \lambda_x(V)$. Но тогда $\lambda_x(f) = (g * f)(x) \neq 0$, и $f \in (\overline{V^T})^* = [\overline{(\mathrm{cm}(V))^T}]^* = V^{**}$. Последнее равенство можно обосновать, если показать, что $(\overline{U})^* = U^*$ для $U \subset \mathcal{A}_0$. Из включения $U \subset \overline{U}$ следует, что $(\overline{U})^* \subset U^*$. Докажем обратное включение. Для любого $f \in \overline{U}$ существует последовательность $f_n \in U$, $n \in \mathbf{N}$, сходящаяся к f. Теперь, если $g \in U^*$, то $(g * f_n)(z) \neq 0$ при $n \in \mathbf{N}$, $z \in D$. В силу леммы 1 $g * f_n \to g * f$, $n \to \infty$, в пространстве $\mathcal{A}$. По теореме Гурвица ([5], с. 19), если $(g * f)(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то $(g * f)(z) \neq 0$ в круге D, но и в случае, когда $(g * f)(z) \equiv \mathrm{const}$, тоже получим $(g * f)(z) = (g * f)(0) = 1 \neq 0$. Поскольку функция $f \in \overline{U}$ выбрана произвольно, то $g \in (\overline{U})^*$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $h \in V^{**}$, $g \in V^T, \lambda := g$. Тогда $\lambda(f) = (g * f)(1) \neq 0$ при всех $f \in V$, т. е. $0 \notin \lambda(V)$. По теореме 2 $0 \neq \lambda(h) = (g * h)(1)$, откуда $h \in (V^T)^{\perp}$. Обратно, пусть $h \in (V^T)^{\perp}$, а $g \in V^*$. В силу теоремы 1 найдется последовательность функций $g_n \in V^T = (\mathrm{cm}(V))^T$, $n = 1, 2 \ldots$, такая, что $g_n \to g$, $n \to \infty$. При этом для всех $x \in \overline{D}$ имеем $(g_n * P_x h)(1) = (g_n * h)(x) \neq 0$. Используя теорему Гурвица, как в предыдущем доказательстве, получим $(h * g)(x) \neq 0$, если только $x \in D$, откуда $h \in V^{**}$. $\square$

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 2 справедливы равенства

$$V^{**} = \cap_{\lambda \in \Lambda} \lambda^{-1}[\lambda(V)] = \cap_{\lambda \in \Lambda}(V + \ker \lambda),$$

где $\lambda^{-1}(A)$ — прообраз множества A при отображении λ, $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ — алгебраическая сумма множеств, а $\ker \lambda = \{f \in \mathcal{A} : \lambda(f) = 0\}$ — ядро функционала λ.

Доказательство. Согласно теореме 2 включение $f \in V^{**}$ равносильно тому, что $\lambda(f) \in \lambda(V)$ при любом $\lambda \in \Lambda$, что в свою очередь равносильно включению $f \in \lambda^{-1}[\lambda(V)]$, $\lambda \in \Lambda$, и первое равенство доказано. Теперь, если $f \in \lambda^{-1}[\lambda(V)]$, то найдется $g \in V$ такое, что $\lambda(g) = \lambda(f)$. Но тогда для $h = f - g$ имеем $\lambda(h) = \lambda(f) - \lambda(g) = 0$, и $h \in \ker \lambda$, откуда $f = g + h \in V + \ker \lambda$. С другой стороны, если $f = g + h$, где $g \in V$, $h \in \ker \lambda$, то $\lambda(f) = \lambda(g) \in \lambda(V)$. $\square$

Замечание. Если $V \subset \mathcal{A}_0$ — компактный двойственный класс, то $V = \cap_{\lambda \in \Lambda} \lambda^{-1}[\lambda(V)]$. Аналогичное представление справедливо для произвольного компактного выпуклого множества в локально выпуклом пространстве X, однако вместо Λ здесь следует взять пространство всех вещественнозначных линейных непрерывных функционалов на X ([6], с. 88).

Следствие 2. Если $U, V \subset \mathcal{A}_0$ компактные, а U^T, V^T — завершенные классы, то следующие соотношения равносильны:
а) $U^{**} = V^{**}$; б) $U^T = V^T$; в) $U^* = V^*$.

Доказательство. Предположим, что выполнено равенство а). Пусть $g \in U^T$, $\lambda := g$. Тогда с учетом принципа двойственности имеем $0 \notin \lambda(U) = \lambda(U^{**}) = \lambda(V^{**}) = \lambda(V)$, откуда $g \in V^T$. Обратное включение доказывается аналогично. В силу теоремы 1 и замечания о завершенности U^T получаем импликацию б) $\Rightarrow$ в). Наконец, очевидно, из в) следует а). $\square$

Теорема 4. *Пусть $V \subset \mathcal{A}_0$ компактно, а V^T — завершенное множество. Тогда*

$$V^T = \cup_{0<r<1} P_r(V^T) = \cup_{0<r<1} P_r\{[P_r(V)]^T\}. \tag{10}$$

Доказательство. Из завершенности V^T следует, что при любом $r \in (0, 1)$ имеем $P_r(V^T) \subset V^T$, откуда $\cup_{0<r<1} P_r(V^T) \subset V^T$. Пусть $g \in V^T$. Тогда $g \in \mathcal{A}(D_R)$ при некотором $R > 1$, причем $(g * f)(1) \neq 0$ для всех $f \in V$. В силу лемм 2 и 3 найдется $\sigma \in (1, R)$ такое, что $(g * f)(\sigma) \neq 0$ $\forall f \in V$. Полагая $h = P_\sigma g$ (при этом $h \in \mathcal{A}(\overline{D})$), будем иметь $(h * f)(1) = (g * f)(\sigma) \neq 0$, если $f \in V$, и, значит, $h \in V^T$. Таким образом, $g = P_{1/\sigma} h \in P_{1/\sigma}(V^T) \subset \cup_{0<r<1} P_r(V^T)$. Докажем второе равенство. Фиксируем $g \in V^T$ и $r \in (0, 1)$. Поскольку V^T — завершенное множество, то для всех $f \in V$ имеем $(g * P_r f)(1) \neq 0$, и поэтому $g \in [P_r(V)]^T$. Теперь из включения $V^T \subset [P_r(V)]^T$ следует $P_r(V^T) \subset P_r\{[P_r(V)]^T\}$, откуда

$$V^T = \cup_{0<r<1} P_r(V^T) \subset \cup_{0<r<1} P_r\{[P_r(V)]^T\}.$$

С другой стороны, если g принадлежит правой части (10), то при некотором $r \in (0, 1)$ имеем $g \in P_r\{[P_r(V)]^T\}$, значит, $g = P_r h$, где $h \in [P_r(V)]^T$. Ясно, что $g \in \mathcal{A}_0(\overline{D})$, и $(h * P_r f)(1) = (P_r h * f)(1) \neq 0$, следовательно, $g \in V^T$. $\square$

4. Бордюрные элементы класса V

Как говорилось выше, V^{**} представляет собой наименьший по включению двойственный класс, содержащий V. Многие экстремальные задачи на различных классах аналитических функций решаются путем сведения к более простым задачам поиска экстремума на подклассах, имеющих ту же замкнутую выпуклую оболочку, что и исходный класс. Построим подкласс $U \subset V$, для которого $U^* = V^*$, рассмотрим некоторые его свойства.

Пусть $V \subset \mathcal{A}_0$ и V не совпадает с классом, состоящим из одного элемента $e \equiv 1$. Будем говорить, что $f \in V$ является бордюрным элементом класса V, если из соотношения $f = P_x g$, где $g \in V, x \in \overline{D}$, следует $|x| = 1$. Множество всех бордюрных элементов V назовем бордюром V и обозначим через $\mathrm{bor}(V)$. Если $V = \{e\}$, то по определению будем полагать $\mathrm{bor}(V) = \{e\}$.

Лемма 6. *Пусть $V \subset \mathcal{A}_0$ — компактное множество. Тогда для любой функции $f \in V$ найдутся $g \in \mathrm{bor}(V)$, $x \in \overline{D}$, такие, что $f = P_x g$. При этом для $f \not\equiv e$ элемент g определяется с точностью до преобразования P_y, где $|y| = 1$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $f \in V$. Построим числовое множество

$$R_f = \{r > 0 : \text{ существуют } g \in V, \ x \in \overline{D} \text{ такие, что } f = P_x g, \ |x| = r\}.$$

Заметим, что $1 \in R_f \neq \emptyset$. Пусть $r_0 = \inf R_f > 0$. Тогда найдется последовательность$\{r_n\}$ элементов из R_f, сходящаяся к r_0 при $n \to \infty$, следовательно, можно указать последовательности $g_n \in V$, $x_n \in \overline{D}$ такие, что $f = P_{x_n} g_n$, $|x_n| = r_n$, $n = 1, 2, \ldots$ В силу компактности множеств V и $\overline{D}$ считаем, выбирая при необходимости подпоследовательности, что $g_n \to g_0 \in V$, $x_n \to x_0 \in \overline{D}$, $n \to \infty$. Нетрудно видеть, что $r_0 = |x_0|$, и с учетом леммы 1 $P_{x_n} g_n \to P_{x_0} g_0$, $n \to \infty$, откуда $f = P_{x_0} g_0$. Предположим, что $g_0 \notin \mathrm{bor}(V)$. Тогда при некоторых $h \in V$ и $y \in D$ имеем $g_0 = P_y h$, поэтому $f = P_{x_0 y} h$, где $|x_0 y| \in R_f$, однако $|x_0 y| < |x_0| = r_0$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, g_0 — искомый элемент.

Осталось рассмотреть случай $r_0 = 0$. Рассуждая, как и выше, получим $f = P_0 g_0 = e$. Если $V \neq \{e\}$, то найдется отличная от e функция $h \in V$, представимая в виде $h = P_x g$ при некоторых $g \in \mathrm{bor}(V)$ и $x \in \overline{D}$. Но тогда $f = P_0 g$, что и требовалось. Для класса $V = \{e\}$ рассуждения тривиальны.

Докажем единственность искомой функции. Пусть при некоторых $g, h \in \mathrm{bor}(V)$ и $x, y \in \overline{D}$ имеем $f = P_x g = P_y h$, причем $f \neq e$. Очевидно, $x, y \neq 0$. Предположим, для определенности, что $|x| \leq |y|$. Так как справедливы равенства

$$f(z) = g(xz) = h(yz) = g[(x/y)yz] = (P_{x/y} g)(yz), z \in D,$$

то в круге $D_{|y|}$ функции h и $P_{x/y} g$ совпадают. По теореме единственности они совпадают и во всем круге D. Но тогда, поскольку $h \in \mathrm{bor}(V)$, то $|x/y| = 1$. Случай $|x| \geq |y|$ обосновывается аналогично. $\square$

Замечание. Из леммы 6 следует, что для любого компактного $V \subset \mathcal{A}_0$ выполняется включение $V \subset \mathrm{cm}(\mathrm{bor}(V))$, причем в случае завершенности V оно превращается в равенство.

Следствие 3. Если $V \subset \mathcal{A}_0$ компактно, то $(\mathrm{bor}(V))^* = V^*$.

Доказательство. В силу определения и только что сделанного замечания имеем $\mathrm{bor}(V) \subset V \subset \mathrm{cm}(\mathrm{bor}(V))$, поэтому $[\mathrm{cm}(\mathrm{bor}(V))]^* \subset V^* \subset (\mathrm{bor}(V))^*$. Учитывая свойство b) завершенной оболочки, заключаем, что крайние члены последнего включения совпадают. $\square$

Теорема 5. *Пусть $V \subset \mathcal{A}_0$ компактно, а V^T — завершенное множество. Тогда при любом $\lambda \in \Lambda$, $\lambda := g$, справедливы соотношения*

$$\lambda(V) = \cup_{f \in \mathrm{bor}(V)} (f * g)(\overline{D}), \tag{11}$$

$$\partial\lambda(V) \subset \cup_{f \in \mathrm{bor}(V)} (f * g)(\partial D). \tag{12}$$

Доказательство. Предположим, что $c \in \lambda(V)$, где $\lambda \in \Lambda$, $\lambda := g$. Это значит, что найдется $f \in V$ такое, что $c = \lambda(f) = (g * f)(1)$. Согласно лемме 6 функция f представима в виде $f = P_x h$, где $h \in \mathrm{bor}(V)$, $x \in \overline{D}$. Но тогда получим

$$c = (f * g)(1) = (P_x h * g)(1) = (h * g)(x) \in (h * g)(\overline{D}), \tag{13}$$

где последнее множество, очевидно, содержится в правой части равенства (11).

Обратно, пусть $c \in \cup_{f \in \mathrm{bor}(V)} (f * g)(\overline{D})$. Тогда существуют $f \in \mathrm{bor}(V) \subset V$ и $x \in \overline{D}$ такие, что

$$c = (f * g)(x) = (P_x f * g)(1) = \lambda(P_x f).$$

Поскольку $P_x f \in \mathrm{cm}(V) \subset V$, то в силу теоремы 2 $c = \lambda(P_x f)$ принадлежит $\lambda(V)$, что и требовалось.

Докажем теперь включение (12). Допустим, что $c \in \partial\lambda(V)$, тогда $c \in \lambda(V)$, поскольку $\lambda(V)$ компактно. С учетом равенства (11), найдутся $h \in \mathrm{bor}(V)$, $x \in \overline{D}$, для которых выполнены соотношения (13). При этом, если $h * g \not\equiv \mathrm{const}$ и $x \in D$, то по принципу сохранения области некоторая окрестность $O(c)$ точки c содержится в $(h * g)(D)$, и для любого $c' \in O(c)$ найдется $x' \in D$ такое, что $c' = (h * g)(x') = \lambda(P_{x'} h)$. Отсюда, как и выше, $\lambda(P_{x'} h) \in \lambda(V)$, т. е. c является внутренней точкой $\lambda(V)$, что противоречит сделанному предположению. Поэтому x должна быть граничной точкой круга D. Если $h * g = \mathrm{const}$, то получаем $c = (h * g)(1) \in (h * g)(\partial D)$.

На примере компактного класса $V = \{1 + xz : x \in \overline{D}\} \cup \{1 + yz^2 : y \in \overline{D}\}$ и функционала $\lambda(f) = a_1(f)$, $\lambda := g(z) = z$, можно убедиться, что обратное включение в (12) не выполняется. □

Теорема 6. *Для любого компактного* $V \subset \mathcal{A}_0$ *имеем*

$$\mathrm{bor}(V^*) = V^* \setminus (\mathrm{cm}(V))^T.$$

Доказательство. Из теоремы 1 и определения бордюра следует, что как $(\mathrm{cm}(V))^T$, так и $\mathrm{bor}(V^*)$ являются подмножествами V^*. Пусть $g \in (\mathrm{cm}(V))^T$. Применяя леммы 2 и 3, как при доказательстве теоремы 2, заключаем, что $h = P_\sigma g \in V^*$ при некотором $\sigma > 1$, откуда $g = P_{1/\sigma} h$, и поэтому $g \notin \mathrm{bor}(V^*)$.

Обратно, если $g \in V^* \setminus \mathrm{bor}(V^*)$, то выберем $h \in V^*$ и $x \in D$ такие, что $g = P_x h$. Тогда $g \in \mathcal{A}_0(\overline{D})$ и одновременно для всех $y \in \overline{D}$, $f \in V$ имеем

$$(g * P_y f)(1) = (P_x h * P_y f)(1) = (h * f)(xy) \neq 0, \tag{14}$$

поскольку $h \in V^*$. Но из (14) следует, что $g \in (\mathrm{cm}(V))^T$, откуда и получаем требуемое. □

Литература

1. Hallenbeck D.J., MacGregor T.H. *Linear problems and convexity technique.* – N. Y.: Pitman Publ., 1984. – 182 p.
2. Toeplitz O. *Die linearen vollkommenen Raüme der Funktionentheorie* // Comment. Math. Helv. – 1949. – V. 23. – P. 222–242.
3. Ruscheweyh St. *Duality for Hadamard products with applications to extremal problems for functions regular in the unit disc* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 210. – P. 63–74.
4. Ruscheweyh St. *Convolutions in geometric function theory.* – Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1982. – 166 p.
5. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
6. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – М.: Мир, 1971. – 359 с.

Казанский государственный университет

Поступила 21.07.1998