ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.956

А.К. РАТЫНИ

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРОМ СУПЕРПОЗИЦИИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ. I

1. Постановка задачи. Формулировка основных утверждений

1. *Обозначения* (все рассматриваемые величины считаются вещественными). Точку пространства R^n $(n \geq 2)$ обозначим $x = (x_1, \dots, x_n)$; $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, где $x, y \in R^n$; $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; D — ограниченная область в R^n с границей S, $\overline{D} = D \cup S$; $N(x) = N = (N_1, \dots, N_n)$ — единичный вектор внешней относительно D нормали к S в точке x, $P(x^0, r_0) = \{x \in R^n : |x - x^0| \leq r_0\}$, где $r_0 = \mathrm{const} > 0$, x^0 — точка R^n; $S(x^0, r_0) = S \cap P(x^0, r_0)$; σ — однозначное отображение R^n в R^n; $\omega = \sigma S \cap S$; $\rho(x, \omega) = \inf\limits_{\xi\in\omega} |x - \xi|$.

В статье используются гёльдеровы пространства, определенные в ([1], с. 112). Включение $z \in C_\alpha(D)$ означает, в частности, что функция $z(x)$ ограничена в $\overline{D}$ и непрерывна в D по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$; включение $z \in C_{2+\alpha}(D)$ означает, в частности, что $z(x)$ непрерывна в $\overline{D}$ и имеет в D непрерывные по Гёльдеру с показателем α производные $z_{x_i x_j}$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Через I обозначим оператор взятия следа на S от функций, заданных в $\overline{D}$: $(Iz)(x) = z(x)$ при $x \in S$; через A — оператор суперпозиции, т. е. $(Az)(x) = z(\sigma x)$ при $x \in S$.

Определим несколько линейных нормированных пространств, играющих существенную роль в проводимых построениях. Пусть заданы непустое замкнутое множество $e \subset S$ и числа $\mu \in (0, 1)$, $\beta > 0$. Обозначим через $C^{\mu\beta}(S, e)$ пространство, элементами которого являются непрерывные на S функции $\varphi(x)$ такие, что

$$\sup_{x,\xi\in e} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\xi)|}{|x - \xi|^\mu} + \sup_{x\in S\setminus e,\ \xi\in e} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\xi)|}{|x - \xi|^{\mu\beta/2}} + \max_{x\in S} |\varphi(x)| \equiv \varkappa_{\mu\beta}(\varphi) < \infty.$$

За норму φ в этом пространстве примем $\varkappa_{\mu\beta}(\varphi)$ или какую-нибудь норму, эквивалентную $\varkappa_{\mu\beta}$. В случае $e = S$ данное пространство совпадает с обычным пространством Гёльдера $C^\mu(S)$. Через $\overset{0}{C}{}^{\mu\beta}(S, e)$ обозначим подпространство $C^{\mu\beta}(S, e)$, состоящее из функций, равных нулю на e.

Через $C^{\mu\beta}_{2+\alpha}(D, e)$ обозначим пространство, состоящее из таких функций $z \in C_{2+\alpha}(D)$, для которых $Iz, Az \in C^{\mu\beta}(S, e)$; норма в этом пространстве определяется как сумма соответствующих норм z, Iz, Az. Через $\overset{0}{C}{}^{\mu\beta}_{2+\alpha}(D, e)$ обозначим подпространство $C^{\mu\beta}_{2+\alpha}(D, e)$, состоящее из тех его элементов $z(x)$, для которых $Iz, Az \in \overset{0}{C}{}^{\mu\beta}(S, e)$.

2. *Постановка задачи. Формулировка теорем.*

В статье изучается связь (классической) разрешимости задачи

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

$$Bu \equiv u(x) - u(\sigma x) = \psi(x), \quad x \in S, \tag{2}$$

с разрешимостью уравнения

$$\eta(x) - \eta(\sigma x) = \psi(x), \quad x \in \omega, \tag{3}$$

в предположении, что $\sigma S \subset \overline{D}$, $\omega \neq \emptyset$. В случае $\sigma S \subset S$ этот вопрос, причем для задачи более общей, чем (1), (2), исследован весьма полно (см. [2], [3] и приведенную там библиографию). Для случая же $\sigma S \cap D \neq \emptyset$ автору неизвестны работы по данной проблеме. Имеется достаточно много публикаций, в которых изучается при $\omega \neq \emptyset$ разрешимость в различных классах функций задачи (1), (2) и ее обобщений (см., напр., [4]–[8] и приведенные там обзоры литературы). Но упомянутая выше связь (1), (2) с (3) в этих исследованиях четко не прослеживается. Цель данной статьи — устранить в какой-то мере указанный пробел.

Перечислим предположения, при которых рассматривается задача (1), (2).

Условия (L): $a_{ij}, b_i, c \in C_\alpha(D)$ $(i,j=\overline{1,n})$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq d|\zeta|^2$ для $x \in \overline{D}$, $\zeta \in R^n$ $(d = \text{const} > 0)$; $c(x) \leq 0$ для $x \in D$; $S \subset C^2$.

Условия (B): отображение σ определено и непрерывно на S, $\sigma S \subset \overline{D}$, $\omega \neq \emptyset$; существуют числа $d_0 > 0$ и $\gamma \in (0,2]$ такие, что

$$|\sigma x - \sigma\xi| \leq d_0|x-\xi|^\gamma, \quad x \in S \setminus \omega, \ \ \xi \in \omega, \tag{4}$$

$$|\sigma x - \sigma\xi| \leq d_0|x-\xi|, \quad x \in \omega, \ \ \xi \in \omega. \tag{5}$$

Условия (V): существуют функция $v(x)$ и положительные числа a, ν, d_1, d_2 такие, что $a < 1$, $v \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, $v(x) > 0$ и $(\mathcal{L}v)(x) \leq -1$ при $x \in D$, $v(\sigma x) \leq av(x)$ при $x \in S$, $d_1\rho^\nu(x,\omega) \leq v(x) \leq d_2\rho^\nu(x,\omega)$ при $x \in S$.

Замечание 1. Из непрерывности σ и компактности S следует компактность множеств σS и ω.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что при выполнении условий (V) верно включение $\sigma\omega \subset \omega$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (L), (B) *и* (V), *причем* $\nu \geq \mu\gamma/2$. *Пусть* $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S,\omega)$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет в* $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$ *единственное решение.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (L), (B) *и* (V), *причем* $\nu \geq \mu\gamma/2$. *Пусть* $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in C^{\mu\gamma}(S,\omega)$. *Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством решений из* $C^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$ *задачи* (1), (2) *и множеством решений из* $C^\mu(\omega)$ *уравнения* (3).

2. Доказательства теорем

1. Нетрудно проверить, что функция $v_1 \equiv d_3 v^{\nu_1}$, где $\nu_1 = \frac{\mu\gamma}{2\nu} \leq 1$, $d_3 = \frac{1}{\nu_1}\max\limits_{x\in\overline{D}}(v(x))^{1-\nu_1} > 0$, удовлетворяет всем требованиям, предъявленным в условиях (V) к функции v, кроме последних двух неравенств. Но для v_1, очевидно, верны оценки

$$d_1'\rho^{\mu\gamma/2}(x,\omega) \leq v_1(x) \leq d_2'\rho^{\mu\gamma/2}(x,\omega), \quad x \in S \tag{6}$$

$(d_1', d_2' = \text{const} > 0)$. Используя (6), легко показать, что пространство $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S,\omega)$ совпадает с пространством $C^{v_1}(S)$, определенным в [7] (точнее, $\varkappa_{\mu\gamma}$ — эквивалентная норма в $C^{v_1}(S)$, а $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$ совпадает с $C^{v_1}_{2+\alpha}(D)$ из [7]). Таким образом, теорема 1 данной статьи является следствием теоремы 1 из [7].

Кстати, восполняя пробел [7], отметим здесь, что $C^{v_1}(S)$ — полное пространство. Это несложно установить традиционными методами.

2. Фиксируем число

$$q \geq \frac{1}{d} \sup_{x\in D} \sum_{i=1}^{n} (|b_i(x)|(\mathcal{D}(D)+1) + a_{ii}(x)), \tag{7}$$

где $\mathcal{D}(D)$ — диаметр D (ясно, что $q \geq n$). Фиксируем положительные числа h, δ, r так, чтобы

$$|\langle x-\xi, N(\xi)\rangle| \leq h|x-\xi|^2, \quad \xi \in S, \ \ x \in S(\xi,\delta); \tag{8}$$

$$P(\xi + rN(\xi), r) \cap \overline{D} = \{\xi\}, \quad \xi \in S. \tag{9}$$

Существование таких чисел следует из принадлежности S классу C^2 ([1], с. 92; [9], с. 251).

Каждой точке $\xi \in S$ поставим в соответствие функцию x (барьер)

$$W(x,\xi) = \frac{1}{r^q} - \frac{1}{|x-y(\xi)|^q}, \quad \text{где} \quad y(\xi) = \xi + rN(\xi). \tag{10}$$

Ясно, что $W \in C^\infty(\overline{D})$ и в силу (9) $W(x;\xi) > 0$ при $x \in \overline{D} \setminus \{\xi\}$.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия* (L). *Пусть числа q, h, δ, r удовлетворяют* (7)–(9). *Тогда существуют положительные постоянные M_0, M_1 и M_2, зависящие от q, h, δ, r, μ и $\mathcal{D}(D)$, такие, что*

$$(\mathcal{L}W^{\mu/2})(x;\xi) \leq -M_0, \qquad x \in D, \ \ \xi \in S; \tag{11}$$

$$W^{\mu/2}(x;\xi) \leq M_1|x-\xi|^{\mu/2}, \quad x \in \overline{D}, \ \ \xi \in S; \tag{12}$$

$$W^{\mu/2}(x;\xi) \geq M_2|x-\xi|^{\mu}, \qquad x \in S, \ \ \xi \in S. \tag{13}$$

Доказательство. Будем считать далее, что

$$r \leq 1, \ \ r < \delta/2, \ \ 1-2rh > 0, \ \ (1-2rh)(q+2)\delta^2 \leq 2r^2. \tag{14}$$

Это не нарушит общности построений. Действительно, если (14) не выполнено, то заменим h, δ, r соответственно на $h_0 = \max\{h, b/(2R)\}$, $r_0 = b/(2h_0)$, $\delta_0 = 3r_0$, где $R = \min\{r, \ \delta/3, \ 1\}$, $b = 1 - 1/(9q+18)$. Для h_0, δ_0, r_0, как нетрудно проверить, соответствующие неравенства из (14) имеют место. Кроме того, очевидно, $h_0 \geq h$, $r_0 \leq r$, $\delta_0 \leq \delta$, а потому (8) и (9) останутся верными, если тройку h, δ, r заменить там на тройку h_0, δ_0, r_0.

Учитывая неравенства (7), $r \leq 1$ (см. (14)) и условия (L), непосредственными вычислениями убеждаемся в справедливости (11). Для доказательства (12) и (13) воспользуемся очевидным равенством

$$|x-y(\xi)|^2 = |x-\xi|^2 - 2r\langle x-\xi, N(\xi)\rangle + r^2, \quad \xi \in S, \ \ x \in \overline{D}.$$

Отсюда следует, во-первых, неравенство

$$|x-y(\xi)|^2 \leq (|x-\xi| + r)^2, \quad \xi \in S, \ \ x \in \overline{D}, \tag{15}$$

а во-вторых (с учетом (8)), неравенство

$$|x-y(\xi)|^2 \geq (1-2rh)|x-\xi|^2 + r^2, \quad \xi \in S, \ \ x \in S(\xi,\delta), \tag{16}$$

где $1 - 2rh > 0$ (см. (14)). Из (10), (15) и формулы Тейлора имеем

$$W(x;\xi) \leq \frac{q}{r^{q+1}}|x-\xi|, \quad \xi \in S, \ \ x \in \overline{D},$$

и, следовательно, (12) установлено. Аналогично, из (10) и (16), учитывая последнее неравенство в (14), получим оценку

$$W(x;\xi) \geq \frac{q(1-2rh)}{4r^{q+2}}|x-\xi|^2, \quad \xi \in S, \ \ x \in S(\xi,\delta). \tag{17}$$

Выберем число $r_1 \in (r, \delta/2)$ (что возможно согласно (14)). Тогда, как нетрудно видеть, $|x - y(\xi)| \geq r_1$ при $|x - \xi| \geq \delta$. Поэтому

$$W(x;\xi) \geq \frac{1}{r^q} - \frac{1}{r_1^q} > 0, \quad \xi \in S, \;\; x \in S \setminus S(\xi, \delta). \tag{18}$$

Из (17) и (18) вытекает (13). $\square$

3. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\mathcal{L}z = g(x) \;\; (x \in D), \quad Iz = \varphi(x) \;\; (x \in S). \tag{19}$$

Предложение 2. *Пусть выполнены условия* (L), (B) *и* $\sigma\omega \subset \omega$. *Пусть* $g \in C_\alpha(D)$, $\varphi \in C^\mu(S)$. *Тогда задача* (19) *имеет в* $C_{2+\alpha}^{\mu\gamma}(D, \omega)$ *единственное решение.*

Доказательство. Выполнение условий (L) гарантирует ([1], с. 113) существование в $C_{2+\alpha}(D)$ единственного решения $Z(x)$ задачи (19). Поскольку $\mu\gamma/2 \leq \mu$, то $IZ \equiv \varphi(x) \in C^{\mu\gamma}(S, \omega)$. Осталось показать, что $AZ \equiv Z(\sigma x) \in C^{\mu\gamma}(S, \omega)$. Фиксируем $\xi \in \omega$ и рассмотрим функцию переменной x

$$Z_0(x;\xi) \equiv Z(x) - Z(\xi) \equiv Z(x) - \varphi(\xi). \tag{20}$$

Ясно, что

$$\mathcal{L}Z_0 = g(x) - c(x)\varphi(\xi) \;\; (x \in D), \quad IZ_0 = \varphi(x) - \varphi(\xi) \;\; (x \in S). \tag{21}$$

Положим

$$M = \max\left\{\frac{1}{M_0}\sup_{x\in D}\left(|g(x)| + |c(x)|\max_{x\in S}|\varphi(x)|, \;\frac{1}{M_2}\|\varphi\|_{C^\mu(S)}\right\}.$$

Из (11) и (13) следует

$$\mathcal{L}(MW^{\mu/2}) \leq -MM_0 \;\; (x \in D), \quad I(MW^{\mu/2}) \geq MM_2|x - \xi|^\mu \;\; (x \in S). \tag{22}$$

Из (21) и (22), учитывая определение M и неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq \|\varphi\|_{C^\mu(S)}|x - \xi|^\mu, \quad x \in S,$$

выводим в силу принципа максимума

$$|Z_0(x;\xi)| \leq MW^{\mu/2}(x;\xi), \quad x \in \overline{D}.$$

Отсюда, вспоминая (12) и (20), получаем

$$|Z(x) - Z(\xi)| \leq MM_1|x - \xi|^{\mu/2}, \quad x \in \overline{D}. \tag{23}$$

При $x, \xi \in \omega$ и $\sigma x, \sigma\xi \in \omega$ (т. к. $\sigma\omega \subset \omega$), а потому

$$|Z(\sigma x) - Z(\sigma\xi)| = |\varphi(\sigma x) - \varphi(\sigma\xi)| \leq \|\varphi\|_{C^\mu(S)}|\sigma x - \sigma\xi|^\mu \leq d_0\|\varphi\|_{C^\mu(S)}|x - \xi|^\mu \tag{24}$$

(последнее неравенство вытекает из (5)). Если $x \in S \setminus \omega$, $\xi \in \omega$, то $\sigma x \in \overline{D}$, $\sigma\xi \in \omega$, и в силу (23), (4) имеем

$$|Z(\sigma x) - Z(\sigma\xi)| \leq MM_1|\sigma x - \sigma\xi|^{\mu/2} \leq MM_1 d_0|x - \xi|^{\mu\gamma/2}. \tag{25}$$

Из (24), (25) следует, что $Z(\sigma x) \in C^{\mu\gamma}(S, \omega)$. $\square$

4. Переходим к завершению доказательства теоремы 2.

Предположим, что уравнение (3) имеет решение $\eta_0(x) \in C^{\mu}(\omega)$. Обозначим через $\eta_1(x)$ функцию из $C^{\mu}(S)$, являющуюся продолжением $\eta_0(x)$. Такое продолжение в силу замкнутости ω (см. замечание 1) существует ([1], с. 82). Согласно предложению 2 найдется функция $\theta(x) \in C^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$, для которой

$$\mathcal{L}\theta = 0 \ \ (x \in D), \quad I\theta = \eta_1(x) \ \ (x \in S).$$

Нетрудно проверить, учитывая вложение $\sigma\omega \subset \omega$ (см. замечание 2), что $\psi(x) - (B\theta)(x) = 0$ при $x \in \omega$ и, таким образом, $(\psi - B\theta) \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S,\omega)$. Поэтому согласно теореме 1 существует такая функция $U(x) \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$, что

$$\mathcal{L}U = f(x) \ \ (x \in D), \quad BU = \psi(x) - (B\theta)(x) \ \ (x \in S).$$

Легко проверить, что принадлежащая $C^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$ функция $U(x) + \theta(x)$ является решением задачи (1), (2), причем $(U(x) + \theta(x))\big|_{\omega} = \eta_0(x)$.

Предположим , что задача (1), (2) имеет решение $u_0(x) \in C^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$. Тогда, очевидно, $u_0(x)|_{\omega}$ — сужение u_0 на ω — решение из $C^{\mu}(\omega)$ уравнения (3).

Осталось показать, что различным решениям u_1, u_2 задачи (1), (2) отвечают различные решения (3). Допустим, это неверно: $(u_1(x) - u_2(x))\big|_{\omega} = 0$. Тогда, как нетрудно видеть, $(u_1 - u_2) \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D,\omega)$, а кроме того, $\mathcal{L}(u_1 - u_2) = 0$ $(x \in D)$, $B(u_1 - u_2) = 0$ $(x \in S)$. Поэтому согласно теореме 1 $u_1 - u_2 = 0$ в $\overline{D}$, а это противоречит исходной посылке (u_1, u_2 — различные решения). $\square$

В заключение отметим, что выполнение условий (L) и условий ($\sigma1$) или ($\sigma2$) из [8] на ω при $\sigma\omega \subset \omega$ гарантирует существование функции $v(x)$, удовлетворяющей перечисленным выше требованиям. Доказывается это с помощью построений, аналогичных проведенным в [8].

Автор искренне благодарен А.В. Чистякову, привлекшему его внимание к этой тематике.

Литература

1. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* – М.: Мир, 1968. – 427 с.
2. Антоневич А.Б. *Линейные функциональные уравнения: операторный подход.* – Минск: Университетское, 1988. – 232 с.
3. Антоневич А.Б. *Краевые задачи с сильной нелокальностью для эллиптических уравнений* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1989. – Т. 53. – № 1. – С. 3–24.
4. Бицадзе А.В. *Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций* // ДАН СССР. – 1985. –Т. 280. – № 3. – С. 521–524.
5. Скубачевский А.Л. *О методе срезающих функций в теории нелокальных задач* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 1. – С. 128–139.
6. Кишкис К.Ю. *К теории нелокальных задач для уравнения Лапласа* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 1. – С. 59–64.
7. Ратыни А.К. *О классической разрешимости одной нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка.* I // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 59–66.
8. Ратыни А.К. *О классической разрешимости одной нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка.* II // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 51–59.
9. Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных.* – М.: Высш. школа, 1977. – 431 с.

Ивановский государственный
химико-технологический
университет

Поступила
30.04.1999