ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.988

С.А. ГУСАРЕНКО

О МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ВИДЕ РАВЕНСТВ

Широкие классы вариационных задач, содержащих, например, функционалы с отклоняющимся аргументом, как правило, неразрешимы методами классического вариационного исчисления. Попытки выйти за рамки этих методов были предприняты, например, в [1]. Для решения таких задач был разработан метод редукции вариационных задач к задаче минимизации функционала в некотором гильбертовом пространстве [2]–[5]. Ниже предлагается общий подход к такой редукции, основанный на непосредственном изучении экстремальной задачи.

Напомним, что действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{D}$ линейный самосопряженный ограниченный оператор $U:\mathbf{D}\to\mathbf{D}$ называется *положительно определенным* на пространстве $\mathbf{D}$, если $\langle Uy,y\rangle\ge 0$ при всех $y\in\mathbf{D}$; *строго положительно определенным*, если $\langle Uy,y\rangle>0$ при всех $y\in\mathbf{D}$, $y\ne 0$; *сильно положительно определенным*, если $\langle Uy,y\rangle\ge\gamma\|y\|^2$ при некотором $\gamma>0$ и всех $y\in\mathbf{D}$. Положительная определенность оператора U эквивалентна неотрицательности его спектра. Сильная положительная определенность оператора U означает, что при некотором $\gamma>0$ все точки спектра оператора U не меньше γ, при этом существует обратный оператор U^{-1} ([6], с. 249).

Известные условия разрешимости задачи минимизации квадратичного функционала

$$\frac{1}{2}\langle x,Ux\rangle-\langle x,f\rangle\longrightarrow\inf, \tag{1}$$

где $f\in\mathbf{D}$ (напр., [2], [3]), сформулируем в следующем виде.

Теорема 1. *Точка $x_0\in\mathbf{D}$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда $Ux_0=f$ и оператор U положительно определен на пространстве $\mathbf{D}$. Если оператор U строго положительно определен на пространстве $\mathbf{D}$, то задача (1) имеет не более одного решения. Если оператор U сильно положительно определен на пространстве $\mathbf{D}$, то оператор U^{-1} обратим, и задача (1) имеет единственное решение $x_0=U^{-1}f$.*

Рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала с линейными ограничениями в виде равенств

$$\frac{1}{2}\langle x,Ux\rangle-\langle x,f\rangle\longrightarrow\inf,\quad \ell x=\alpha, \tag{2}$$

где компоненты линейного вектор-функционала $\ell:\mathbf{D}\to\mathbf{R}^k$ линейно независимы и $\alpha\in\mathbf{R}^k$.

Обозначим через $\mathbf{D}_\ell$ ядро вектор-функционала ℓ и представим пространство $\mathbf{D}$ в виде прямой суммы $\mathbf{D}=\mathbf{D}_\ell\oplus\mathbf{D}^\ell$, где $\mathbf{D}^\ell$ — пространство, ортогональное к пространству $\mathbf{D}_\ell$. Пусть $P:\mathbf{D}\to\mathbf{D}_\ell$ — ортогональный проектор на пространство $\mathbf{D}_\ell$, определяемый равенством $P=I-\ell^*(\ell\ell^*)^{-1}\ell$ (I — единичный оператор). Тогда $\overline{P}=I-P=\ell^*(\ell\ell^*)^{-1}\ell$ — ортогональный проектор на пространство $\mathbf{D}^\ell$. Пространство $\mathbf{D}^\ell$ является ядром оператора P и совпадает с множеством

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01278, 96-15-96195) и Конкурсного центра по исследованиям в области фундаментального естествознания, Санкт-Петербург.

значений оператора $\ell^* : \mathbf{R}^k \to \mathbf{D}$, сопряженного к вектор-функционалу ℓ. Отсюда, в частности, следует, что это пространство конечномерно и его размерность равна k.

Теорема 2. *Точка $x_0 \in \mathbf{D}$ является решением задачи (2) тогда и только тогда, когда*

$$Ux_0 - f \in \mathbf{D}^\ell, \quad \ell x_0 = \alpha,$$

и оператор U положительно определен на пространстве $\mathbf{D}_\ell$. Если оператор U строго положительно определен на пространстве $\mathbf{D}_\ell$, то задача (2) имеет не более одного решения. Если оператор U сильно положительно определен на пространстве $\mathbf{D}_\ell$, то задача (2) имеет единственное решение $x_0 = PU_\ell^{-1}Pf + (I - PU_\ell^{-1}PU)\ell^*(\ell\ell^*)^{-1}\alpha$, где $U_\ell = PU : \mathbf{D}_\ell \to \mathbf{D}_\ell$ — сужение оператора U на подпространство $\mathbf{D}_\ell$.

В некоторых случаях установить положительную определенность оператора U на пространстве $\mathbf{D}_\ell$ можно с помощью того факта, что для любого положительно определенного оператора $A : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ однозначно определяется такой положительно определенный оператор $\sqrt{A} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, что $(\sqrt{A})^2 = A$ ([6], с. 246).

Теорема 3. *Пусть оператор U представим в виде $U = A^{-1} - K$, где самосопряженный оператор A обратим и сильно положительно определен. Если все точки спектра оператора $K_1 = \sqrt{A}PKP\sqrt{A}$ не превосходят единицы, то оператор PUP положительно определен. Если операторы PUP и $A^{-1} - PA^{-1}P$ положительно определены, то все точки спектра оператора K_1 не превосходят единицы.*

Следствие 1. Если $\|PKPA\| \le 1$, то оператор PUP положительно определен.

Следствие 2. Пусть $U = I - K$. Тогда оператор PUP положительно определен тогда и только тогда, когда все точки спектра оператора PKP не превосходят единицы.

Включение

$$Ux - f \in \mathbf{D}^\ell \tag{3}$$

эквивалентно уравнению $P(Ux - f) = 0$. Это уравнение удобнее записывать в другом виде. Пусть $\mathbf{B}$ — некоторое гильбертово пространство и $W : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ — оператор, множество значений которого совпадает с ядром функционала ℓ, т. е. с пространством $\mathbf{D}_\ell$. Тогда $\ker W^* = \mathbf{D}^\ell$ и включение (3) эквивалентно уравнению

$$W^*(Ux - f) = 0. \tag{4}$$

Уравнения вида (4) составляют множество "уравнений Эйлера" задачи (2). При этом положительная определенность оператора $PUP : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ эквивалентна положительной определенности оператора $W^*UW : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$.

Обозначим через $\mathbf{L}[a,b]$ пространство функций $x : [a,b] \to \mathbf{R}$, суммируемых на $[a,b]$, с нормой $\|x\| = \int\limits_a^b |x(t)|\,dt$, через $\mathbf{L}_2[a,b]$ обозначим гильбертово пространство функций $x : [a,b] \to \mathbf{R}$, суммируемых с квадратом на $[a,b]$, со скалярным произведением $\langle x,y \rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt$ и через $\mathbf{W}_2^{(n)}[a,b]$ обозначим пространство таких n раз дифференцируемых функций, что $x^{(n)} \in \mathbf{L}_2[a,b]$, и со скалярным произведением

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} x^{(i)}(a)y^{(i)}(a) + \int\limits_a^b x^{(n)}(t)y^{(n)}(t)\,dt.$$

Рассмотрим классическую вариационную задачу

$$\frac{1}{2}\int_a^b (\dot{x}^2(t) - p(t)x^2(t) - 2g(t)\dot{x}(t))\,dt \longrightarrow \inf, \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta, \tag{5}$$

где $x \in \mathbf{W}_2^{(1)}[a,b]$, $p \in \mathbf{L}[a,b]$, $g \in \mathbf{L}_2[a,b]$, α, $\beta \in \mathbf{R}$. Задача (5) запишется в виде (2), если положить

$$(Ux)(t) = x(t) - x(a) - \int_a^b p(s)x(s)\,ds - \int_a^t \int_s^b p(\tau)x(\tau)\,d\tau ds, \quad f(t) = \int_a^t g(s)\,ds.$$

Здесь $\ell x = (x(a), x(b))$, $\ell^*(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 + (1 + t - a)\gamma_2$, проектор на пространство $\mathbf{D}_\ell$ определен равенством

$$(Px)(t) = x(t) - x(a) - (x(b) - x(a))\frac{t-a}{b-a},$$

пространство $\mathbf{D}^\ell$ двумерно и состоит из линейных функций вида $c_1 + c_2 t$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Отметим, что условия однозначной разрешимости и неотрицательности функции Грина двухточечной краевой задачи $(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ddot{x}(t) + p(t)x(t) = z(t)$, $x(a) = x(b) = 0$, обеспечивающие справедливость соответствующей теоремы о дифференциальном неравенстве, привлекали внимание многих математиков. В работе [7] была доказана эквивалентность следующих утверждений:

а) существует такая функция $v \in \mathbf{W}_2^{(2)}[a,b]$, что на $[a,b]$ выполняются неравенства $v(t) \geq 0$, $(\mathcal{L}v)(t) \leq 0$ и $v(a) + v(b) - \int\limits_a^b (\mathcal{L}v)(t)\,dt > 0$;

б) любое нетривиальное решение уравнения $\mathcal{L}x = 0$ имеет на $[a,b]$ не более одного нуля;

в) функция Коши $C(t,s)$ уравнения $\mathcal{L}x = 0$ положительна при $a \leq s < t \leq b$;

г) краевая задача $\mathcal{L}x = z$, $x(a) = x(b) = 0$ однозначно разрешима в пространстве $\mathbf{W}_2^{(2)}[a,b]$, причем ее функция Грина $G(t,s)$ отрицательна при $t, s \in (a,b)$;

д) спектральный радиус оператора $(Wx)(t) = -\int\limits_s^b (G^-(t,s)p(s) + x(s))\,ds$, где G^- — функция Грина краевой задачи $\ddot{\xi}(t) - p^-(t)\xi(t) = f(t)$, $\xi(a) = \xi(b) = 0$ и $p(t) = p^+(t) - p^-(t)$, $p^+(t) \geq 0$, $p^-(t) \geq 0$, меньше единицы.

Оказывается, что эти условия эквивалентны требованию однозначной разрешимости задачи (5).

Теорема 4. *Утверждения* а)–д) *эквивалентны утверждениям*

1) *вариационная задача* (5) *однозначно разрешима при всех* $g \in \mathbf{L}_2[a,b]$, α, $\beta \in \mathbf{R}$;

2) *все собственные значения оператора* $(Ky)(t) = -\int\limits_a^b G_0(t,s)p(s)y(s)\,ds$, $K : \mathbf{C}[a,b] \to \mathbf{C}[a,b]$, *где* G_0 — *функция Грина краевой задачи* $\ddot{y} = z$, $y(a) = y(b) = 0$, *принадлежат промежутку* $(-\infty, 1)$;

3) *решение задачи Коши* $\mathcal{L}x = 0$, $x(a) = 0$, $\dot{x}(a) = 1$ *положительно на* $(a,b]$.

Пусть пространство $\mathbf{D}$ изоморфно прямому произведению пространств $\mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$, изоморфизм $\mathcal{J} = \mathbf{D} \to \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$ задается равенством $z = \delta x$, $\beta = rx$, и $\mathcal{J}^{-1}(z,\beta) = \Lambda z + Y\beta$, где $\Lambda : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $Y : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^n$, $\delta : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$, $r : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^n$.

Задача

$$\sum_{i=1}^m \langle T_i x, T^i x\rangle + \langle T_0 x, g\rangle \longrightarrow \inf, \quad \ell x = \alpha, \tag{6}$$

где T_i, $T^i : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$, $i = 0, \dots, m$, — линейные ограниченные операторы, изучалась в [2], [3]. Она запишется в виде (2), если положить $U = \sum\limits_{i=1}^m (T_i^* T^i + T^{i*} T_i)$, $f = -T_0^* g$.

Если оператор $W : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ действует на ядро функционала ℓ, то уравнение $\mathcal{L}x = \varphi$, где $\mathcal{L} = W^*U = \sum\limits_{i=1}^m (Q_i^* T^i + Q^{i*} T_i)$, $\varphi = W^* f = -Q_0 g$, $Q_i = WT_i : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, $Q^i = WT^i : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, назовем (следуя [2]) уравнением Эйлера задачи (6). Положительная определенность оператора PUP эквивалентна положительной определенности оператора $H = \sum_{i=1}^{m} (Q_i^* Q^i + Q^{i*} Q_i)$.

Методы построения оператора W, существенно зависящие от соотношения между n и k, предлагались в [2], [3].

Отметим, что любую квадратичную задачу (6) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(\langle \delta x, Q\delta x + Arx\rangle + \langle A^*\delta x + qrx, rx\rangle) - \langle \delta x, \varphi\rangle - \langle rx, \psi\rangle \longrightarrow \inf, \quad \Phi\delta x + \Psi rx = \alpha, \tag{7}$$

где линейные самосопряженные операторы $Q : \mathbf{B} \to \mathbf{Q}$, $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ограничены, операторы $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{B}$, $\Phi : \mathbf{B} \to \mathbf{R}^k$, $\Psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ линейные, $\varphi \in \mathbf{B}$, $\psi \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}^k$. Задачу (7) можно также записать в матричном виде

$$\frac{1}{2}\langle \mathcal{J}x, \mathcal{U}\mathcal{J}x\rangle + \langle \mathcal{J}x, F\rangle \longrightarrow \inf, \quad \langle L, \mathcal{J}x\rangle = \alpha,$$

где $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} Q & A \\ A^* & q \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}$. Здесь $U = \delta^* Q\delta + r^* A\delta + \delta^* A^* r + r^* qr = \mathcal{J}^* \mathcal{U}\mathcal{J}$, $f = \delta^*\varphi + r^*\psi = \mathcal{J}^* F$, $\ell = \Phi\delta + \Psi r = L\mathcal{J}$. Следовательно, точка $x_0 \in \mathbf{D}$ является решением задачи (7), если при некотором $c \in \mathbf{R}^k$

$$\mathcal{L}x_0 = \varphi + \Phi^* c, \quad \ell_0 x_0 = \psi + \Psi^* c, \quad \ell x_0 = \alpha,$$

где $\mathcal{L} = Q\delta + Ar$, $\ell_0 = A^*\delta + qr$ и оператор PUP положительно определен. В частности, если матрица Ψ обратима (регулярный случай [3]), то, полагая $W = \Lambda - Y\Psi^{-1}\Phi$, получим, что точка $x_0 \in \mathbf{D}$ является решением задачи (7) тогда и только тогда, когда

$$(\mathcal{L} - \Phi\Psi^{*-1}\ell_0)x_0 = \varphi - \Phi\Psi^{*-1}\psi, \quad \ell x_0 = \alpha,$$

и оператор $H = Q - A^*\Psi^{-1}\Phi - \Phi^*\Psi^{*-1}A + \Phi^*\Psi^{*-1}q\Psi^{-1}\Phi$ положительно определен.

Литература

1. Драхлин М.Е., Макагонова М.А. *Функционально–дифференциальные уравнения Эйлера* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1987. – С. 12–18.
2. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications.* – Tbilisi, 1996. – V. 8. – 101 с.
3. Груздев А.А. *О редукции экстремальных задач к линейным уравнениям в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 36–42.
4. Груздев А.А., Гусаренко С.А. *О редукции вариационных задач к экстремальным задачам без ограничений* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 39–50.
5. Гусаренко С.А. *О вариационных задачах с линейными ограничениями* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 30–44.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* – М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.
7. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *О дифференциальном неравенстве Валле-Пуссена* // Дифференц. уравнения. – 1986. – №12. – С. 2041–2045.

Пермский государственный университет

Поступила
24.05.1999