ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.968

Д.Л. ФЕДОРОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРРОНА–СТИЛТЬЕСА ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ

В данной работе продолжается изучение интегральных уравнений

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)dx(s) + f(t), \quad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$x(t) = \lambda \int_a^t Q(t,s)dx(s) + f(t), \quad t \in [a,b], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

с трактовкой интеграла в смысле Перрона–Стилтьеса, начатое в [1]. К таким уравнениям сводятся, например, краевая задача и задача Коши для сингулярных систем линейных дифференциальных уравнений, рассматриваемых, например, в [2], а также для систем линейных дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах.

На ядра $K(t,s)$ и $Q(t,s)$ уравнений вида (1) и (2) в [3] накладываются обременительные ограничения: требуется ограниченность вариации по совокупности переменных, тогда как в указанных приложениях это условие может не выполняться. Наши ограничения (см. ниже) значительно слабее.

Как в [1], будем называть уравнение (1) уравнением Перрона–Стилтьеса–Фредгольма (PSF-уравнением), а уравнение (2) — уравнением Перрона–Стилтьеса–Вольтерра (PSV-уравнением).

Через $BV_n[a,b]$ обозначим множество комплекснозначных n-вектор-функций $x(\cdot)$, определенных на $[a,b]$, таких, что

$$\bigvee_a^b(x) \doteq \sup \sum_{i=1}^n \|x(t_i) - x(t_{i-1})\| < +\infty, \tag{3}$$

где точная верхняя грань берется по всем разбиениям $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ отрезка $[a,b]$, а $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{C}^n$. Обозначим также

$$MBV_n[a,b] \doteq \Big\{A : [a,b] \to M_n(\mathbb{C}),\ \bigvee_a^b(A) \doteq \sup \sum_{i=1}^n \|A(t_i) - A(t_{i-1})\|_{M_n} < +\infty\Big\},$$

где $\|\cdot\|_{M_n}$ — норма в пространстве $M_n(\mathbb{C})$ комплексных $n \times n$-матриц, согласованная с нормой в (3).

Предполагается, что в уравнении (1) $n \times n$-матрица $K(t,s)$ по каждой переменной имеет равномерно ограниченную вариацию, т. е. существуют константы Ω и Θ такие, что

$$\bigvee_a^b(K(\cdot,s)) \le \Omega, \quad \bigvee_a^b(K(t,\cdot)) \le \Theta, \quad t,s \in [a,b], \tag{4}$$

а $f \in BV_n[a,b]$. Решение уравнения (1) будем искать тоже в $BV_n[a,b]$. Резольвентой ядра $K(t,s)$ назовем матрицу $R(t,s,\lambda)$ тех же размеров, определенную на множестве $[a,b] \times [a,b] \times \Lambda$, которая при любом $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям (4) и для любой правой части $f(t)$ функция

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s,\lambda) df(s) \tag{5}$$

является решением уравнения (1). В [1] показано, что если резольвента существует, то она определяется единственным образом, а решение (5) единственно. (Единственность резольвенты понимается в том смысле, что если $R_1(t,s,\lambda)$ определена при $\lambda \in \Lambda_1$, а $R_2(t,s,\lambda)$ — при $\lambda \in \Lambda_2$, то для любого $\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ $R_1(t,s,\lambda) \equiv R_2(t,s,\lambda)$.)

Теорема 1. *Пусть последовательность матриц $c_0, c_1, c_2, \dots$ такая, что*

1) *для любого $L > 0$ ряд $D(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ сходится абсолютно и равномерно в области $|\lambda| \le L$;*
2) *ряд $D(t,s,\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n(t,s)\lambda^n$, где коэффициенты $B_n(t,s)$ связаны рекуррентным соотношением*

$$B_0(t,s) = K(t,s), \quad B_n(t,s) = K(t,s)c_n + \int_a^b K(t,\tau) dB_{n-1}(\tau,s), \quad n = 1,2,\dots,$$

сходится так, что

$$\lim_{N\to\infty} \bigvee_a^b \left(D(\cdot,s,\lambda) - \sum_{n=0}^{N} B_n(\cdot,s)\lambda^n \right) = 0, \quad s \in [a,b],$$
$$\lim_{N\to\infty} \bigvee_a^b \left(D(t,\cdot,\lambda) - \sum_{n=0}^{N} B_n(t,\cdot)\lambda^n \right) = 0, \quad t \in [a,b],$$

причем сходимость в обоих предельных равенствах равномерная (относительно s в первом равенстве и относительно t во втором).

Тогда выражение $D(t,s,\lambda)D^{-1}(\lambda)$ совпадает с резольвентой ядра $K(t,s)$.

Следствие. Если $\det D(\lambda) = 0$, то любая функция вида

$$x(t) = \int_a^b D(t,s,\lambda)N(\lambda)dy(s), \quad t \in [a,b],$$

где $N(\lambda)$ — произвольная матрица из M_n такая, что $D(\lambda)N(\lambda) = 0$, а $y(\cdot)$ — произвольная функция из $BV_n[a,b]$, является решением соответствующего однородного уравнения

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)dx(s).$$

Пример 1. Пусть $n = 1$, $K(t,s) = \begin{cases} 1, & t \ge s; \\ 0, & t < s, \end{cases}$ $[a,b] = [0,1]$. Возьмем $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_n = 0$ при $n \ge 2$. Тогда $D(\lambda) = 1 - \lambda$,

$$B_1(t,s) = -K(t,s) + \int_0^1 K(t,\tau)dK(\tau,s) = -K(t,s) + \big(K(t,s) - K(0,s)\big) = -K(0,s),$$
$$B_2(t,s) = 0 \cdot K(t,s) - \int_0^1 K(t,\tau)dK(0,s) = 0, \quad B_n(t,s) \equiv 0, \quad n \ge 3.$$

Значит, $D(t,s,\lambda) = K(t,s) - K(0,s)\lambda = \begin{cases} 1, & t \ge s > 0; \\ 0, & t < s; \\ 1-\lambda, & t \ge s = 0. \end{cases}$ Отсюда $R(t,s,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}, & t \ge s > 0; \\ 0, & t < s; \\ 1, & t \ge s = 0, \end{cases}$

$\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

При $\lambda = 1$ однородное уравнение имеет решения

$$x_0(t) \equiv 0, \quad x_s(t) = \begin{cases} 1, & t \geq s; \\ 0, & t < s, \end{cases} \quad \text{при} \quad s > 0.$$

Замечание. В этом примере ядро $K(t,s)$ имеет бесконечную вариацию по совокупности переменных.

Далее рассмотрим интегральное PSV-уравнение (2) при тех же предположениях (4) относительно ядра $Q(t,s)$. Тогда утверждения о резольвенте $R(t,s,\lambda)$ справедливы и в этом случае, а ее представление, аналогичное теореме 1, дает

Теорема 2. *Пусть последовательность функций*

$$d_0(s), d_1(s), \ldots, d_n(s), \ldots \in MBV_n[a,b]$$

такова, что

1) *для любого $s \in [a,b]$ ряд $E(s,\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(s)\lambda^n$ имеет радиус сходимости $\rho(s) \geq r > 0$;*
2) *ряд $E(t,s,\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(t,s)\lambda^n$, где коэффициенты $C_n(t,s)$ связаны рекуррентным соотношением*

$$C_n(t,s) = Q(t,s)\big(d_n(s) + C_{n-1}(s,s)\big) + \int_s^t Q(t,\tau)dC_{n-1}(\tau,s), \quad n = 1,2,\ldots; \quad s \leq t,$$
$$C_0(t,s) = Q(t,s),$$

сходится так, что

$$\lim_{N\to\infty} \bigvee_a^b \left(E(\cdot,s,\lambda) - \sum_{n=0}^{N} C_n(\cdot,s)\lambda^n\right) = 0, \quad s \in [a,b],$$
$$\lim_{N\to\infty} \bigvee_a^b \left(E(t,\cdot,\lambda) - \sum_{n=0}^{N} C_n(t,\cdot)\lambda^n\right) = 0, \quad t \in [a,b],$$

причем сходимость в обоих предельных равенствах равномерная (относительно s в первом равенстве и относительно t во втором) в любом круге $|\lambda| \leq L < r$.

Тогда резольвента ядра $Q(t,s)$ существует и может быть представлена в виде

$$R(t,s,\lambda) = E(t,s,\lambda)E^{-1}(s,\lambda).$$

Далее рассмотрим важный для приложений случай мультипликативного ядра PSV-уравнения

$$Q(t,s) = \alpha(t)\beta(s), \quad \alpha,\beta \in MBV_n[a,b]. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть ряд $H(t,\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(t)\lambda^n$, где*

$$h_0(t) \equiv E, \quad h_n(t) = \int_c^t \beta(s)d\big(\alpha(s)h_{n-1}(s)\big), \quad n = 1,2,\ldots, \quad a \leq c \leq b, \tag{7}$$

сходится так, что при $|\lambda| < r \leq +\infty$

$$\lim_{N\to\infty} \bigvee_a^b \left(H(\cdot,\lambda) - \sum_{n=0}^{N} h_n(\cdot)\lambda^n\right) = 0.$$

Тогда резольвента ядра (6), определенная при

$$\lambda \in \big\{\lambda : |\lambda| < r,\ |\det H(t,\lambda)| \geq \sigma > 0,\ |\det(E - \lambda\alpha(t)\beta(t))| \geq \delta > 0\ \forall t \in [a,b]\big\},$$

существует и имеет вид

$$R(t,s,\lambda)=\alpha(t)H(t,\lambda)H^{-1}(s,\lambda)\beta(s)(E-\lambda\alpha(s)\beta(s))^{-1}. \tag{8}$$

Пример 2. $Q(t,s)=ts$, $0\le s\le t\le 1$. По формулам (7) получаем

$$h_1(t)=\int_0^t s\,ds=\frac{t^2}{2},\quad h_2(t)=\int_0^t sd\frac{s^3}{2}=\frac{3}{8}t^4,$$
$$h_3(t)=\int_0^t sd\Big(\frac{3}{8}s^5\Big)=\frac{15}{48}t^6,\ \ldots,\ h_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}.$$

Отсюда находим

$$H(t,\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\lambda^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(\lambda t^2)^n=(1-\lambda t^2)^{-1/2}.$$

Этот ряд сходится при $|\lambda|<1$. Подставляя найденные выражения в (8), получим

$$R(t,s,\lambda)=\frac{t}{\sqrt{1-\lambda t^2}}\frac{s}{\sqrt{1-\lambda s^2}},\quad \lambda<1.$$

Таким образом, резольвента PSV-уравнения с ядром (6) определяется функцией $H(t,\lambda)$. Далее предлагается еще один способ построения этой функции, основанный на втором резольвентном тождестве [1]

$$R(t,s,\lambda)=\lambda\int_s^t R(t,\tau,\lambda)dQ(\tau,s)+\lambda R(t,s,\lambda)Q(s,s)+Q(t,s).$$

Теорема 4. *Пусть* $(E-\lambda\alpha(t)\beta(t))^{-1}\in MBV_n[a,b]$, *а ряд*

$$U(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t,\lambda),\quad u_0(t,\lambda)\equiv E,\quad |\lambda|<r\le+\infty, \tag{9}$$

$$u_k(t,\lambda)=-\lambda\int_c^t u_{k-1}(\tau,\lambda)\beta(\tau)(E-\lambda\alpha(\tau)\beta(\tau))^{-1}d\alpha(\tau),\quad k=1,2,\ldots, \tag{10}$$

где c — некоторая точка из $[a,b]$, сходится равномерно относительно $t\in[a,b]$. Тогда функция $H(t,\lambda)$, определяющая резольвенту PSV-уравнения с ядром (6), *может быть вычислена по формуле*

$$H(t,\lambda)=U^{-1}(t,\lambda).$$

В заключение отметим, что формулы (9), (10) позволяют строить резольвенту при более общих условиях, чем те, которые формулируются в теореме 4. Например, можно допустить, что матрица $E-\lambda\alpha(s)\beta(s)$ вырождается в одной точке, а матрицы $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ прямоугольные. Однако построенная таким образом функция $R(t,s)$ в полном смысле слова резольвентой не является, потому что может не иметь ограниченной вариации по какой-либо из переменных. Тем не менее, функция $R(t,s)$ все же имеет смысл, например, если функция $x(t)=f(t)+\int_a^t R(t,s)df(s)$ определена, т. е. интеграл в правой части существует, то $x(\cdot)$ является решением неоднородного уравнения с правой частью $f(\cdot)$.

Литература

1. Федоров Д.Л. *К общей теории интегральных уравнений в пространстве функций ограниченной вариации* // Изв. ин-та матем. и информатики. – Ижевск, 1997. – № 3. – С. 30–50.
2. Бояринцев Ю.Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
3. Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O. *Differential and integral equations*: *Boundary value problems and adjoints.* – Prague: Academia, 1979. – 246 p.

Удмуртский государственный университет

Поступила 24.05.1999