Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2008, №5, с. 77–82 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Т.П. ЛУКАШЕНКО

A-ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЯХ П.Л. УЛЬЯНОВА И ДРУГИХ МАТЕМАТИКОВ

Аннотация. В работе рассмотрен A-интеграл и его использование в теории тригонометрических рядов.

Ключевые слова: A-интеграл, сопряженные тригонометрические ряды, сопряженная функция, интеграл Коши, интеграл типа Коши.

УДК: 517.51

Abstract. In this paper we consider the A-integral and its application in the theory of trigonometric series.

Keywords: A-integral, conjugate trigonometric series, conjugate function, Cauchy integral, Cauchy type integral.

1. A-интеграл.

Определение 1. Функция f A-интегрируема на $[a,b]$, если f определена почти всюду и измерима на $[a,b]$ и

1) мера $\mu\{x \in E : |f(x)| > n\} = o(\frac{1}{n})$ при $n \to \infty$,
2) существует предел интегралов Лебега $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b [f(x)]_n dx$, где

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant n; \\ 0, & \text{если } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Величину предела называют *A-интегралом от функции f на $[a,b]$* и обозначают $(A)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Фактически A-интеграл был введен Е. Титчмаршем [1] в 1929 году в связи с изучением сопряженных функций (правда, без условия 1)), где он отмечал (см. [1] или [2], с. 586), что без этого условия введенный интеграл, названный им Q-интегралом, не аддитивен по функциям. Для формулировки результата Е. Титчмарша введем ряд определений.

Поступила 07.10.2007

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 08-01-00669.

Определение 2. Рядом, *сопряженным* к тригонометрическому ряду

$$\sigma = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

называют ряд

$$\overline{\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx.$$

Ряды σ и $\overline{\sigma}$ являются соответственно действительной и мнимой частью степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = a_n - ib_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $z = re^{ix}$ при $r = 1$.

Систематическое изучение сопряженных тригонометрических рядов началось с опубликованной в 1911 году работы У. Юнга [3], в которой была установлена связь сопряженного к ряду Фурье функции f ряда $\overline{\sigma}[f]$ с выражением $-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt$. Было показано, что если f — 2π-периодическая функция ограниченной вариации, то необходимым и достаточным условием сходимости сопряженного ряда $\overline{\sigma}[f]$ в точке x является существование предела $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt$, который и представляет тогда сумму ряда $\overline{\sigma}[f]$ (см. также [2], с. 521 или [4], т. 1, с. 102).

Указанный предел стали называть сопряженной функцией $\overline{f}$. Результат У. Юнга был в 2005 году обобщен на функции ограниченной гармонической вариации Е.Ю. Редкозубовой [5].

2. A-интегрируемость сопряженных функций.

Определение 3. Функцией, *сопряженной* к функции f, называется

$$\overline{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt. \tag{1}$$

В 1913 году Н.Н. Лузин показал, что сопряженная функция существует почти всюду для любой 2π-периодической функции с суммируемым квадратом ([6]; [7], с. 200–217).

В 1918 году И.И. Привалов показал, что сопряженная функция существует почти всюду для любой 2π-периодической суммируемой функции [8]. При этом им отмечалось, что имеет место суммируемость сопряженного ряда $\overline{\sigma}[f]$ методом средних арифметических или методом Абеля–Пуассона к $\overline{f}$ почти всюду.

Теорема 1 (Е. Титчмарш)**.** *Если f — 2π-периодическая суммируемая функция, то сопряженная функция $\overline{f}$ и ее произведения на функции $\cos nx$ и $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$, Q-интегрируемы на $[0, 2\pi]$ и ряд Фурье-Q сопряженной функции $\overline{f}$ равен сопряженному (к ряду Фурье f) ряду, т. е. $(Q)\sigma[\overline{f}] = \overline{\sigma}[f]$.*

Поскольку в 1925 году А.Н. Колмогоров ([9]; [10], с. 40–45 или [2], с. 573; [4], т. 1, с. 218) вывел для функции, сопряженной к суммируемой функции, оценку $\mu\{x \in [0, 2\pi] : |\overline{f}(x)| > \lambda\} \leqslant \frac{C}{\lambda}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx$, из которой следует выполнение для сопряженной (к суммируемой) функции условия 1) A-интегрируемости, то результат Е. Титчмарша допускает замену в формулировке Q-интеграла на A-интеграл.

В 1928 году, на год раньше, чем Е. Титчмарш, А.Н. Колмогоров в [11] (см. также [10], с. 93–94; [4], т. 1, с. 419) доказал аналогичный результат для другого обобщения интеграла Лебега — интеграла Бокса.

Теорема 2 (А.Н. Колмогоров). *Для любой 2π-периодической суммируемой функции f сопряженная функция $\overline{f}$ и ее произведения на функции e^{inx}, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, B-интегрируемы на $[0, 2\pi]$ и ряд Фурье-B сопряженной функции $\overline{f}$ равен сопряженному (к ряду Фурье f) ряду, т. е. $(B)\sigma[\overline{f}] = \overline{\sigma}[f]$.*

B-интеграл был впервые предложен А. Данжуа в [12] и изучался его учеником Т. Боксом в [13] (работа Т. Бокса есть также в [14], с. 545–596). Других применений ввиду сложности не нашел. В 1986 году Б.В. Панников [15] доказал, что если измеримая функция B-интегрируема на отрезке, то она также A-интегрируема и значения интегралов совпадают. Существование B-интегрируемых неизмеримых (а значит, не A-интегрируемых) функций было показано в [16].

В 1929 году В.И. Смирнов методами комплексного переменного доказал следующую теорему ([17], [18], а также [19], с. 33–46).

Теорема 3 (В.И. Смирнов). *Если f — такая 2π-периодическая суммируемая функция, что ее сопряженная функция $\overline{f}$ также суммируема, то ряд Фурье сопряженной функции равен сопряженному (к ряду Фурье f) ряду, т. е. $\sigma[\overline{f}] = \overline{\sigma}[f]$.*

Так как B-интеграл и Q-интеграл — обобщения интеграла Лебега, то теорема В.И. Смирнова следует из теорем А.Н. Колмогорова и Е. Титчмарша, которые являются более общими, так как Н.Н. Лузин показал в 1914 году, что сопряженная функция может быть несуммируемой ни на каком интервале (см. [7], с. 227, или [2], с. 557, или [4], т. 1, с. 410). Ценность приведенных теорем в том, что в ряде случаев они позволяют сводить сопряженные тригонометрические ряды к более изученным тригонометрическим рядам Фурье.

В терминах комплексного переменного результат В.И. Смирнова формулируется следующим образом.

Теорема 4 (В.И. Смирнов). *Если интеграл типа Коши*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)e^{i\phi}}{e^{i\phi} - z}\,d\phi \tag{2}$$

от суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции f имеет суммируемые угловые граничные значения на единичной окружности $\Phi(e^{i\phi})$ (равные $\frac{1}{2}(f(\phi) + i\overline{f}(\phi))$), то $\Phi(z)$ представима своим интегралом Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi(e^{i\phi})e^{i\phi}}{e^{i\phi} - z}\,d\phi.$$

А.Н. Колмогоров в 1933 году (см. гл. 6 в [20], [21]) использовал A-интеграл в связи с обобщением понятия математического ожидания. В пятидесятые годы XX века П.Л. Ульянов занялся изучением A-интеграла и его приложений, особенно к теории сопряженных функций. Он доказал (см. [22]–[24] или [2], с. 587–591) следующую теорему.

Теорема 5 (П.л. Ульянов). *Если f — 2π-периодическая суммируемая функция, а φ — такая 2π-периодическая ограниченная функция, что ее сопряженная функция $\overline{\varphi}$ также ограничена, то $\overline{f}\varphi$ A-интегрируема на $[0, 2\pi]$ и имеет место равенство*

$$(A)\int_0^{2\pi} \overline{f}(x)\varphi(x)\,dx = -(L)\int_0^{2\pi} f(x)\overline{\varphi}(x)\,dx, \tag{3}$$

называемое равенством Рисса.

Если в качестве φ брать функции 1, $\sin nx$ и $\cos nx$, $n = 1, 2, \dots$, то получится утверждение теоремы Е. Титчмарша.

П.Л. Ульянов также показал ([25], [26]), что интеграл типа Коши (2) от суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции f представляется A-интегралом Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}(A)\int_0^{2\pi} \frac{\Phi(e^{i\phi})e^{i\phi}}{e^{i\phi} - z} d\phi.$$

Он также показал, что 2π-периодическую суммируемую функцию f можно восстановить по сопряженной функции $\overline{f}$ с помощью A-интеграла по формуле, аналогичной формуле (1), с заменой интеграла Лебега на A-интеграл и обычного предела на асимптотический.

3. Другие применения A-интеграла. П.Л. Ульянов в [27], [28] указал еще один класс A-интегрируемых функций на $[0, 2\pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

где $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < +\infty$.

Указанные тригонометрические суммы остаются A-интегрируемыми при умножении на такую 2π-периодическую функцию φ, что φ и сопряженная функция $\overline{\varphi}$ суть функции ограниченной вариации, при том имеет место аналог формулы Рисса (3), а коэффициенты a_n — коэффициенты Фурье-A (в смысле A-интеграла) указанных тригонометрических сумм.

В работах [22], [23] П.Л. Ульянов показал, что в формуле сопряженной функции (1) в случае $f \in L^p[0, 2\pi]$, $p > 1$, можно заменить несобственный интеграл Лебега A-интегралом. Им был поставлен вопрос, можно ли это сделать для любой 2π-периодической суммируемой функции? Вопрос был повторен в 1980 году в работе [29]. Ответ был дан в 1982 году в [30]. Существует такая 2π-периодическая суммируемая функция g, что для почти всех x интеграл

$$-\frac{1}{\pi}(A)\int_0^{\pi} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} dt$$

не существует.

П.Л. Ульянов [26] нашел достаточное условие замены переменной в A-интеграле.

Теорема 6 (П.Л. Ульянов)**.** *Если функция f A-интегрируема на $[a, b]$, φ — строго монотонная дифференцируемая в каждой точке функция, отображающая $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$, производная которой удовлетворяет условию $0 < m \leqslant |\varphi'(t)| \leqslant M < \infty$, то*

$$(A)\int_a^b f(x)\, dx = (A)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Этот результат был усилен И.Л. Бонди в [31], [32], которая ослабила условия на дифференцируемость φ.

В [23] П.Л. Ульянов отметил, что из существования A-интеграла на отрезке $[a, b]$ не следует его существования на подотрезке $[a', b'] \subset [a, b]$. В [33] был построен пример A-интегрируемой на отрезке функции, которая не является A-интегрируемой на любом подотрезке $[a', b'] \subset [a, b]$, $[a', b'] \neq [a, b]$. Но даже если интеграл существует для почти всех подотрезков (как для сопряженной функции), то, как показали И.А. Виноградова и О.Д. Церетели (см. [34]–[38]), нет никакой дифференциальной связи между A-интегралом и подинтегральной функцией. Имеется ряд других патологических свойств у A-интеграла, он противоречит даже несобственному интегралу Лебега (см. обзор в [39], § 3). Различные сужения A-интеграла с более хорошими свойствами рассматривал ряд математиков — О.Д. Церетели, И.Л. Бонди, И.А. Виноградова, Ф.С. Вахер (см. [39], § 3). Отдельно отметим вышедшие позднее и не упомянутые в указанном обзоре работы И.А. Виноградовой [40]–[42] по сужениям A-интеграла.

С работ П.Л. Ульянова, посвященных A-интегралу и его использованию в теории тригонометрических рядов, началось систематическое изучение и применение этого интеграла в теории функций. В данной работе не рассмотрены применения этого интеграла в теории рядов по системам Хаара и Уолша, рядов по мультипликативным системам Виленкина и в других разделах математики. A-интеграл занял особое место в теории обобщенных интегралов и навсегда связан с именами математиков, первыми использовавших его — Е. Титчмарша, А.Н. Колмогорова и П.Л. Ульянова.

Литература

[1] Titchmarsh E.C. *On conjugate functions* // Proc. London Math. Soc. – 1929. – V. 29. – P. 49–80.

[2] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 935 с.

[3] Young W.H. *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe* // Münchener Sitzungsberichte. – 1911. – V. 41. – S. 261–371.

[4] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. – М.: Мир, 1965. – 615 с.

[5] Редкозубова Е.Ю. *О сходимости сопряженного тригонометрического ряда Фурье функции ограниченной вариации* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. – 2005. – № 4. – С. 48–52.

[6] Лузин Н.Н. *Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier* // Compt. Rend. Acad. Sci., Paris. – 1913. – V. 156. – P. 1655–1658.

[7] Лузин Н.Н. *Интеграл и тригонометрический ряд.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 551 с.

[8] Привалов И.И. *Интеграл Cauchy.* – Саратов: Изв. ун-та, физ.-матем. фак. – 1918. – Вып. 1. – С. 1–94.

[9] Колмогоров А.Н. *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier* // Fund. Math. – 1925. – V. 7. – P. 23–28.

[10] Колмогоров А.Н. *Математика и механика. Избранные труды.* – М.: Наука, 1985. – 469 с.

[11] Колмогоров А.Н. *Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy* // Fund. Math. – 1928. – V. 11. – P. 27–28.

[12] Denjoy A. *Sur l'intégration riemannienne* // Compt. Rend. Acad. Sci., Paris. – 1919. – V. 169. – P. 219–221.

[13] Boks T.J. *Sur les rapports entre les méthodes d'intégration de Riemann et de Lebesgue* // Rend. Circolo Mat. Palermo. – 1921. – V. 45.

[14] Denjoy A. *Articles et mémoires.* II. *Le champ réel* – Notices. Paris: Gauthier-Villars, 1955.

[15] Панников Б.В. *О взаимоотношении A- и B-интегралов* // Матем. сб. – 1986. – Т. 129. – № 3. – С. 407–421.

[16] Лукашенко Т.П. *Интегрируемые по Боксу неизмеримые функции* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 49–56.

[17] Смирнов В.И. *Sur les valeurs limites des fonctions analytiques* // Compt. Rend. Acad. Sci., Paris. – 1929. – V. 188. – P. 131–133.

[18] Смирнов В.И. *Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle* // Журн. Ленингр. физ.-матем. об-ва. – 1929. – Т. 2. – № 2. – С. 22–37.

[19] Смирнов В.И. *Избранные труды. Комплексный анализ. Математическая теория дифракции.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 277 с.

[20] Колмогоров А.Н. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* – Berlin: Springer-Verlag, 1933. – 62 S.

[21] Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей.* – М.–Л.: ОНТИ, 1936. – 80 с.

[22] Ульянов П.Л. *Некоторые вопросы A-интегрирования* // ДАН СССР. – 1955. – Т. 102. – № 6. – С. 1077–1080.

[23] Ульянов П.Л. *A-интеграл и его применение к теории тригонометрических рядов* // УМН. – 1955. – Т. 10. – № 1. – С. 189–191.

[24] Ульянов П.Л. *A-интеграл и сопряженные функции* // Учен. зап. МГУ. – 1956. – Вып. 181. – Т. VIII. – С. 139–157.

[25] Ульянов П.Л. *Об A-интеграле Коши* I // УМН. – 1956. – Т. 11. – № 5. – С. 223–229.

[26] Ульянов П.Л. *Об интегралах типа Коши* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 60. – С. 262–281.

[27] Ульянов П.Л. *О тригонометрических рядах с монотонно убывающими коэффициентами* // ДАН СССР. – 1953. – Т. 90. – № 1. – С. 33–36.

[28] Ульянов П.Л. *Применение A-интегрирования к одному классу тригонометрических рядов* // Матем. сб. – 1954. – Т. 35. – Вып. 3. – С. 469–490.
[29] Долженко Е.П., Ульянов П.Л. *О некоторых вопросах теории функций* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. – 1980. – № 1. – С. 3–13.
[30] Лукашенко Т.П. *On the A-integral representation of the Hilbert transform and conjugate function* // Anal. Math. – 1982. – V. 8. – № 4. – P. 263–275.
[31] Бонди И.Л. *Замена переменной в A-интеграле* // Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В.И. Ленина. – 1962. – № 188. – С. 3–21.
[32] Бонди И.Л. *О почти всюду A-интегрируемых функциях* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145. – № 3. – С. 491–494.
[33] Лукашенко Т.П. *Об A-интегрируемости функций* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. – 1982. – № 6. – С. 59–63.
[34] Виноградова И.А. *О неопределенном A-интеграле* // ДАН СССР. – 1960. – Т. 135. – № 1. – С. 9–11.
[35] Виноградова И.А. *О неопределенном A-интеграле* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1961. – Т. 25. – № 1. – С. 113–142.
[36] Виноградова И.А. *О представлении измеримой функции неопределенным A-интегралом* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – №4. – С. 581–604.
[37] Церетели О.Д. *О неопределенном A-интеграле и о рядах Фурье* (*A*) // Сообщ. АН ГрузССР. – 1962. – Т. 29. – № 2. – С. 129–134.
[38] Церетели О.Д. *О неопределенном A-интеграле и о рядах Фурье* (*A*) // Studia Math. – 1962. – V. 22. – № 1. – P. 59–83.
[39] Виноградова И.А., Скворцов В.А. *Обобщенные интегралы и ряды Фурье* // Матем. анализ–1970. – Итоги науки. М.: ВИНИТИ, 1971. – С. 65–107.
[40] Виноградова И.А. *О некотором сужении A-интеграла* // Матем. сб. – 1967. – Т. 72. – № 3. – С. 365–387.
[41] Виноградова И.А. *Обобщенный интеграл и сопряженные функции* // Матем. сб. – 1976. – Т. 99. – № 1. – С. 84–120.
[42] Виноградова И.А. *Об LG^*-интеграле типа Коши* // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20. – № 5. – С. 645–653.

Т.П. Лукашенко

профессор, кафедра математического анализа,
механико-математический факультет,
Московский государственный университет,
119991, ГСП-1, г. Москва, Воробьевы горы, Главное здание,

e-mail: lukashenko@mail.ru

T.P. Lukashenko

Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Faculty of Mathematics and Mechanics, Moscow State University,
Main Building, GSP-1 Vorob'yovy Gory, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: lukashenko@mail.ru