ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.968

З.Б. ЦАЛЮК

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Асимптотическая структура резольвенты $R(t)$ уравнения

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t) \tag{1}$$

изучалась многими авторами (напр., [1]–[8]). Пусть $K \in L_1$. Обозначим через $\widehat{U}(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}U(t)dt$ преобразование Лапласа функции U. Так как $\widehat{R} = \frac{\widehat{K}}{1-\widehat{K}}$, то структура R существенно связана с нулями функции $\widehat{K}(z) - 1$ в правой полуплоскости. Если $\widehat{K}(z) - 1 \neq 0$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$, то $R \in L_1$ по теореме Винера [1]. Если $\widehat{K}(z) - 1$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ имеет конечное число нулей λ_r целой кратности m_r, то, как следует из теории вычетов, характер поведения R тесно связан с квазимногочленом $Q(t) = \sum e^{\lambda_r t}P_{m_r-1}(t)$, где $P_q(t)$ — многочлен степени не выше q.

В [2]–[5] функция R представлялась в форме $R = R_0 + Q$, $R_0 \in L_1$. В [6], [7] было предложено представление $R = R_0 + Q + Q * R_0$ или $R = R_0 + Q * R_0$, где $R_0 \in L_1$, а

$$Q * R_0(t) = \int_0^t Q(t-s)R_0(s)ds.$$

Отметим, что отсюда получается и представление $R = Q + R_0$.

Так как функция $K(z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z > 0$, то в этой области функция $\widehat{K}(z) - 1$ может иметь нули лишь целой кратности. Однако на мнимой оси возможны нули и не целой кратности. В [8] для $K \geq 0$ и $\widehat{K}(z) - 1 = z^\beta\psi(z)$, $\psi(0) \neq 0$, $\beta \in (0,1)$, была получена асимптотика $\int\limits_0^t R(s)ds \sim ct^\beta$.

Данная работа посвящена выяснению структуры резольвенты в общем случае конечного числа нулей произвольной кратности. Основным условием во всех цитируемых работах является требование $t^pK \in L_1$ при некотором целом p. Если $\widehat{K}(z) - 1$ имеет на мнимой оси корень $i\gamma$ кратности $m > 0$, то такое условие представляется естественным, т. к. в этом случае существует $\widehat{K}^{(l)}(i\gamma) = \lim\limits_{z\to i\gamma} \widehat{K}^{(l)}(z)$, l — целая часть числа m, а $\widehat{K}^{(l)}(z)$ — преобразование Лапласа t^lK. Заметим, что если $m < p$, то согласно формуле Тейлора m целое. Таким образом, m может быть не целым лишь в случае $t^pK \in L_1$, $t^{p+1}K \notin L_1$, причем $m = p + \alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Всюду далее через $P_r(t)$ обозначается многочлен степени, не превышающей r. Считаем $P_{-1}(t) = 0$ и $\sum\limits_1^0 = 0$.

Теорема. *Пусть уравнение* $\widehat{K}(z) = 1$ *имеет при* $\operatorname{Re} z \geq 0$ *нули* $\lambda_1 = i\gamma_1, \dots, \lambda_k = i\gamma_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ *кратности* $m_1+\alpha_1, \dots, m_k+\alpha_k, m_{k+1}, \dots, m_n$ *соответственно, где* $m_j \geq 0$ *целые,* $\alpha_j \in (0,1)$, *причем* $m_1 = m_2 = \dots = m_k = p = \max\limits_{\operatorname{Re}\lambda_j = 0} m_j$. *Пусть далее* $t^pK \in L_1$ *и*

$$(t+1)^{p-1+\alpha_j} - (t+1)^{p-1+\alpha_j} * e^{-i\gamma_j t}K(t) \in L_1. \tag{2}$$

Тогда $R(t)=R_1(t)+Q+Q*R_2(t)=R_3+Q*R_4$, *где*

$$Q(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{i\gamma_j t}t^{\alpha_j-1}P_p(t)+\sum_{j=1}^{n}P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_j t},\quad R_l\in L_1.$$

Если, кроме того, $K(t)\to 0$ *при* $t\to\infty$, *то и* $R_l\to 0$ *при* $t\to\infty$.

Доказательство. Если $U\in L_1(0,a)$ при любом a, то через $\widetilde{U}$ обозначим действующий в $C[0,\infty)$ оператор свертки, т. е. оператор, определяемый равенством $(\widetilde{U}x)(t)=\int\limits_0^t U(t-s)x(s)ds$, а через I — тождественный оператор. Положим $Q_j(t)=ce^{\lambda_j t}$, $j=1,\dots,n$, $c>\max\operatorname{Re}\lambda_j$, $Q_0(t)=c\sum\limits_{j=1}^{k}t^{\alpha_j-1}e^{i\gamma_j t}$, где число c достаточно мало и будет уточнено далее.

Определим ядро K_0 равенством $I-\widetilde{K_0}=(I-\widetilde{K})\prod\limits_{j=1}^{n}(I+\widetilde{Q}_j)^{m_j}$, а ядро K_1 равенством $I-\widetilde{K_1}=(I-\widetilde{K_0})(I+\widetilde{Q}_0)$. Покажем, что $K_1\in L_1(0,\infty)$ и $1-\widehat{K_1}(z)\neq 0$ при $\operatorname{Re}z\geq 0$. Справедливы соотношения ($r<m_j$)

$$\int_t^\infty e^{\lambda(t-\tau)}\int_\tau^\infty K(s)(\tau-s)^r e^{\lambda_j(\tau-s)}ds\,d\tau=$$

$$=\begin{cases}P_0\int_t^\infty K(s)(t-s)^{r+1}e^{\lambda_j(t-s)}ds, & \text{если }\ \lambda=\lambda_j;\\ \int_t^\infty K(s)[P_r(t-s)e^{\lambda_j(t-s)}+P_0e^{\lambda(t-s)}]ds, & \text{если }\ \lambda\neq\lambda_j,\end{cases}$$

и

$$\int_0^\infty\int_t^\infty|K(s)|(s-t)^r e^{-\operatorname{Re}\lambda_j(s-t)}ds\,dt\leq\int_0^\infty|K(s)|(C_0+C_1s^p)ds<\infty.$$

Используя эти соотношения, равенства $\widehat{K}(\lambda_j)=1$, $\widehat{K}^{(r)}(\lambda_j)=0$, $1\leq r<m_j$, и индукцию при последовательном умножении на операторы $I+\widetilde{Q}_j$, легко показать

$$K_0(t)=K(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_t^\infty K(s)P_{m_j-1}(t-s)e^{\lambda_j(t-s)}ds\quad\text{и}\quad K_0\in L_1.$$

По условию

$$1-\widehat{K}(z)=\prod_{j=1}^{k}(z-i\gamma_j)^{m_j+\alpha_j}\prod_{j>k}(z-\lambda_j)^{m_j}w(z),$$

где $w(z)\neq 0$ при $\operatorname{Re}z\geq 0$. Так как

$$1+\widehat{Q}_j(z)=1+\frac{c}{z-\lambda_j}=\frac{z-\lambda_j+c}{z-\lambda_j}$$

и $z-\lambda_j+c\neq 0$ при $\operatorname{Re}z\geq 0$, то $1-\widehat{K_0}(z)=\prod\limits_{j=1}^{k}(z-i\gamma_j)^{\alpha_j}w_0(z)$, где $w_0(z)\neq 0$ при $\operatorname{Re}z\geq 0$. Отсюда, в частности, следует

$$\int_0^\infty e^{-i\gamma_j t}K_0(t)dt=\widehat{K_0}(i\gamma_j)=1.$$

Из равенства $I-\widetilde{K_1}=(I-\widetilde{K_0})(I+\widetilde{Q}_0)$ получаем $K_1(t)=K_0(t)-[Q_0(t)-K_0*Q_0(t)]$. Поэтому $K_1\in L_1$, если

$$U_j(t)=\frac{e^{i\gamma_j t}}{t^{1-\alpha_j}}-K_0*\frac{e^{i\gamma_j t}}{t^{1-\alpha_j}}\in L_1.$$

Обозначим $\varphi_j(t) = \int\limits_t^\infty K_0(s) e^{-i\gamma_j s} ds$. Так как

$$U_j(t+1) = e^{i\gamma_j(t+1)}\Big[\frac{1}{(t+1)^{1-\alpha_j}} - \int_0^t \frac{K_0(s)e^{-i\gamma_j s}}{(t-s+1)^{1-\alpha_j}} ds\Big] + \\ + \int_t^{t+1} \frac{K_0(s) e^{i\gamma_j(t-s+1)}}{(t-s+1)^{1-\alpha_j}} ds = e^{i\gamma_j(t+1)}\Big[\varphi_j(t) - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * \varphi_j(t)\Big] + U(t),$$

где $U \in L_1$, то $U_j \in L_1$, если $\varphi_j - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * \varphi_j \in L_1$. Но

$$\varphi_j(t) = c\int_t^\infty e^{-i\gamma_j s} K(s) ds - \sum_{l \neq j} \int_t^\infty e^{-i\gamma_j s} K(s) P_{m_l - 1}(t-s) e^{(\lambda_l - i\gamma_j)(t-s)} ds - \\ - \int_t^\infty e^{-i\gamma_j s} K(s) P_p(t-s) ds.$$

Как было отмечено выше, $\sum\limits_{l\neq j} \in L_1$ и, если $p > 0$,

$$\int_t^\infty e^{-i\gamma_j s} K(s) P_{p-1}(t-s) ds \in L_1 \quad \text{и} \quad \int_t^\infty e^{i\gamma_j s} K(s) ds \in L_1.$$

Таким образом,

$$\varphi_j(t) = c\int_t^\infty (s-t)^p e^{-i\gamma_j s} K(s) ds + U(t) = c\psi_j(t) + U(t),$$

где $U \in L_1$. Так как $\widehat{K}(i\gamma_j) = 1$, $\widehat{K}^{(l)}(i\gamma_j) = 0$, $l = 1, \ldots, p$, то $\psi(0) = \cdots = \psi^{(p-1)}(0) = 0$, $\psi^{(p)}(0) = p!$ Используя эти равенства, интегрированием по частям найдем

$$\psi_j(t) - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * \psi_j = c[(t+1)^{p-1+\alpha_j} - (t+1)^{p-1+\alpha_j} * e^{-i\gamma_j t} K(t)] + \sum_{k=0}^{p-1} c_k \int_t^\infty (s-t)^k e^{-i\gamma_j s} K(s) ds.$$

По условию $t^p K \in L_1$. Поэтому $\int\limits_t^\infty (s-t)^k e^{-i\gamma_j s} K(s) ds \in L_1$. Следовательно, $\psi_j - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * \psi_j \in L_1$ и

$$\varphi_j - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * \varphi_j = c\Big(\psi_j - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * \psi_j\Big) + \Big(U - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * U\Big) \in L_1.$$

Итак, $K_1 \in L_1$. Покажем, что $1 - \widehat{K_1}(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Имеем

$$1 - \widehat{K_1}(z) = (1 - \widehat{K_0}(z))(1 + \hat{Q}_0(z)) = \prod_{j=1}^k (z - i\gamma_j)^{\alpha_j} w_0(z)\Big[1 + c\sum_{j=1}^k \frac{\Gamma(\alpha_j)}{(z - i\gamma_j)^{\alpha_j}}\Big] = w_0(z) w_1(t).$$

Покажем также, что $w_1(z) \neq 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Обозначим $B_j(c) = \{z : |z - i\gamma_j| \leq c,\ \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Если $z \notin \cup B_j(c)$, то

$$|w_1(z)| \geq \prod_j |z - i\gamma_j|^{\alpha_j}\Big[1 - c\sum_j \frac{\Gamma(\alpha_j)}{|z - i\gamma_j|^{\alpha_j}}\Big] \geq c^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}\Big[1 - \sum_j \Gamma(\alpha_j) c^{1-\alpha_j}\Big] > 0,$$

если c достаточно мало. Пусть $z \in B_1(c)$. Обозначим

$$f(z) = \prod_{j=1}^k (z - i\gamma_j)^{\alpha_j} + c\Gamma(\alpha_1)\prod_{j=2}^k (z - i\gamma_j)^{\alpha_j}, \quad g(z) = c\sum_{j=2}^k \Gamma(\alpha_j)\prod_{l\neq j}(z - i\gamma_l)^{\alpha_l}.$$

Так как $|\arg(z-i\gamma_1)| \le \pi/2$, то $|\arg(z-i\gamma_1)^{\alpha_1}| < \pi/2$. Следовательно, $\operatorname{Re}(z-i\gamma_1)^{\alpha_1} \ge 0$ и $|(z-i\gamma_1)^{\alpha_1} + c\Gamma(\alpha_1)| \ge c\Gamma(\alpha_1)$. Поэтому при $c < \frac{1}{2}\min\limits_{j\ne l}|\gamma_j-\gamma_l| = d$ имеем

$$|f(z)| = \prod_{j=2}^{k} |z-i\gamma_j|^{\alpha_j} |(z-i\gamma_1)^{\alpha_1} + c\Gamma(\alpha_1)| \ge d^{\alpha_2+\dots+\alpha_k}\Gamma(\alpha_1)c,$$

$$|g(z)| = c|z-i\gamma_1|^{\alpha_1}\left|\sum_{j=2}^{k}\Gamma(\alpha_j)\prod_{l\ne j,1}(z-i\gamma_l)^{\alpha_l}\right| \le Mc^{1+\alpha_1}.$$

Следовательно, для $z \in B_1(c)$ при достаточно малом c

$$|w_1(z)| \ge |f(z)| - |g(z)| \ge d^{\alpha_2+\dots+\alpha_k}\Gamma(\alpha_1)c - Mc^{1+\alpha_1} > 0.$$

Аналогично доказывается, что $|w_1(z)| > 0$ при $z \in B_j(c)$. Таким образом, $w_1(z) \ne 0$ при $\operatorname{Re} z \ge 0$, а значит, и $1 - \widehat{K}_1(z) \ne 0$ при $\operatorname{Re} z \ge 0$.

Положим $I + \widetilde{D}_0 = \prod\limits_{j=1}^{n}(I+\widetilde{Q}_j)^{m_j}$ и $I + \widetilde{D}_1 = (I+\widetilde{D}_0)(I+\widetilde{Q}_0)$. Ядро оператора $\widetilde{D}_0$ есть сумма сверток всевозможных ядер Q_j, и легко подсчитать, что $D_0(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_j t}$. Интегрированием по частям получим

$$\int_0^t \frac{e^{\lambda(t-s)}(t-s)^r e^{i\gamma s}}{s^{1-\alpha}}ds = \begin{cases} e^{\lambda t}P_r(t) + ce^{i\gamma t}t^{\alpha-1} + U(t), \text{ где } U \in L_1 \cap C_0, & \text{если } \lambda \ne i\gamma; \\ ce^{i\gamma t}t^{r+\alpha}, & \text{если } \lambda = i\gamma, \end{cases}$$

где C_0 — пространство непрерывных функций x, имеющих $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Следовательно,

$$D_1(t) = D_0 + Q_0 + D_0 * Q_0(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{i\gamma_j t}t^{\alpha_j-1}P_p(t) + \sum_{j=1}^{n} P_{m_j-1}(t)e^{\lambda_j t} + v(t) = Q + v,$$

где $v \in L_1$ и $v \to 0$ при $t \to \infty$. Пусть R_1 — резольвента ядра K_1. Так как $K_1 \in L_1$ и $1 - \widehat{K_1}(z) \ne 0$ при $\operatorname{Re} z \ge 0$, то по теореме Винера [1] $R_1 \in L_1$. Из $I - \widetilde{K_1} = (I - \widetilde{K})(I + \widetilde{D}_1)$ следует $I + \widetilde{R} = (I+\widetilde{D}_1)(I+R_1)$ и, значит, $R = D_1 + R_1 + D_1 * R_1 = R_1 + v + v * R_1 + Q + Q * R_1 = R_2 + Q + Q * R_1$, где $R_2 = R_1 + v + v * R_1 \in L_1$, т. к. $v, R_1 \in L_1$. Кроме того, если $K \in C_0$, то $K_0 \in C_0$, а т. к. $Q_0 \in C_0$, $K_0 \in L_1$, то и $K_1 = K_0 - Q_0 + K_0 * Q_0 \in C_0$. Но $R_1 = K_1 + R_1 * K_1$ и $R_1 \in L_1$, поэтому $R_1 * K_1 \in C_0$ и $R_1 \in C_0$. Следовательно, и $R_2 \in C_0$.

Второе представление R получим следующим образом. Определим ядро $R_0(t)$ равенством $\widetilde{R} = (I + \widetilde{D}_1)\widetilde{R}_0$. Из $\widetilde{K} = (I - \widetilde{K})\widetilde{R} = (I - \widetilde{K}_1)\widetilde{R}_0$ следует $\widetilde{R}_0 = (I + \widetilde{R}_1)\widetilde{K}$ и, значит, $R_0 \in L_1$. Таким образом, $R(t) = R_0(t) + D_1 * R_0(t) = R_0(t) + v * R_0(t) + Q * R_0(t)$. Кроме того, если $K \in C_0$, то и $R_0 \in C_0$, а т. к. $R_0 \in L_1$ и $v \in C_0$, то $R_0 + v * R_0 \in C_0$. □

Замечание. Как следует из доказательства, условие (2) может быть заменено на условие

$$\psi_j(t) - \frac{1-\alpha_j}{(t+1)^{2-\alpha_j}} * \psi_j \in L_1,$$

где $\psi_j(t) = \int\limits_t^\infty (s-t)^p e^{-i\gamma_j s}K(s)ds$.

Если $k = 0$, т. е. все корни целой кратности, то условие (2) отсутствует. Поэтому возникает вопрос: насколько оно необходимо, если $k \ne 0$. Для простоты рассмотрим случай $k = n = 1$, $m = 0$. При действительном ядре $K \in L_1$ это означает, что $\widehat{K}(z) - 1 = z^\alpha\psi(z)$, где $\psi(z) \ne 0$ при $\operatorname{Re} z \ge 0$. Тогда условие (2) принимает вид

$$\frac{1}{(t+1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t+1)^{1-\alpha}} * K \in L_1, \tag{3}$$

а резольвента представима в форме

$$R = R_1 + \frac{c}{t^{1-\alpha}} + \frac{c}{t^{1-\alpha}} * R_1, \quad \text{где} \quad R_1 \in L_1. \tag{4}$$

Покажем, что если справедливо представление (4), то выполнено и условие (3). Действительно, легко проверить, что если выполнено (4), то R_1 — резольвента ядра $K_1 = K - \frac{c}{t^{1-\alpha}} + K * \frac{c}{t^{1-\alpha}}$. Из равенства $R_1 = K_1 + K_1 * R_1$ следует $(1 + \widehat{R}_1)(1 - \widehat{K_1}) = 1$. Так как

$$1 - \widehat{K_1} = (1 - \widehat{K})(1 + \widehat{ct}^{\alpha-1}) = -z^\alpha \psi(z) \frac{z^\alpha + c\Gamma(\alpha)}{z^\alpha} \neq \infty$$

при $\operatorname{Re} z \geq 0$, то $1 + \widehat{R}_1(z) \neq 0$ в правой полуплоскости. По теореме Пэли–Винера [1] $-K_1 \in L_1$ как резольвента ядра $-R_1$. По условию $K \in L_1$, следовательно, $U(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}} - K * \frac{1}{t^{1-\alpha}} \in L_1$. Осталось заметить, что

$$\frac{1}{(t+1)^{1-\alpha}} - K * \frac{1}{(t+1)^{1-\alpha}} = U(t+1) - \int_t^{t+1} \frac{K(s)}{(t-s+1)^{1-\alpha}} ds$$

и

$$\int_t^{t+1} \frac{K(s)}{(t-s+1)^{1-\alpha}} ds \in L_1.$$

Следствие. Пусть $\widehat{K}(z) - 1 = z^{p+\alpha}\psi(z)$, $p \geq 0$ целое, $\alpha \in (0,1)$, $\psi(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Пусть, кроме того, $t^p K \in L_1$ и

$$(t+1)^{p-1+\alpha} - (t+1)^{p-1+\alpha} * K \in L_1. \tag{5}$$

Если $f(t) = f_\infty + o(1)$, $t \to \infty$, и $x(t)$ — соответствующее ему решение (1), то

$$x(t) = t^{p+\alpha}(c + o(1)), \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Утверждение вытекает из равенств

$$\begin{aligned} x(t) = f(t) + R * f(t) = f(t) + R_3 * f(t) + P_p(t) t^{\alpha-1} * (R_4 * f(t)) = \\ = C_1 + o(1) + P_p(t) t^{\alpha-1} * (C_2 + o(1)) = ct^{p+\alpha} + o(t^{p+\alpha}). \end{aligned}$$

Теорема Феллера [8] гласит, что

$$\int_0^t R(s) ds = t^\alpha (C_1 + o(1)),$$

если $K \geq 0$,

$$\int_0^\infty K(t) dt = 1, \quad \int_0^t sK(s) ds = t^{1-\alpha}(C + o(1)).$$

Из условий теоремы Феллера легко следует, что $\widehat{K}(z) - 1 = z^\alpha \psi(z)$, так что при дополнительном условии (5) (с $p = 0$) утверждение теоремы вытекает из (6).

Не ясно, является ли условие (5) с $p = 0$ следствием условий теоремы Феллера или в условиях теоремы Феллера для некоторых R отсутствует представление (4).

Литература

1. Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* – М.: Наука, 1964. – 267 с.
2. Smith W.L. *Asymptotic renewel theorems* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1954. – V. 64. – P. 9–48.
3. Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* – М.: Наука, 1971. – 436 с.
4. Дербенев В.А. *Асимптотика решения неустойчивого уравнения восстановления.* – Ред. журн. "Изв. вузов. Математика". – Казань, 1976. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ 01.07.76, № 2460–76.
5. Miller R.K. *Structure of solutions of unstable linear Volterra integrodifferential equations* // J. Different. Equat. – V. 15. – P. 129–157.
6. Дербенев В.А., Цалюк З.Б. *Асимптотика резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – Вып. 1. – С. 88–94.
7. Цалюк З.Б. *Асимптотическое представление резольвенты системы интегро-дифференциальных уравнений* // Понтрягинские чтения. Тез. докл. – Воронеж, 1996. – С. 185.
8. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2. – М.: Мир, 1967. – 751 с.

Кубанский государственный университет

Поступила
10.03.1998