МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра высшей математики и математического моделирования

Направление: 050201.65 – математика и информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Перечисление путей на целочисленных решетках

Работа завершена:

"___"_____ 2014 г. _____ (И.З. Валеев)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук, доцент

"___"_____ 2014 г. _____ (М.И. Киндер)

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук, профессор

"___"_____ 2014 г. _____ (Ю.Г. Игнатьев)

Казань-2014

Оглавление

Введение **3**

Глава 1. Формальные степенные ряды и производящие функции. Действия над формальными степенными рядами. Элементарные производящие функции **4**

§1. Производящие функция и действия над ними 4

§2. Элементарные производящие функции 7

§3. Задача о счастливых билетах. 9

Глава 2. Производящие функции для известных последовательностей **11**

§4. Числа Каталана 11

§5. Пути Дика 16

§6. Числа Моцкина 17

§7. Числа Шрёдера 19

§8. Производящие функции нескольких переменных 20

§8.1 Треугольник Паскаля 20

§8.2. Треугольник Дика 22

§9. Числа Деланноя 24

Глава 3. Практическая часть **33**

Заключение **50**

Список литературы **51**

Введение

Цель выпускной квалификационной работы состоит в изучении свойств производящих функций и применении их в комбинаторных задачах перечисления некоторых объектов, в частности, в задачах подсчёта чисел Деланноя и других путей на целочисленных решетках.

Общепризнано, что метод производящих функций является наиболее эффективным средством решения перечислительных комбинаторных задач. В таких задачах речь идет о нахождении числа тех или иных конфигураций из элементов некоторого конечного множества.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы.

Глава 1. Формальные степенные ряды и производящие функции. Действия над формальными степенными рядами. Элементарные производящие функции

§1. Производящие функция и действия над ними

Определение 1.1. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная (бесконечная) последовательность чисел. *Производящей функцией* (производящим рядом) для этой последовательности будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots,$$

или, в сокращенной записи

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n .$$

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является *производящим многочленом*.

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных и целых чисел. Производящую функцию, как и обычную функцию, часто обозначают одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$$

Замечание 1.2. Термин «производящая функция» не означает, что написанное выражение действительно является функцией. В частности, невозможно сказать, чему равно значение $A(s_0)$ производящей функции A в точке s_0. Переменная s является формальной, и сумма ряда $a_0 + a_1 s_0 + a_2 s_0^2 + \ldots$ смысла не имеет. Однако верно утверждение $A(0) = a_0$, т.е. мы знаем значение производящей функции в нуле.

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» используют также термин «формальный степенной ряд».

Определение 1.3. *Суммой* двух производящих функций

$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ и $B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots$

называется производящая функция

$A(s) + B(s) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)s^2 + \ldots$.

Произведением производящих функций A и B называется производящая функция вида:

$$A(s)B(s) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)s^2 + \ldots$$

Операции сложения и умножения производящих функций обладают свойством коммутативности и ассоциативности.

Определение 1.4. Пусть

$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ и $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots$

— две производящие функции, причем $B(0) = b_0 = 0$.

Подстановкой производящей функции B в производящую функцию A называется производящая функция

$$A\big(B(t)\big) = a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2)t^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3)t^3 + \ldots$$

Если, например, $B(t) = -t$, то

$$A(B(t)) = A(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t_2 - a_3 t_3 + \ldots$$

Операция подстановки функции, отличной от нуля, не определена в нуле. При попытке подставить такую функцию мы столкнулись бы с необходимостью суммировать бесконечные числовые ряды.

Если обе производящие функции A и B являются многочленами, то определения суммы, произведения и подстановки для них совпадают с обычными определениями этих операций для многочленов.

Теорема 1.5 (об обратной функции). Пусть функция

$$B(t) = b_1 t + b_2 t_2 + b_3 t_3 + \ldots$$

такова, что $B(0) = b_0 = 0$, а $b_1 \neq 0$. Тогда существуют такие функции

$$A(s) = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots, \quad A(0) = 0,$$

и

$C(u) = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \ldots, \quad C(0) = 0$, что

$A(B(t)) = t$ и $B(C(u)) = u$.

Функции A и C единственны. Функция A называется *левой обратной*, а функция C — правой обратной к функции B.

Доказательство. Докажем существование и единственность левой обратной функции. Доказательство для правой обратной аналогично. Будем определять коэффициенты функции A последовательно.

Коэффициент a_1 определяется из условия $a_1 b_1 = 1$, откуда $a_1 = \frac{1}{b_1}$.

Предположим теперь, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уже определены. Коэффициент a_{n+1} определяется из условия $a_{n+1} b_1^{n+1} + \ldots = 0$, где точками обозначен некоторый многочлен от $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$.

Тем самым, условие представляет собой линейное уравнение на a_{n+1}, причем коэффициент b_1^{n+1} при a_{n+1} отличен от нуля. Такое уравнение имеет единственное решение, и теорема доказана.

Таким образом, мы определили операции сложения и умножения степенных рядов, а также операцию подстановки их друг в друга. Операция деления рядов не всегда корректно определена.

В этом смысле степенные ряды похожи на целые числа: не всегда целое число при делении на другое целое число дает в ответе целое число. Однако, во всяком случае, возможно деление на степенной ряд, значение которого в нуле отлично от нуля.

Предложение 1.6. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots$ — формальный степенной ряд, причем $A(0) \neq 0$. Тогда существует единственный формальный степенной ряд $B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots$ такой, что $A(s)B(s) = 1$.

Доказательство. Снова проведем доказательство по индукции.

$$b_0 = \frac{1}{a_0}.$$

Пусть теперь все коэффициенты ряда B вплоть до степени $n-1$ однозначно определены. Коэффициент при s_n определяется из условия

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0.$$

Это линейное уравнение на b_n, причем коэффициент a_0 при b_n отличен от нуля. Поэтому уравнение имеет единственное решение.

§2. Элементарные производящие функции

Каждый раз записывать производящие функции в виде ряда неудобно. Поэтому для некоторых часто встречающихся функций используется сокращенная запись.

Определение 1.7

1) $(1+s)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}s^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}s^3 + \ldots$,

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ и α — произвольное комплексное число.

Коэффициент при s^n в этой производящей функции называется числом сочетаний из α элементов по n и обозначается через

$$C_{\alpha}^{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!};$$

2) $e^s = \exp s = 1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{3!}s^3 + \cdots;$

3) $\ln\left(\frac{1}{1-s}\right) = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \cdots;$

4) $\sin s = s - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{5!}s^5 - \cdots;$

5) $\cos s = 1 - \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \cdots.$

Разложение 1) в определении 1.7 было введено Ньютоном и называется биномом Ньютона. При целом положительном значении α оно совпадает с обычным определением степени бинома. Пользуясь этим, мы можем получить простейшие комбинаторные тождества. Подставляя, например, значения $s = 1$ и $s = -1$, получаем

$$C_{\alpha}^{0} + C_{\alpha}^{1} + \cdots + C_{\alpha}^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \cdots + \frac{\alpha}{\alpha!} = 2^{\alpha}, \qquad (1.1)$$

$$C_\alpha^0 - C_\alpha^1 + \cdots + (-1)^\alpha C_\alpha^\alpha = 0 \qquad (1.2)$$

для любого целого положительного α.

Кроме того, между введенными элементарными функциями имеются естественные соотношения, которые также связаны комбинаторными тождествами. Докажем, например, что

$$e^s e^{-s} = 1.$$

Действительно, свободный член произведения равен 1, а при $n > 0$ коэффициент при s_n в произведении равен

$$\frac{1}{n!\,0!} - \frac{1}{(n-1)!\,1!} + \frac{1}{(n-2)!\,2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{0!\,n!}.$$

Умножая последнее выражение на $n!$, получаем левую часть равенства (1.2) при $\alpha = n$, что и доказывает наше утверждение.

Производящие функции дают возможность просто описывать многие сложные последовательности в комбинаторике, а иногда помогают найти для них явные формулы. Метод производящих функций был разработан Эйлером в 1750-х годах.

§3. Задача о счастливых билетах

Классическим примером использования производящих функций является задача о счастливых билетах.

Троллейбусный (трамвайный) билет имеет номер, состоящий из шести цифр. Билет считается *счастливым*, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр.

Например, билеты с номерами 000000 и 123060 — счастливые, а билет с номером 123456 — несчастливый. Счастливый билет полагалось на счастье съесть. Итак, сколько всего существует счастливых билетов?

Несложно составить программу для подсчета числа счастливых билетов. Простейшая такая программа перебирает все номера от 000000 до 999999, отбирая среди них счастливые.

Однако задачу можно решить исходя из других соображений.

Разобьем все счастливые билеты на классы, в каждом из которых сумма первых трех цифр одинакова. Эта сумма может принимать значения от 0 (для тройки цифр 000) до 27 (для тройки 999). Поэтому число классов равно 28. Обозначим через a_n число различных троек цифр с суммой цифр n. Первые несколько значений a_n нетрудно вычислить:

a_0 = 1 (есть всего одна тройка цифр 000 с суммой 0);

a_1 = 3 (есть три тройки 001, 010, 001 с суммой цифр 1);

a_2 = 6 (тройки 002, 020, 200, 011, 101, 110).

Легко видеть, что число счастливых билетов, у которых сумма первых трех цифр равна n, есть a_n^2. Действительно, как в начале, так и в конце номера счастливого билета можно поставить любую тройку цифр с суммой n. Таким образом, для подсчета числа счастливых билетов нам достаточно вычислить числа a_n, а затем найти сумму квадратов этих 28 чисел.

Для вычисления a_n попробуем подсчитать сначала число одно- и двузначных чисел с суммой цифр n. Для каждого n от 0 до 9 существует ровно одно однозначное число с суммой цифр n (запись этого числа совпадает с записью числа n). Будем описывать однозначные числа многочленом:

$$G(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9.$$

Смысл у этой функции следующий: коэффициент при z^n в функции $G(z)$ равен числу однозначных чисел, сумма цифр которых равна n.

Другими словами, коэффициент при z^n в функции $G(z)$ равен 1, если $0 \le n \le 9$, и равен 0, если $n > 9$.

Выпишем теперь функцию, описывающую двузначные числа. Заметим, что если возвести функцию $G(z)$ в квадрат, то коэффициент при z^n будет равен числу способов получить сумму n с помощью двух цифр от 0 до 9:

$$G^2(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 6z^5 + 7z^6 + 8z^7 + 9z^8 + 10z^9 +$$
$$+9z^{10} + 8z^{11} + 7z^{12} + 6z^{13} + 5z^{14} + 4z^{15} + 3z^{16} + 2z^{17} + z^{18}.$$

Коэффициент при z^n у функции $G^2(z)$ равен числу двузначных чисел с суммой цифр n. (Мы рассматриваем и такие двузначные числа, в которых первая цифра или даже обе цифры могут равняться нулю.)

В общем случае, $G^n(z)$ — это производящая функция для количества k-значных чисел с суммой цифр, равной n, поскольку коэффициент при z^n получается перебором всех возможных комбинаций из k цифр от 0 до 9, равных в сумме n. Перепишем производящую функцию в ином виде:

$$G(z) = 1 + z + \cdots + z^9 = \frac{1 - z^{10}}{1 - z}.$$

В итоге, нам требуется отыскать

$$[z^{27}]G^6(z).$$

Для этого посмотрим, что получится, если раскрывать скобки в следующем выражении (нас интересует только коэффициенты при z^{27}):

$$G^6(z) = (1 - z^{10})^6(z - 1)^{-6} = \sum_{n=0}^{\infty} C_6^k(-z^{10})^n \sum_{n=0}^{\infty} C_{-6}^k(-z)^n =$$
$$= \cdots + (-C_6^0 C_6^{27} + C_6^1 C_6^{17} - C_6^2 C_6^7)z^{27} + \cdots.$$

Таким образом, количество счастливых билетов из шести цифр равно 55252:

$$-C_6^0 C_6^{27} + C_6^1 C_6^{17} - C_6^2 C_6^7 = 55252.$$

Глава 2. Производящие функции для известных последовательностей

§4. Числа Каталана

Порядок вычислений в арифметических выражениях задается расстановкой скобок, например,

$(3 - 1) \cdot (4 + (15 - 9) \cdot (2 + 6))$.

Если стереть все элементы выражения за исключением скобок, то оставшиеся скобки образуют правильную скобочную структуру :

$$()(()()).$$

Вот все правильные скобочные структуры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

()

()() (())

()()() ()(()) (())() (()()) ((()))

Рис. 1

Определение 2.1. *Числом Каталана* c_n называется число различных правильных скобочных структур из n пар скобок.

Удобно полагать $c_0 = 1$. Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, . . .

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;

2) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям 1) и 2), является правильной скобочной структурой.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Сколько существует правильных скобочных последовательностей, состоящих из $2n$ скобок (n открывающих и n закрывающих)? Например, если $n=3$, то таких последовательностей всего 5:

$$()()(),(())(),()(()),(()()),((())).$$

Пусть C_n — ответ к нашей задаче. Положим по определению $C_0=1$. Очевидно, что любая правильная скобочная последовательность начинается с открывающей скобки. Между ней и соответствующей ей закрывающей скобкой можно расположить правильную последовательность из $2k$ скобок (где $0 \le k < n$):

$$\overbrace{(\underbrace{(\ldots)}_{2k})\underbrace{(\ldots)}_{2(n-k-1)}}^{2n}.$$

Таким образом, чтобы узнать количество правильных скобочных последовательностей из $2n$ скобок, нужно перебрать все возможные способы расположить $2k$ скобок в зоне между красными скобками (рис.) и $2(n-k-1)$ скобок после неё. Получаем *рекуррентное соотношение*:

$$C_0 = 1,$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad n > 0.$$

Например, при $n = 5$

$$c_5 = c_0c_4 + c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1 + c_4c_0 =$$

$$= 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42.$$

Это соотношение нужно решить и вывести общую формулу. Будем искать производящую функцию в виде

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n.$$

В рекуррентном соотношении домножаем C_n на z^n:

$$z^0 C_0 = z^0,$$

$$z^n C_n = z^n \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad n > 0.$$

Выполняя суммирования по всем n, получаем

$$G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \ .$$

Сумма в этом выражении есть произведение производящих функций:

$$G(z)G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Значит, окончательное уравнение для производящей функции имеет вид

$$G(z) = 1 + zG^2(z),$$

или, что то же самое,

$$zG^2(z) - G(z) + 1 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения легко найти *производящую функцию для чисел Каталана:*

$$G(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Теперь нужно определиться, какой из двух корней нас интересует. Заметим, что $G(z)$ должно быть равно 1 при $z=0$, следовательно, нам подходит корень со знаком минус:

$$G(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Осталось разложить в ряд полученное выражение (здесь мы пользуемся расширенными биномиальными коэффициентами):

$$G(z) = \frac{1}{2z} - \frac{\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-4z)^n C_{\frac{1}{2}}^n =$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4z)^n(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}C_{2n}^n =$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-z^n}{2n-1}C_{2n}^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4n-2}C_{2n}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4n+2}C_{2n+2}^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}C_{2n}^n.$$

Откуда получается, *явное формула* для вычисления чисел Каталана:

$$C_n = [z^n]G(z) = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

Выведенная формула даёт ещё одно, более *простое рекуррентное соотношение:*

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}, \quad n > 0.$$

или

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}.$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Известно несколько десятков их различных определений. На сегодняшний день можно перечислить около 100 задач математики и физики, в которых встречаются эти числа.

Вот некоторые из них.

Монотонные пути в квадрате — маршруты из левого нижнего угла квадрата в правый верхний, которые идут по линиям сетки вверх или вправо и не заходят выше диагонали. На рисунке 2 все такие пути для квадрата 3×3.

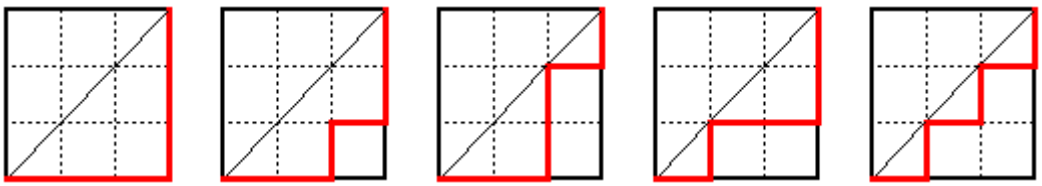

Рис. 2

Количество триангуляций выпуклого $(n+2)$-угольника (т.е. количество разбиений многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники, рис. 3).

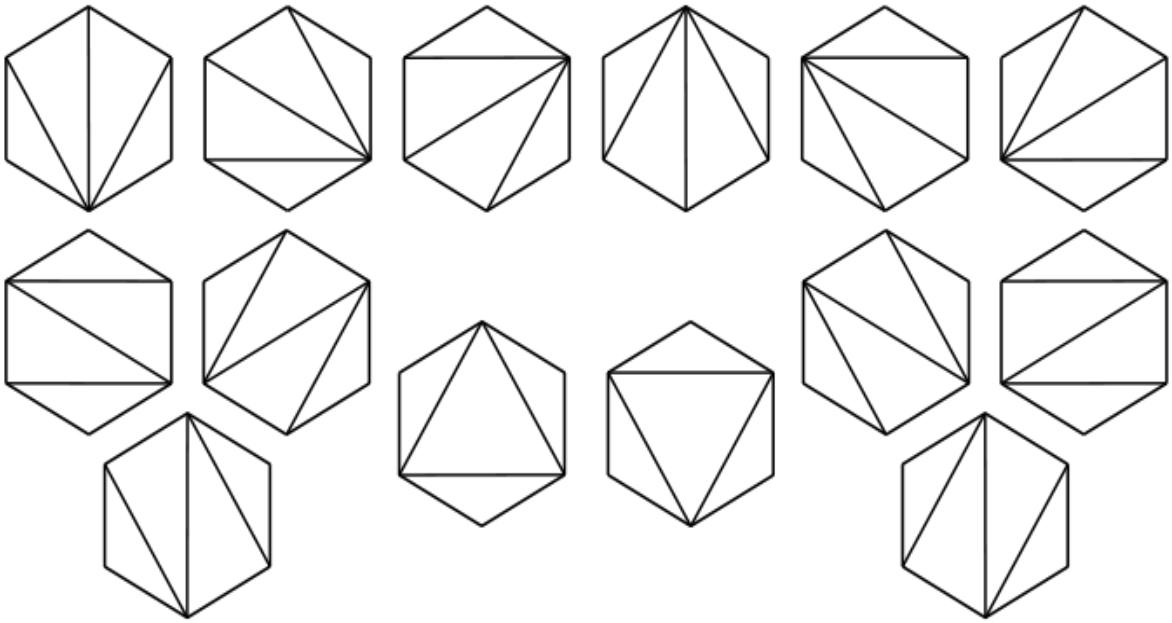

Рис. 3

Количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

§5. Пути Дика

Важная реализация чисел Каталана связана с путями Дика на плоскости.

Рассмотрим целочисленную решетку в положительном квадранте.

Путем Дика называется непрерывная ломаная в верхней полуплоскости, составленная из векторов (1,1) (назовем его подъемом) и (1,−1) (назовем его спадом), начинающаяся в начале координат и заканчивающаяся на оси абсцисс.

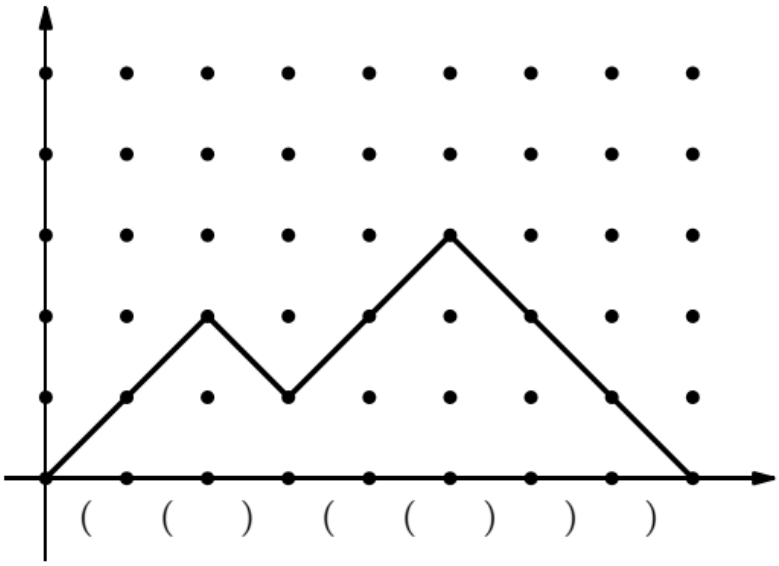

Рис. 4

Совершенно ясно, как устанавливается соответствие между путями Дика и правильными скобочными структурами: нужно сопоставить вектору (1,1) левую скобку, а вектору (1,1) — правую скобку (рис. 4). Тогда условие, что путь лежит в верхней полуплоскости и заканчивается на оси абсцисс, и есть в точности условие правильности скобочной структуры. Поэтому число путей Дика из $2n$ звеньев равно n-му числу Каталана C_n .

Также можно интерпретировать эти числа, как *числа маршрутов шахматного короля* из левого нижнего угла в правый нижний угол шахматной доски размером $(2n+1)\times(2n+1)$, при условии, что король может ходить только по направлению "вправо-вверх" и "вправо-вниз".

§6. Числа Моцкина

Предположим теперь, что кроме открывающей и закрывающей скобок в последовательности может присутствовать ещё один символ, не нарушающий правильность правильных скобочных последовательностей. Например, символ "0". Такую последовательность будем называть "правильная скобочная последовательность, разрежённая нулями". Например, количество таких последовательностей, состоящих из 4 элементов, равно 9:

0000, ()00, 0()0, 00(), (0)0, 0(0), (00), ()(), (()).

Выведем формулу для количества M_n правильных скобочных последовательностей, разрежённых нулями и состоящих из n символов. Сперва отметим, что число пар скобок, которые могут присутствовать в такой правильной скобочной последовательности, разрежённой нулями, равно $\left[\frac{n}{2}\right]$. Если некоторая правильная скобочная последовательность, разрежённая нулями, содержит правильных скобочных последовательностей из k пар скобок, то в ней также содержится $n-2k$ символов "0". Скобки, которые соответствуют правильным скобочным последовательностям, могут быть упорядочены C_k способами и установлены на n свободных позиций C_n^{2k} способами (остальные позиции занимают символы "0"). Таким образом, общая формула имеет вид

$$M_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} C_i, \quad \text{где} \quad C_i = \frac{1}{i+1} C_{2i}^{i}.$$

Другая интерпретация чисел Моцкина: *пути Моцкина* определяются как последовательность шагов таких, что на каждом шаге из каждой точки с координатами (n,k) можно перейти в одну из трех точек: $(n+1,k+1)$, $(n+1,k)$ или $(n+1,k-1)$. Числом Моцкина называется количество всех путей Моцкина, ведущих из начальной вершины с координатами $(0,0)$ в конечную вершину $(n,0)$, и при этом не опускающихся ниже уровня $k=0$.

Числа Моцкина также можно интерпретировать, как *количество маршрутов шахматного короля* из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером $(n+1)\times(n+1)$, при условии, что он может двигаться по направлениям "вправо-вверх", "вправо-вниз" и "вправо".

Числа Моцкина равны также количеству способов соединить n точек окружности непересекающимися хордами.

Последовательность чисел Моцкина начинается так:
1, 1 , 2 , 4 , 9 , 21 , 51 , 127 , 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, 2356779, 6536382, 18199284, 50852019, 142547559, 400763223, 1129760415, 3192727797, 9043402501, 25669818476, 73007772802, 208023278209, 593742784829, ...

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Моцкина, найдем сначала *рекуррентное соотношение* для этих чисел.

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} M_n M_{n-2-k}$$

Будем искать производящую функцию в виде

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n$$

Решая это получим: $G(z) = 1 + zG(z) + z^2G^2(z)$,

$$z^2G^2(z) + G(z)(z-1) + 1 = 0,$$

$$G(z) = \frac{(1-z) - \sqrt{1-2z-3z^2}}{2z^2}.$$

Известны многие их свойства и выражения, связывающие пути Моцкина с известными комбинаторными числами. Например, числа Моцкина M_n и числа Каталана C_nсвязаны соотношениями [2]:

$$M_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} C_i, \quad \mathrm{C}_{n+1} \sum_{i=0}^{n} C_n^i M_i, \;\; n \geq 0.$$

§7. Числа Шрёдера

Числа Шрёдера S_n в комбинаторике описывают количество путей из левого нижнего угла квадратной решётки $n \times n$ в противоположный по диагонали угол, используя ходы вверх (0,1), вправо (1,0) или вверх-вправо (1,1), при этом пути не поднимаются выше диагонали квадратной решётки.

Эта последовательность чисел названа в честь немецкого математика Эрнеста Шрёдера. Выпишем несколько первых чисел Шрёдера:

1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, …. .

Другая интерпретация чисел Шрёдера.

Числа Шрёдера равны количеству способов разрезания данного прямоугольника на $n + 1$ меньших прямоугольников с помощью n разрезов. Эти разрезы проводятся через заданные n точек внутри прямоугольника, никакие две из которых не лежат на одной прямой, параллельной сторонам прямоугольника, при этом каждый разрез проходит через одну из этих точек и делит только один прямоугольник на два.

Числа Шрёдера считают количество путей из точки (0,0) в ($2n$,0), использующих только шаги вправо-вверх или вправо-вниз (шаги (1,1) или (1,–1)) или двойные шаги вправо (2,0), которые не опускаются ниже оси x.

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Шрёдера, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел:

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-1-k}.$$

Будем искать производящую функцию в виде $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$. Решая это соотношение, находим производящую функция для чисел Шрёдера

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{2x}.$$

Явная формула для вычисления чисел Шрёдера:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k C_{n+k}^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k}\, C_k.$$

§8. Производящие функции нескольких переменных

Производящие функции от двух переменных отвечают двух индексным последовательностям. Такие последовательности удобно записывать в виде треугольника (соответствующего положительному квадранту целочисленной решетки).

§8.1. Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля изображен на рис. 5. Элементы этого треугольника перечисляют пути, идущие из его вершины в соответствующую клетку. Пути имеют вид ломаных, составленных из векторов единичной длины двух видов: идущих вправо-вниз и идущих влево-вниз.

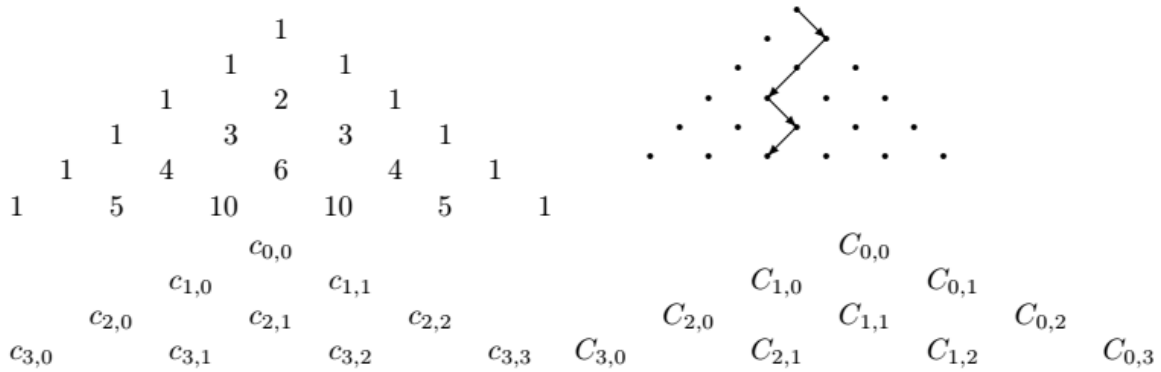

рис. 5

Числа, стоящие в треугольнике Паскаля, — это уже хорошо знакомые нам биномиальные коэффициенты

$$c_{n,k} = C_n^k.$$

Это несложно доказать индукцией по n. Предположим, что числа в -й строчке треугольника совпадают с коэффициентами разложения многочлена $(1+\ s)^n$. Число различных путей, ведущих в точку $(n+1; k)$, равно сумме числа путей, ведущих в точку $(n; k-1)$, и числа путей, ведущих в точку

$(n;k)$, $c_{n+1;k} = c_{n;k-1} + c_{n;k}$. Поэтому число $c_{n+1;k}$ совпадает с коэффициентом при s^k в многочлене $(1 + s) * (1 + s)^n = (1 + s)^{n+1}$.

Производящая функция может быть сопоставлена треугольнику Паскаля несколькими способами. Например, можно рассмотреть производящую функцию

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} c_{n,k} x^k y^n = \sum_{n,k=0}^{\infty} C_n^k x^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \right) y^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

Второй способ соответствует нумерации элементов треугольника числом отрезков каждого типа на путях, ведущих в соответствующую точку (рис. 2). Для этой нумерации

$$C_{n,m} = c_{n+m,m} = C_{n+m}^m,$$

и производящая функция имеет вид

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m} x^n y^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n+m}^m x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} C_{n+m}^n x^n y^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$

На этот раз она оказалась симметричной по переменным x и y.

§8.2. Треугольник Дика

Треугольник Дика перечисляет пути в положительном квадранте плоскости, выходящие из начала координат и составленные из векторов (1; 1) и (1; -1) (см. рис. 6).

					1		6		27	
				1		5		20		75
			1		4		14		48	
		1		3		9		28		90
	1		2		5		14		42	
1		1		2		5		14		42

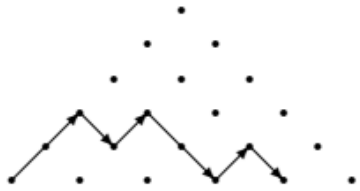

рис.6

Нетрудно видеть, что элементы $d_{i,j}$треугольника Дика отличны от нуля в том и только в том случае, если $i \geq j$ и $i + j$ — четно. Обозначим через $D(x;\ y)$ производящую функцию Дика двух переменных

$$D(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} d_{i,j} x^i y^j.$$

Правило построения треугольника Дика подсказывает нам уравнение на эту производящую функцию

$$xyD(x, y) + \big(D(x, y) - D(x, 0)\big)\frac{x}{y} = D(x, y) - 1.$$

Действительно, коэффициент при любом мономе x_i, y_j, отличном от единичного, представляет собой сумму коэффициентов при мономах $x_{i-1}\ y_{j-1}$ и $x_{i-1}\ y_{j+1}$. Функция

$$D(x, 0) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2}$$

нам хорошо известна, и ряд $D(x;\ y)$ находится из решения линейного уравнения, $D(x, y) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}-2xy}{2x(x^2y+x-y)}$.

Пусть $C(n,k)$ — число путей Дика из $2n$ векторов, k из которых есть число подъемов. Тогда числа $C(n,k) = \frac{k}{n-k} C_{2n-k-1}^{n}$, $n \geq 2, 1 \leq k \leq n-1$, совпадают с обобщенными числами Каталана.

§9. Числа Деланноя

Многие классические последовательности чисел, а также пути на целочисленных решетках названы именами великих математиков. Перечислим некоторых из них: Леонардо Фибоначчи (1170– 1250), Блез Паскаль (1623–1662), Якоб Бернулли (1654–1705), Джеймс Стирлинг (1692–1770), Леонард Эйлер (1707–1783), Эрнст Шрёдер (1841–1902), Вальтер фон Дик (1856–1934), американец Теодор Моцкин (1908-1970) и другие. Имена многих из них более известны в комбинаторике, их открытия связаны с различными исследованиями путей на целочисленных решетках.

Деланной — другое “известное” имя, которое связано с перечислением путей на целочисленной решетке. Числа Деланноя, введенные Анри Деланноем [9] более ста лет назад, в последнее время вновь стали предметом исследований многих математиков.

Числа Деланноя $D(n,m)$ в комбинаторике описывают количество путей из левого нижнего угла прямоугольной решётки $(0,0)$ к (n,m), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1). Такой путь иногда называют маршрутом (ограниченного) короля.

Для квадратной сетки $n \times n$ первые числа Деланноя (начиная с $n = 0$) последовательности выглядят так:

1, 3, 13, 63, 321, 1683, 8989, 48639, 265729, …

В 1997 году на 4-ой Соросовской математической олимпиаде школьников была предложена следующая задача .

В левом нижнем углу шахматной доски размерами 6×6 находится король. За один ход он передвигается либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали — вправо и вверх. Сколькими различными путями король может пройти в правый верхний угол доски?

(Эта же задача встретилась в 1999 году на олимпиаде, организованной университетом Нового Южного Уэльса (Австралия) для студентов и

учащихся средних школ. Участникам олимпиады разрешалось использовать любые книги и материалы, кроме компьютеров с выходом в Интернет.) Приведем несколько возможных решений этой задачи.

Решение 1 (рекурсивный подсчёт).

В каждой клетке шахматной доски 6×6 напишем число, равное количеству допустимых путей, которыми король может дойти до этой клетки из левого нижнего угла. Начиная с левого нижнего угла, заполняем единицами всю левую вертикаль и нижнюю горизонталь. Далее заполняем вторую слева вертикаль и вторую снизу горизонталь по следующему правилу: в очередной клетке ставим сумму чисел, стоящих в трёх соседних клетках — снизу, слева и по диагонали снизу-слева, и так далее. Таким образом, мы находим, что искомое число маршрутов равно 1683.

1	11	61	231	681	1683
1	9	41	129	321	681
1	7	25	63	129	231
1	5	13	25	41	61
1	3	5	7	9	11
1	1	1	1	1	1

Следствие 1. Для чисел $D_{x,y}$ справедливо рекуррентное соотношение

$$D_{x,y} = D_{x-1,y-1} + D_{x,y-1} + D_{x-1,y}\,,$$

Решение 2 (комбинаторное). С помощью комбинаторных рассуждений задача решается в более общей ситуации. Все искомые маршруты короля из клетки (0,0) в клетку (x, y) разобьем на непересекающиеся между собой классы P_k по числу k входящих в них диагональных ходов (влево-вверх). Например, при $k = 0$ соответствующий класс P_0 содержит пути, состоящие из $x + y$ ходов короля, среди которых нет ни одного диагонального хода и ровно x «горизонтальных» и y «вертикальных» ходов. Всевозможные перестановки горизонтальных и вертикальных ходов образуют $\dfrac{(x+y)!}{x!\,y!}$ таких путей. При $k = 1$ класс P_1 содержит пути из одного диагонального хода, $(x-1)$ горизонтальных и $(y-1)$ вертикальных ходов короля; количество путей в классе P_1 равно числу

перестановок с повторением из указанных $1 + (x - 1) + (y - 1) = x + y - 1$ элементов, то есть равно $\dfrac{(x + y - 1)!}{(x - 1)!\,(y - 1)!\,1!}$. В общем случае, класс P_k содержит маршруты из k диагональных ходов, $(x - k)$ горизонтальных и $(y - k)$ вертикальных ходов короля; их число равно количеству перестановок с повторением из ходов указанного типа, то есть равно $\dfrac{(x + y - k)!}{(x - k)!\,(y - k)!\,k!}$.

Искомое число маршрутов короля из клетки (0,0) в клетку (x, y) равно сумме всех указанных выражений

$$D_{x,\,y} = \sum_{k \ge 0} \frac{(x + y - k)!}{(x - k)!\,(y - k)!\,k!} = \sum_{k \ge 0} C_x^k\, C_{x + y - k}^x\,,$$

причем сумма берется по всем неотрицательным k, не превосходящим x и y. В частности, для доски размерами $(n + 1) \times (n + 1)$ получаем

$$D_{n,\,n} = \sum_{k \ge 0} \frac{(2n - k)!}{(n - k)!\,(n - k)!\,k!} = \sum_{k \ge 0} C_n^k\, C_{2n - k}^n\,.$$

Для доски размерами 6×6 по этой формуле имеем

$$D_{5,\,5} = \frac{10!}{5!\,5!\,0!} + \frac{9!}{4!\,4!\,1!} + \frac{8!}{3!\,3!\,2!} + \frac{7!}{2!\,2!\,3!} + \frac{6!}{1!\,1!\,4!} + \frac{5!}{0!\,0!\,5!} = 1683.$$

Решение 3 (производящая функция). Пусть $D_{x,\,y}$ — количество маршрутов короля из клетки (0,0) в клетку (x, y). Как уже отмечалось в решении 1, для чисел $D_{x,\,y}$ справедливо рекуррентное соотношение

$$D_{x,\,y} = D_{x-1,\,y-1} + D_{x,\,y-1} + D_{x-1,\,y}\,, \qquad (1)$$

опираясь на которое легко найти явный вид производящей функции для последовательности $D_{x,\,y}$. Пусть $G(x,y)$ — её производящая функция, то есть

$$G(x,y) = \sum_{m,\,n \ge 0} D_{m,\,n}\, x^m\, y^n\,.$$

Выделим из этой суммы слагаемые, у которых один из индексов равен 0, и воспользуемся равенством (1). Тогда получим

$$G(x,y) = xyG(x,y) + xG(x,y) + yG(x,y) + 1,$$

$$G(x,y) - xyG(x,y) - xG(x,y) - yG(x,y) = 1,$$

$$G(x,y)\,(1-x-y-xy)=1,$$

$$G(x,y)=\frac{1}{1-x-y-xy}=\frac{1}{2-(1+x)(1+y)}.$$

Для получения окончательной формулы для чисел $D_{m,\,n}$ осталось разложить в ряд функцию $G(x,y)$:

$$G(x,y)=\frac{1}{(1-y)-x(1+y)}=\frac{1}{1-y}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1+y}{1-y}x}=\frac{1}{1-y}\cdot\sum_{m\ge 0}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^m x=$$

$$=\sum_{m\ge 0}x^m(1+y)^m(1-y)^{-(m+1)}.$$

Раскладывая выражения $(1+y)^m$ и $(1-y)^{-(m+1)}$ в степенные ряды, получим

$$G(x,y)=\sum_{m\ge 0}x^m\sum_{k\ge 0}C_m^k y^k\sum_{l\ge 0}C_{m+l}^m y^l=\sum_{m\ge 0}x^m\sum_{k,\,l\ge 0}C_m^k C_{m+l}^m y^{k+l}.$$

Коэффициент $D_{m,\,n}$ при $x^m y^n$ находится из условия $k+l=n$. Подставляя вместо l число $n-k$ и выделяя коэффициент при $x^m y^n$, получим требуемое равенство

$$D_{m,\,n}=\sum_{k\ge 0}C_m^k C_{m+n-k}^m. \qquad (2)$$

Числа $D_{m,\,n}$, очевидно, обладают свойством симметрии, $D_{m,\,n}=D_{n,\,m}$. Используя известное тождество для биномиальных сумм, можно получить «более» симметричную форму записи равенства (2).

Следствие 2. *Количество маршрутов короля из клетки* (0, 0) *в клетку* $(m,\,n)$ *равно*

$$D_{m,\,n}=\sum_{k\ge 0}C_m^k C_{m+n-k}^m.$$

Следствие 3. Производящая функция для последовательности $D_{x,\,y}$

$$G(x,y)=\sum_{m,\,n\ge 0}D_{m,\,n}x^m y^n=\frac{1}{1-x-y-xy}.$$

Теорема 1. *Количество маршрутов короля из клетки* (0, 0) *в клетку* $(m,\,n)$ *равно*

$$D_{m,\,n}=\sum_{k\ge 0}C_m^k C_n^k 2^k. \qquad (3)$$

Доказательство (производящая функция). В предположении $m \le n$ заменим индекс суммирования k на $m - k$, после чего перепишем (2) в виде

$$D_{m,\,n} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, C_{n+k}^m .$$

Умножим левую часть на x^n, просуммируем при всех $n \ge 0$, а затем изменим порядок суммирования:

$$\sum_{n \ge 0}\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k\, C_{n+k}^m\right)x^n = \sum_{k=0}^{n} C_m^k x^{-k} \sum_{n \ge 0} C_{n+k}^m\, x^{n+k} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\,(x^{-1})^k \cdot \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} =$$

$$= (1 + x^{-1})^m \cdot \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{1-x} \cdot \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^m =$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(\frac{2x}{1-x}\right)^k = \sum_{k=0}^{m} 2^k\, C_m^k \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{m} 2^k\, C_m^k \sum_{l \ge 0} C_{l+k}^l\, x^{l+k} =$$

$$= \sum_{l \ge 0} \sum_{k=0}^{m} 2^k\, C_m^k\, C_{l+k}^k\, x^{l+k}.$$

Коэффициент при x^n в последней сумме находится из условия $k + l = n$. Подставляя вместо l число $n - k$, приходим к равенству (3).

Пример. Пусть $m = 2$, $n = 3$. По формуле (3) имеем

$D_{2,\,3} = C_2^0\, C_3^0\, 2^0 + C_2^1\, C_3^1\, 2^1 + C_2^2\, C_3^2\, 2^2 = 1 + 12 + 12 = 25.$

В случае $n = m$ числа Деланноя называются центральными числами Деланноя и обозначается $D_{n,\,n}$ или $D(n)$.

Больше чем 50 лет назад была отмечена связь между центральными числами Деланноя и полиномами Лежандра [13], [14], [15]. До недавнего времени эта связь считалась "случайной". G.Hetyei [12] отметил, что центральные числа Деланноя выражаются через полиномы Якоби (которые являются обобщением полиномов Лежандра).

Многочлен Лежандра степени n $\mathrm{P}_n(\mathrm{x})$ является частным случаем многочлена Якоби n степени, которое определяется по формуле

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\,(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \quad [(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}] .$$

Подставив $\alpha = 0$, $\beta = 0$ получим $P_n(x) = \frac{2^{-n}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ — *многочлен Лежандра степени* n

Теорема 2. *Для чисел* $D_{m,\,n}$ *справедливо равенство*

$$D_{m,\,n} = P_n^{(m-n,\,0)}(3). \tag{3}$$

Доказательство. Воспользуемся известным представлением многочленов Якоби через биномиальные коэффициенты [**10**]:

$$2^{-n}\sum_{k\geq 0} C_{n+\alpha}^{k}\, C_{n+\beta}^{n-k}\,(x+1)^k\,(x-1)^{n-k} = P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x).$$

Подставив $\alpha = m-n$, $\beta = 0$ и $x = 3$, несложными преобразованиями приходим к требуемой формуле

$$P_n^{(m-n,0)}(3) = 2^{-n}\sum_{k\geq 0} C_m^k C_n^{n-k} 2^k 2^n = \sum_{k\geq 0} C_m^k C_n^{n-k} 2^k = \sum_{k\geq 0} C_m^k C_n^k 2^k$$
$$= D_{m,n}.$$

Следующая связь между центральными числами Деланноя и полиномом Лежандра была известна в течение по крайней мере половины века [13], [14], [15]:

Следствие 4. *Для чисел* $D_{n,\,n}$ *справедливы равенства*

$$D_{n,\,n} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2\, 2^k = P_n(3), \tag{4}$$

где $P_n(x) = \frac{2^{-n}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ — *многочлен Лежандра степени* n.

Доказательство. Воспользуемся известным представлением многочленов Лежандра через биномиальные коэффициенты [**10**]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Подставив $x = 3$, несложными преобразованиями приходим к требуемой формуле

$$P_n(3) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 4^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 2^k = D_{n,n}.$$

но никакое комбинаторное объяснение не находилось, там даже казалось, что это уравнение - скорее "совпадение". Banderier и Schwer [9] отмечают, что нет никакой связи между полиномами Лежандра и проблемой Деланноя перечисления путей решетки. В то же время Sulanke [16] заявляет, что "определение полиномов Лежандра, кажется, не имеет никакой комбинаторной интерпретации, приводящей к перечислению". Однако сам автор нашел эту комбинаторную интерпретацию в [12], хотя эта связь включает только центральные числа Деланноя.

Мы исследовали задачу подсчета количества маршрутов *из клетки* (0,0) *в клетку* (m, n) на плоскости, т.е. $r = 2$, а сейчас давайте займемся решением задачи о подсчете числа маршрутов *из клетки* (0, 0,0) *в клетку* (n,n, n) в пространстве, т.е. $r = 3$. В этом случае каждый шаг пути из клетки (0,0,0) в клетку (n,n,n) представляет собой ненулевой трехмерный вектор, каждая координата которого равна 0 или 1.

Последовательность чисел Деланноя в пространстве начинается так:

1, 13, 409, 16081, 699121, 32193253, 1538743249, 75494983297, …

Пример. Сколькими различными путями можно из клетки (0,0,0) можно пройти в клетку (1,1,1)?

Решение:

1. (0,0,0) -> (0,0,1) -> 011 -> 111
2. 000 -> 001 -> 101 -> 111
3. 000 -> 001 -> 111
4. 000 -> 010 -> 011 -> 111
5. 000 -> 010 -> 110 -> 111
6. 000 -> 010 -> 111
7. 000 -> 100 -> 101 -> 111
8. 000 -> 100 -> 110 -> 111

9. 000 -> 100 -> 111

10.000 -> 011 -> 111

11.000 -> 101 -> 111

12.000 -> 110 -> 111

13.000 -> 111

Значит из клетки (0,0,0) в клетку (1,1,1) можно пройти 13 различными путями. Из этого примера можно видеть, что выполняется равенство

$$D(m,n,p) = D(m-1,n,p) + D(m,n-1,p) + D(m,n,p-1) +$$
$$+D(m-1,n-1,p) + D(m-1,n,p-1) + D(m,n-1,p-1) +$$
$$+D(m-1,n-1,p-1),$$

опираясь на которое легко найти явный вид производящей функции для последовательности $D(x,y,z)$. Пусть $G(x,y,z)$ — её производящая функция, то есть

$$G(x,y,z) = \sum_{m,n\geq 0} D(m,n,p)x^m y^n z^p$$

Выделим из этой суммы слагаемые, у которых один из индексов равен 0, и воспользуемся равенством . Тогда получим

$$G(x,y,z) = xG(x,y,z) + yG(x,y,z) + z\,G(x,y,z) + xyG(x,y,z)$$
$$+ xz\,G(x,y,z) + yz\,G(x,y,z) + xyz\,G(x,y,z) + 1,$$
$$G(x,y,z) - xG(x,y,z) - yG(x,y,z) - z\,G(x,y,z) - xyG(x,y,z)$$
$$- xz\,G(x,y,z) - yz\,G(x,y,z) - xyz\,G(x,y,z) = 1,$$
$$G(x,y,z)(1 - x - y - z - xy - xz - yz - xyz) = 1,$$
$$G(x,y,z) = \frac{1}{1-x-y-z-xy-xz-yz-xyz}.$$

Получили производящую функция для чисел Деланноя в пространстве:

$$\sum_{m,n\geq 0} D(m,n,p)x^m y^n z^p = \frac{1}{1-x-y-z-xy-xz-yz-xyz}.$$

Теорема 3. Количество маршрутов *из клетки* (0, 0,0) *в клетку* (n,n, n) в пространстве равно [18]

$$D(n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{n} C_n^i C_{n-i}^j C_n^k C_{n+i}^{i+j} C_n^{i+k} 2^{i+j+k}.$$

Следствие 5. Количество маршрутов *из клетки* (0,0,0) *в клетку* (n,n,n) в пространстве равно [27]

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^{n^3}}{2^{k+1}}.$$

Глава 3. Практическая часть

Задача 1.1.

Сколькими способами король может пройти из левого нижнего угла шахматной доски 11×11 в правый нижний угол, сдвигаясь каждым ходом по направлению "вправо-вверх" и "вправо-вниз".

Решение.

Из условии видно, что количество способов является числом Каталана (пути Дика). Мы знаем, что число Каталана вычисляется по формуле:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

В нашем случае $n = 5$. Вычислим:

$$C_5 = \frac{1}{6} C_{10}^5 = \frac{1}{6} \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{1}{6} \frac{10!}{5!5!} = 42$$

следовательно, 42 способами король может пройти из левого нижнего угла шахматной доски 11×11 в её правый нижний угол, сдвигаясь каждым ходом по направлению "вправо-вверх" и "вправо-вниз".

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 5;
```

$$n := 5$$

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)/(n+1);
```

$$Catalon_numbers := 42$$

Ответ: 42.

Задача 1.2.

Сколькими способами король может пройти из левого нижнего угла шахматной доски 23×23 в правый нижний угол, сдвигаясь каждым ходом по направлению "вправо-вверх" и "вправо-вниз".

Решение.

Вычислим по формуле:

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}.$$

В нашем случае $n = 11$. Вычислим

$$C_{11} = C_{22}^{11} - C_{22}^{10} = \frac{22!}{11! * 11!} - \frac{22!}{10! * 12!} = 705432 - 646646 =$$

$= 58786$ следовательно, 58786 способами король может пройти из левого нижнего угла шахматной доски 23×23 в её правый нижний угол, сдвигаясь каждым ходом по направлению "вправо-вверх" и "вправо-вниз".

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 11;
```

$$n := 11$$

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)-binomial(2*n, n-1);
```

$$Catalon_numbers := 58786$$

Ответ: 58786.

Задача 1.3.

Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла 3×3 доски в её правый верхний угол, сдвигаясь каждым ходом по линиям сетки вверх или вправо и ни разу не оказавшись выше диагонали .

Решение.

Из условии видно, что количество способов является числом Каталона. Мы знаем, что число Каталона вычисляется по формуле:

$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$. В нашем случае $n = 3$. Вычислим

$C_5 = \frac{1}{4} C_6^3 = \frac{1}{4} \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1}{4} \frac{6!}{3!3!} = 5$

следовательно, 5 способами можно пройти из левого нижнего угла 3×3 доски в её правый верхний угол, сдвигаясь каждым ходом по линиям сетки вверх или вправо и ни разу не оказавшись выше диагонали Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 3;
```

$$n := 3$$

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)/(n+1);
```

$$Catalon_numbers := 5$$

Ответ: 5.

Задача 1.4.

На окружности отмечены 18 точек. Сколькими способами можно так разбить их на пары, чтобы соответствующие хорды не пересекались?

Решение.

Из условии видно, что количество способов является числом Каталана. Число Каталана вычисляется по формуле:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

В нашем случае $n = 9$. Вычислим:

$$\mathrm{C}_9 = \frac{1}{10} C_{18}^9 = \frac{1}{10} \frac{18!}{9!(18-9)!} = \frac{1}{10} \frac{18!}{9!9!} = 4862,$$

следовательно, 4862 способами можно разбить их на не пересекающиеся пары. Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 9;
```

$$n := 9$$

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)/(n+1);
```

$$Catalon_numbers := 4862$$

Ответ: 4862.

Задача 1.5.

Сколькими способами можно триангулировать выпуклый 6- угольник?

Решение.

Количество различных триангуляций выпуклого (n+2)-угольника равно числу Каталана. Мы знаем, что числа Каталана вычисляются по формуле:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

В нашем случае $n = 4$, поэтому $\mathrm{C}_4 = \frac{1}{5} C_8^4 = \frac{1}{5} \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{1}{5} \frac{8!}{4!4!} = 14$, то есть выпуклый 6- угольник можно триангулировать 14 способами.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 4;
```

$$n := 4$$

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)/(n+1);
```

$Catalon_numbers := 14$

Ответ: 14.

Задача 2.1.

Сколькими способами король может перейти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером 8×8, при условии, что он также может двигаться по направлениям "вправо-вверх", "вправо-вниз" и "вправо".

Решение.

Из условии видно, что количество способов является числом Моцкина. Мы знаем, что число Моцкина вычисляется по формуле $M_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} C_i$, где C_i число Каталона.

$$M_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} \frac{1}{i+1} C_{2i}^{i} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{1}{i+1} C_n^{2i} C_{2i}^{i}.$$

В нашем случае $n = 7$.

$$M_7 = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i+1} C_3^{2i} C_{2i}^{i} = C_7^0 C_0^0 + \frac{1}{2} C_7^2 C_2^1 + \frac{1}{3} C_7^4 C_4^2 + \frac{1}{4} C_7^6 C_6^3 =$$

$$= \frac{1}{1}\frac{7!}{7!} + \frac{1}{2}\frac{7!}{2!\,5!}\frac{2!}{1!\,1!} + \frac{1}{3}\frac{7!}{4!\,3!}\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{1}{4}\frac{7!}{6!\,1!}\frac{6!}{3!\,3!} = 127$$

Следовательно, 127 способами король может перейти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером 8×8, при условии, что он также может двигаться по направлениям "вправо-вверх", "вправо-вниз" и "вправо".

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=7;
```

$$n := 7$$

```
> Motzkin_numbers:=sum(binomial(n+1, k)*binomial(n+1-k, k-1), k=0..ceil((n+1)/2))/(n+1);
```

$$Motzkin_numbers := 127$$

Ответ: 127.

Задача 2.2.

Сколькими способами можно пройти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку квадратной доски размером 10×10, при условии, что он также может двигаться по направлениям "вправо-вверх", "вправо-вниз" и "вправо".

Решение.

Вычисляем по формуле;

$M_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} \frac{1}{i+1} C_{2i}^i = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{1}{i+1} C_n^{2i} C_{2i}^i.$

В нашем случае $n = 9$.

$$M_9 = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i+1} C_9^{2i} C_{2i}^i = C_9^0 C_0^0 + \frac{1}{2} C_9^2 C_2^1 + \frac{1}{3} C_9^4 C_4^2 + \frac{1}{4} C_9^6 C_6^3 + \frac{1}{5} C_9^8 C_8^4$$

$$= \frac{1}{1}\frac{9!}{9!} + \frac{1}{2}\frac{9!}{2!\,7!}\frac{2!}{1!\,1!} + \frac{1}{3}\frac{9!}{4!\,5!}\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{1}{4}\frac{9!}{6!\,3!}\frac{6!}{3!\,3!} + \frac{1}{5}\frac{9!}{8!\,1!}\frac{8!}{4!\,4!} = 835$$

Следовательно, 835 способами король может перейти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером 10×10, при условии, что он также может двигаться по направлениям "вправо-вверх", "вправо-вниз" и "вправо".

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 9;
```

$$n := 9$$

```
> Motzkin_numbers:=sum(binomial(n+1, k)*binomial(n+1-k,
k-1), k=0..ceil((n+1)/2))/(n+1);
```

$$Motzkin_numbers := 835$$

Ответ: 835.

Задача 2.3.

Сколькими способами можно соединить непересекающиеся хордами окружности в 5 точках.

Решение.

Количество способов соединить n точек окружности непересекающимися хордами равно числу Моцкина. Имеем

$$M_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} \frac{1}{i+1} C_{2i}^{i} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{1}{i+1} C_n^{2i} C_{2i}^{i}.$$

В нашем случае $n = 5$.

$$M_5 = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i+1} C_5^{2i} C_{2i}^{i} = C_5^0 C_0^0 + \frac{1}{2} C_5^2 C_2^1 + \frac{1}{3} C_5^4 C_4^2 = 21$$

Следовательно, 5 точек окружности можно соединить непересекающимися хордами 21 способом.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 5;
```

$$n := 5$$

```
> Motzkin_numbers:=sum(binomial(n+1, k)*binomial(n+1-k,
k-1), k=0..ceil((n+1)/2))/(n+1);
```

$$Motzkin_numbers := 21$$

Ответ: 21.

Задача 3.1.

Сколькими способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 5×5 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо («ходом короля»), с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Решение.

Общее количество путей равно числу Шрёдера, которое вычисляется по формуле

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\, C_n^k\, C_{n+k}^k \ .$$

В нашем случае n=5. $S_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k+1} C_5^k C_{5+k}^k = \frac{1}{1} C_5^0 C_5^0 + \frac{1}{2} C_5^1 C_6^1 + \frac{1}{3} C_5^2 C_7^2 + \frac{1}{4} C_5^3 C_8^3 + \frac{1}{5} C_5^4 C_9^4 + \frac{1}{6} C_5^5 C_{10}^5 = 394$. Таким образом, 394 способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 5×5 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо («ходом короля»), с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=5;
```

$$n := 5$$

```
> Schroeder_numbers
:=sum(binomial(n,k)*binomial(n+k,k)/(k+1), k=0..n);
```

$$Schroeder_numbers := 394$$

Ответ: 394.

Задача 3.2.

Сколькими способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 10×10 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо ,с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Решение.

Решается аналогично, как предыдущая задача, по формуле:

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k C_{n+k}^k$. В нашем случае n=10.

$S_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k+1} C_{10}^k C_{10+k}^k = \frac{1}{1} C_{10}^0 C_{10}^0 + \frac{1}{2} C_{10}^1 C_{11}^1 + \frac{1}{3} C_{10}^2 C_{12}^2 + \frac{1}{4} C_{10}^3 C_{13}^3 +$

$\frac{1}{5} C_{10}^4 C_{14}^4 + \frac{1}{6} C_{10}^5 C_{15}^5 + \frac{1}{7} C_{10}^6 C_{16}^6 + \frac{1}{8} C_{10}^7 C_{17}^7 + \frac{1}{9} C_{10}^8 C_{18}^8 + \frac{1}{10} C_{10}^9 C_{19}^9 + \frac{1}{11} C_{10}^{10} C_{20}^{10} =$

1037718. Таким образом, 1037718 способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 10×10 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо («ходом короля»), с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 10;
```

$$n := 10$$

```
> Schroeder_numbers
:=sum(binomial(n,k)*binomial(n+k,k)/(k+1), k=0..n);
```

$$Schroeder_numbers := 1037718$$

Ответ:1037718

Задача 3.3.

Сколькими способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 15×15 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо («ходом короля»), с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Решение.

В нашем случае n = 15.

$S_{15} = \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{k+1} C_{15}^k C_{15+k}^k = \frac{1}{1} C_{15}^0 C_{15}^0 + \frac{1}{2} C_{15}^1 C_{16}^1 + \frac{1}{3} C_{15}^2 C_{17}^2 + \frac{1}{4} C_{15}^3 C_{18}^3 +$

$\frac{1}{5} C_{15}^4 C_{19}^4 + \frac{1}{6} C_{15}^5 C_{20}^5 + \frac{1}{7} C_{15}^6 C_{21}^6 + \frac{1}{8} C_{15}^7 C_{22}^7 + \frac{1}{9} C_{15}^8 C_{23}^8 + \frac{1}{10} C_{15}^9 C_{24}^9 + \frac{1}{11} C_{15}^{10} C_{25}^{10} +$

$$+\frac{1}{12}C_{15}^{11}C_{26}^{11}+\frac{1}{13}C_{15}^{12}C_{27}^{12}+\frac{1}{14}C_{15}^{13}C_{28}^{13}+\frac{1}{15}C_{15}^{14}C_{29}^{14}+\frac{1}{16}C_{15}^{15}C_{30}^{15}=3937603038.$$

Таким образом, 3937603038 способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 15×15 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо, с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 15;
```

$$n := 15$$

```
> Schroeder_numbers
:=sum(binomial(n,k)*binomial(n+k,k)/(k+1), k=0..n);
```

$$Schroeder_numbers := 3937603038$$

Ответ: 3937603038.

Задача 3.4.

Сколькими способами можно разрезать прямоугольник на 4 меньших прямоугольника с помощью 3 разрезов?

Решение.

Количество способов разделения прямоугольника на $(n + 1)$ меньших прямоугольника с помощью n разрезов совпадет с числом Шрёдера.

В нашем случае $n = 3$.

$$S_3=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k+1}C_3^kC_{3+k}^k=\frac{1}{1}C_3^0C_3^0+\frac{1}{2}C_3^1C_4^1+\frac{1}{3}C_3^2C_4^2+\frac{1}{4}C_3^3C_5^3=22.$$

Таким образом, прямоугольник можно разрезать на 4 меньших прямоугольника с помощью 3 разрезов ровно 22 способами.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 3;
```

$$n := 3$$

```
> Schroeder_numbers
:=sum(binomial(n,k)*binomial(n+k,k)/(k+1), k=0..n);
```

$$Schroeder_numbers := 22$$

Ответ: 22.

Задача 3.5.

Сколькими различными путями можно пройти из точки (0, 0) в (12, 0), использующих только шаги вправо-вверх или вправо-вниз (шаги (1, 1) или (1, –1)) или двойные шаги вправо (2, 0), которые не опускаются ниже оси *x*?

Решение.

Количество путей из точки (0, 0) в (2*n*, 0), использующих только шаги вправо-вверх или вправо-вниз (шаги (1, 1) или (1, –1)) или двойные шаги вправо (2, 0), которые не опускаются ниже оси *x*, равно числу Шрёдера.

В нашем случае $n = 6$.

$$S_6 = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k+1} C_6^k C_{6+k}^k =$$

$$= \frac{1}{1} C_6^0 C_6^0 + \frac{1}{2} C_6^1 C_7^1 + \frac{1}{3} C_6^2 C_8^2 + \frac{1}{4} C_6^3 C_9^3 + \frac{1}{5} C_6^4 C_{10}^4 + \frac{1}{6} C_6^5 C_{11}^5 +$$

$$+ \frac{1}{7} C_6^6 C_{12}^6 = 1806.$$

Итак, 1806 различными путями можно пройти из точки (0, 0) в (12, 0). Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n := 6;
```

$$n := 6$$

```
> Schroeder_numbers
:=sum(binomial(n,k)*binomial(n+k,k)/(k+1), k=0..n);
```

$$Schroeder_numbers := 1806$$

Ответ: 1806.

Задача 4.1

Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла прямоугольной решётки (*0,0*) в точку (4,7), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1).

Решение.

Как мы видим, в нашей задаче количество путей совпадет с числом Деланноя.

Число Деланноя в прямоугольной $m \times n$ решётки можно вычислить по формуле:

$D_{m,\,n} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, C_n^k 2^k$.

Вычислим количество путей. В нашем случае $m = 4, n = 7$.

$D_{4,7} = \sum_{k=0}^{4} C_4^k C_7^k 2^k = C_4^0 C_7^0 2^0 + C_4^1 C_7^1 2^1 + C_4^2 C_7^2 2^2 + C_4^3 C_7^3 2^3 + C_4^4 C_7^4 2^4 = 2241$

Итак, 2241 способом можно пройти из левого нижнего угла (0,0) прямоугольной решётки в точку (4,7), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1)

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> m:=4;
```

$$m := 4$$

```
> n:=7;
```

$$n := 7$$

```
> Delannoy_numbers:=sum(binomial(m,k)*binomial(n,k)*2^k,k=0..min(m,n));
```

$$Delannoy_numbers := 2241$$

Ответ: 2241

Задача 4.2.

Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла прямоугольной решётки (0,0) в точку (3,5), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1).

Решение.

Числа Деланноя в прямоугольной $m \times n$ решётке можно вычислить по формуле:

$D_{m,\,n} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, C_{m+n-k}^m$;

Вычислим количество путей. В нашем случае $m = 3, n = 5$.

$$D_{3,5} = \sum_{k=0}^{3} C_3^k C_{8-k}^3 = C_3^0 C_8^3 + C_3^1 C_7^3 + C_3^2 C_6^3 + C_3^3 C_5^3 = 231;$$

Итак, 231 способом можно пройти из левого нижнего угла (0,0) прямоугольной решётки в точку (3,5), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1).

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> m:=3;
```

$$m := 3$$

```
> n:=5;
```

$$n := 5$$

```
> Delannoy_numbers:=sum(binomial(m,k)*binomial(m+n-
k,m),k=0..min(m,n));
```

$$Delannoy_numbers := 231$$

Ответ: 231.

Задача 4.3.

Сколькими способами можно попасть из левого нижнего угла прямоугольной решётки (0,0) в точку (13,20), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1).

Решение.

Числа Деланноя в прямоугольной $m \times n$ решётке можно вычислить по формуле:

$D_{m,\,n} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\, C_n^k 2^k$.

Вычислим количество путей по этой формуле. В нашем случае $m = 13$, $n = 20$.

$$D_{13,20} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^{k} C_{20}^{k} 2^{k} = C_{13}^{0} C_{20}^{0} 2^{0} + C_{13}^{1} C_{20}^{1} 2^{1} + C_{13}^{2} C_{20}^{2} 2^{2} + C_{13}^{3} C_{20}^{3} 2^{3} + C_{13}^{4} C_{20}^{4} 2^{4} + C_{13}^{5} C_{20}^{5} 2^{5} + C_{13}^{6} C_{20}^{6} 2^{6} + C_{13}^{7} C_{20}^{7} 2^{7} + C_{13}^{8} C_{20}^{8} 2^{8} + C_{13}^{9} C_{20}^{9} 2^{9} + C_{13}^{10} C_{20}^{10} 2^{10} + C_{13}^{11} C_{20}^{11} 2^{11} + C_{13}^{12} C_{20}^{12} 2^{12} + C_{13}^{13} C_{20}^{13} 2^{13} = 213252565321.$$

Итак, существует 213252565321 способов попасть из левого нижнего угла (0,0) прямоугольной решётки в точку (13,20), используя только ходы вверх (0,1), вправо (1,0) и по диагонали (1,1).

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> m:=13;
```

$$m := 13$$

```
> n:=20;
```

$$n := 20$$

```
>
Delannoy_numbers:=sum(binomial(m,k)*binomial(n,k)*2^k,k
=0..min(m,n));
```

$$Delannoy_numbers := 21325256532$$

Ответ: 213252565321.

Задача 4.4.

В левом нижнем углу шахматной доски размерами 7×7 находится король. За один ход он передвигается либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали — вправо и вверх. Сколькими различными путями король может пройти в правый верхний угол доски?

Решение.

В этой задаче дана квадратная решетка, и для подсчета количества путей на квадратной решетке нам надо вычислить число Деланноя, используя формулу

$$D_{n,\,n} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2\, 2^k = P_n(3).$$

Вычислим количество путей, учитывая, что эти формулы даны для доски размерами $(n+1)\times(n+1)$. Для доски размерами 7×7 имеем $n = 6$.

$$D_{6,6} = \sum_{k=0}^{6}\left(C_6^k\right)^2 2^k = (C_6^0)^2 2^0 + (C_6^1)^2 2^1 + (C_6^2)^2 2^2 + (C_6^3)^2 2^3 +$$

$$+(C_6^4)^2 2^4 + \left(C_6^5\right)^2 2^5 + (C_6^6)^2 2^6 = 8989.$$

Итак, 8989 различными путями король может пройти в правый верхний угол доски размерами 7 ×7.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=6;
```

$$n := 6$$

```
> Delannoy_numbers:=sum(binomial(n,k)^2*2^k,k=0..n);
```

$$Delannoy_numbers := 8989$$

Ответ: 8989.

Задача 4.5.

В левом нижнем углу шахматной доски размерами 10 ×10 находится король. За один ход он передвигается либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали — вправо и вверх. Сколькими различными путями король может пройти в правый верхний угол доски?

Решение.

Вычислим количество путей, учитывая, что эти формулы даны для доски размерами $(n+1)\times(n+1)$. Для доски размерами 10×10 имеем $n = 9$.

$$D_{9,9} = \sum_{k=0}^{9}\left(C_9^k\right)^2 2^k = (C_9^0)^2 2^0 + (C_9^1)^2 2^1 + (C_9^2)^2 2^2 + (C_9^3)^2 2^3 +$$

$$+(C_9^4)^2 2^4 + \left(C_9^5\right)^2 2^5 + (C_9^6)^2 2^6 + (C_9^7)^2 2^7 + (C_9^8)^2 2^8 + (C_9^9)^2 2^9 = 1462563.$$

Итак, 1462563 различными путями король может пройти в правый верхний угол доски размерами 10×10.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=9;
```

$$n := 9$$

```
> Delannoy_numbers:=sum(binomial(n,k)^2*2^k,k=0..n);
```

$$Delannoy_numbers := 1462563$$

Ответ: 1462563.

Задача 5.1.

Сколькими различными путями можно из клетки (0,0,0) пройти в клетку (3,3,3), используя только ходы (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1),(1,1,0) и (1,1,1)?

Решение.

Решением этой задачи является число Деланноя в пространстве. Для этого применим формулу

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^{n\,3}}{2^{k+1}}.$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^{n\,3}}{2^{k+1}} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{C_k^{3\,3}}{2^{k+1}} = 16081.$$

Значит, 16081 различными путями можно из клетки (0,0,0) пройти в клетку (3,3,3), используя только ходы (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1),(1,1,0) и (1,1,1).

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=3;
> delannoy_Vprostranstve:=sum(binomial(k, n)^3/2^(k+1),
k=n..infinity);
```

$$n := 3$$

$$16081$$

Ответ: 16081.

Задача 5.2.

Сколькими способами можно пройти из клетки (0,0,0) в клетку (10,10,10), используя только ходы (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1),(1,1,0) и (1,1,1)?

Решение.

Решением этой задачи является число Деланноя в пространстве.

Имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^{n^3}}{2^{k+1}}.$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^{n^3}}{2^{k+1}} = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{C_k^{10^3}}{2^{k+1}} = 9850349744182729.$$

Значит, 9850349744182729 различными путями можно из клетки (0,0,0) пройти в клетку (10,10,10), используя только ходы (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1),(1,1,0) и (1,1,1).

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=10;
> delannoy_Vprostranstve:=sum(binomial(k, n)^3/2^(k+1),
k=n..infinity);
>
```

$$n := 10$$

$$delannoy_Vprostranstve := 985034974418272$$

Ответ: 9850349744182729.

Задача 5.3

Сколькими способами можно пройти из клетки (0,0,0) в клетку (15,15,15), используя только ходы (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1),(1,1,0) и (1,1,1)?

Решение.

Решение этой задачи является число Деланноя в пространстве.

Число Деланноя в пространстве мы умеем вычислять. Вычислим по формуле

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^{n^3}}{2^{k+1}}.$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k^{n^3}}{2^{k+1}} = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{C_k^{15^3}}{2^{k+1}} = 396151853200339743453696 1.$$

Значит, 396151853200339743453696 1 различными путями можно из клетки (0,0,0) пройти в клетку (15,15,15), используя только ходы (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,0,1), (0,1,1),(1,1,0) и (1,1,1).

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=15;
> delannoy_Vprostranstve:=sum(binomial(k, n)^3/2^(k+1),
k=n..infinity);
```

$$n := 15$$

$$delannoy_Vprostranstve := 396151853200339743453696$$

Ответ: 396151853200339743453696 1.

Заключение

В квалификационной работе изучены свойства производящих функций. С их помощью были выведены общие формулы для вычисления чисел Каталана, Моцкина, Шредера и Деланноя. Кроме того, были изучены свойства этих чисел и чисел Деланноя в пространстве, т.е. при $r = 3$.

Решены примеры на вычисление чисел Каталана, Моцкина, Шредера и Деланноя. Проверены вычисления с помощью программного пакета Maple.

Таким образом, трудно и даже практически невозможно переоценить значение теории производящих функций в комбинаторике. Многие из перечисленных комбинаторных задач можно эффективно решать, используя только эти методы.

Работа может быть использована в качестве методического пособия в учебном процессе учителями школ при подготовке учеников к олимпиадам по математике.

Список литературы

1. Ландо С.К Лекции о производящих функциях. –М.:МЦНМО, 2007. - 144 с.
2. Спивак А. Числа Каталана. // Квант. 2004. - №3. – с. 2-10.
3. Гарднер М. Числа Каталана. // Квант. 1978. - №7. – с. 20-26.
4. Гульден Я., Джексон Д. - Перечислительная Комбинаторика , М.: Наука, 1990. -504с. (гл.5.).
5. Иванов О. Элементарная Математика для Студентов .-–М.:МЦНМО, 2009. –с.51-56.
6. Деза Е.И. Специальные числа натурального ряда. М.: книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.-240с.
7. О.В. Кузьмин, Т.Г.Тюрнева, Некоторые свойства и перечислительные интерпретации чисел Моцкина, 12-ая Байкальская межвузовская конференция. -Иркутск : Иркутский государственный университет, 2001.- 78-91с.
8. Hirschhorn M. *How many ways can a king cross the board* // Austral. Math. Soc. Gazette, **27**, 2000, 104-106.
9. Banderier C., Schwer S. - Why Delannoy Numbers (ArXiv. math 0411128v1 [math. Co] 6 Nov 2004).
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды.* В 3 т. Т. 1. Элементарные функции, Физматлит, М., 2002. (4.2.7.1.)
11. G. Hetyei, Delannoy orthants of Legendre polytopes, preprint 2007, http://www.math.uncc.edu/preprint/2007/ 2007 11.pdf.
12. G. Hetyei, Central Delannoy numbers and balanced Cohen-Macaulay complexes, Ann. Comb. 10 (2006) 443–462.
13. I.J. Good, Legendre polynomials and trinomial random walks, Proc. Cambridge Philos. Soc. 54 (1958), 39–42
14. D.F. Lawden, On the solution of a linear difference equation, Mah. Gaz. 36 (1952), 193–196.

15. L. Moser and W. Zayachkowski, Lattice paths with diagonal steps, Scripta Math. 26 (1963), 223–229.
16. R.A. Sulanke, Objects counted by the central Delannoy numbers, J. Integer Seq. 6 (2003), Article 03.1.5, 19 pp.
17. S. Kaparthi, H.R. Rao, Higher dimensional restricted lattice paths with diagonal steps, Discrete Appl. Math. 31 (1991) 279–289.
18. Sulanke, R., Duchi, E., The 2n−1 factor for multi-dimensional lattice paths with diagonal steps, 2004.
19. Dickau, R. M. "Delannoy and Motzkin Numbers." http://www.prairienet.org/~pops/delannoy.html.
20. Zhi-Wei Sun, On Delannoy numbers and Schroeder numbers, Journal of Number Theory, Volume 131, Issue 12, December 2011, Pages 2387-2397;
21. http://oeis.org/A092832 - он-лайн энциклопедии целочисленных последовательностей .
22. http://ru.wikipedia.org/ - Свободная энциклопедия «Википедия» .
23. http://mathworld.wolfram.com/DelannoyNumber.html.
24. http://mathworld.wolfram.com/MotzkinNumber.html.
25. http://mathworld.wolfram.com/SchroederNumber.html.
26. http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html.
27. http://oeis.org/A126086.