И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 517.938

А.А. МАГАЗЕВ, И.В. ШИРОКОВ

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ В ВАРИАЦИЯХ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ЯКОБИ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Введение

Цель данной статьи — исследование интегрируемости уравнения Якоби на однородных многообразиях с инвариантными римановыми метриками и так называемыми *центральными* или *субмерсными* метриками.

Хорошо известно, что геодезические на римановых многообразиях локально представляют собой кратчайшие расстояния между любыми двумя точками, однако глобально данное свойство может не выполняться. Для дополнительного исследования экстремальных свойств геодезических используют вторую вариацию функционала действия (напр., [1]), что в конечном итоге приводит к варьированию уравнения геодезических. Результатом такой линеаризации является линейное дифференциальное уравнение второго порядка — *уравнение Якоби.* Решениями данного уравнения являются *якобиевы* векторные поля, описывающие отклонения геодезических при малых изменениях начальных условий, а поэтому предоставляющие информацию об устойчивости решений соответствующих геодезических потоков. В частности, исследование решений уравнения Якоби позволяет делать выводы об экспоненциальном или осцилляционном характере поведения близких геодезических на римановых многообразиях, что напрямую связано с топологическими свойствами этих многообразий [2].

Результаты данной статьи можно условно поделить на две части. В первой части работы рассматривается специальная пуассонова структура на касательных расслоениях произвольных пуассоновых многообразий TM (данная структура и ее свойства подробно исследуются, напр., в [3], [4]), с помощью которой далее доказывается гамильтонов характер соответствующих линеаризованных гамильтоновых систем. Вопросы гамильтонизации линеаризованных систем представляют немалый интерес. В этой связи следует упомянуть работу [5], в которой в терминах симплектических связностей были получены критерии гамильтоновости линеаризованных систем в вариациях.

Во второй части данной статьи исследуется интегрируемость уравнения Якоби на римановых многообразиях, в частности, — однородных римановых многообразиях ($M \simeq G/H$, g) с инвариантными метриками и *субмерсными* или *центральными* метриками [6]. При этом рассматривается линеаризованный геодезический поток, включающий в себя исходное уравнение геодезических, а также соответствующее уравнение Якоби, и затем доказывается его гамильтонов характер. Далее строится метод интегрирования в квадратурах уравнения Якоби на однородных пространствах с указанными классами метрик и предлагаются соответствующие критерии интегрируемости. В заключение в качестве простейшего примера осуществляется интегрирование в квадратурах геодезического потока с инвариантной метрикой и соответствующего уравнения Якоби на двумерной плоскости Лобачевского.

Отметим, что изложение параграфов 4 и 5 данной статьи существенно опирается на результаты [7].

2. Гамильтоновы системы в вариациях на пуассоновых многообразиях

Пусть W — гладкое пуассоново многообразие. Скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ задает в пространстве гладких функций $\mathcal{C}^\infty(W)$ структуру бесконечномерной алгебры Ли и является билинейной кососимметрической операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби. Обозначая через $\{z_i\}$, $i=1,\dots,\dim W$, локальные координаты на W, скобку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ представим в виде

$$\{\varphi,\psi\}\equiv\omega(d\varphi,d\psi)=\sum_{i,j}\omega_{ij}(z)\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i}\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_j},\quad \varphi,\psi\in\mathcal{C}^\infty(W),$$

где $\omega_{ij}(z)\equiv\{z_i,z_j\}$ и $\omega_{ij}(z)=-\omega_{ji}(z)$. Таким образом, пуассонова структура на W полностью задается кососимметрическим (в общем случае вырожденным) тензорным полем $\omega_{ij}(z)$.

Пусть $H(z)$ — произвольная гладкая функция из $\mathcal{C}^\infty(W)$ (гамильтониан). Функции $H(z)$ можно поставить в соответствие гамильтонову систему

$$\dot z_i=\{H,z_i\},\quad z_i|_{\,t=0}=z_i^0. \tag{1}$$

Система (1), определяя динамику на пуассоновом многообразии W, реализует некоторую однопараметрическую группу диффеоморфизмов γ_t, которая естественным образом индуцирует динамику в касательном расслоении TW пространства W. Пусть δz_0 — касательный вектор в точке $z_0\in W$. Тогда

$$(\gamma_t)_*:\delta z_0\to\delta z=(\gamma_t)_*\delta z_0,\quad \delta z_0\in T_{z_0}W,\ \delta z\in T_zW. \tag{2}$$

Отображение (2) в локальных координатах представляет собой решение системы

$$\delta\dot z_i=\frac{\partial}{\partial z_k}\{H,z_i\}\delta z_k,\quad \delta z_i|_{\,t=0}=\delta z_i^0, \tag{3}$$

и в линейном приближении описывает возмущение интегральной траектории гамильтоновой системы (1), начальные условия которой изменены на величину δz_0. Система (3) называется *гамильтоновой системой в вариациях.*

Определение 1. Отображение $\delta:\mathcal{C}^\infty(W)\to\mathcal{C}^\infty(TW)$ такое, что $\delta\varphi\equiv\langle d\varphi,\delta z\rangle$, $\delta z\in T_zW$, $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(W)$, будем называть *вариацией*, а функцию $\delta\varphi$ — *вариацией функции* φ.

Очевидно, все вариации линейны на каждом слое $p^{-1}(z)=T_zW$, где p — каноническая проекция $TW\to W$. Отметим также, что функции $\delta\varphi$ можно рассматривать как *лифты* функций φ из W в TW, где сама функция φ играет роль вертикального лифта ([8], с. 150).

Утверждение 1. *На касательном расслоении произвольного пуассонова многообразия W существует индуцированная пуассонова структура $\{\cdot,\cdot\}_T$, которая в локальных координатах $(z_i,\delta z_i)$ имеет вид*

$$\{F,G\}_T=\sum_{i,j}\left(\frac{\partial\omega_{ij}(z)}{\partial z_k}\delta z_k\frac{\partial F}{\partial\delta z_i}\frac{\partial G}{\partial\delta z_j}+\omega_{ij}(z)\frac{\partial F}{\partial\delta z_i}\frac{\partial G}{\partial z_j}+\omega_{ij}(z)\frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial G}{\partial\delta z_j}\right), \tag{4}$$

где $F(z,\delta z),G(z,\delta z)$ — функции из $\mathcal{C}^\infty(TW)$.

Действительно, прямой проверкой можно убедиться, что скобка (4) удовлетворяет правилу Лейбница и тождеству Якоби, что и доказывает данное утверждение. Следуя работам [3], [4], пуассонову структуру $\{\cdot,\cdot\}_T$ можно также рассматривать как порожденную пуассоновым бивекторным полем $\delta\omega$, являющимся полным лифтом пуассонова поля ω с W на TW.

Пусть φ, ψ — произвольные функции из $\mathcal{C}^\infty(W)$, $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ — их соответствующие вариации. Из определения скобки (4) легко вытекает

Утверждение 2. *Индуцированная скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_T$ обладает следующими свойствами:* 1) $\{\varphi,\psi\}_T=0$, 2) $\{\delta\varphi,\psi\}_T=\{\varphi,\delta\psi\}_T=\{\varphi,\psi\}$, 3) $\{\delta\varphi,\delta\psi\}_T=\delta\{\varphi,\psi\}$.

Пуассонова структура $\{\cdot,\cdot\}_T$ позволяет представить гамильтонову систему (1) и соответствующую ей систему в вариациях (3) в виде гамильтоновой системы на TW. Действительно, используя свойства скобки $\{\cdot,\cdot\}_T$, перечисленные в утверждении 2, получаем

$$\dot{z}_i = \{H, z_i\} = \{\delta H, z_i\}_T, \quad \delta\dot{z}_i = \delta\{H, z_i\} = \{\delta H, \delta z_i\}_T. \tag{5}$$

Система (5) является гамильтоновой относительно скобки $\{\cdot,\cdot\}_T$ с гамильтонианом δH, поэтому верна

Теорема 1. *Пусть $H(z)$ — некоторая гладкая функция (гамильтониан) на произвольном пуассоновом многообразии $(W, \{\cdot,\cdot\})$. Гамильтонова система (1) вместе с уравнениями в вариациях (3) представляют собой расширенную гамильтонову систему на пуассоновом многообразии $(TW, \{\cdot,\cdot\}_T)$ с гамильтонианом δH.*

Рассмотрим некоторые примеры индуцированной пуассоновой структуры $\{\cdot,\cdot\}_T$ на TW.

Пример 1 (кокасательное расслоение T^*M). Естественная пуассонова структура на $2m$-мерном кокасательном расслоении $W = T^*M$ задается с помощью симплектической 2-формы $\omega = dp_a \wedge dx^a$, $a = 1, \dots, m$, где $(x^1, \dots, x^m, p_1, \dots, p_m)$ — локальные координаты в T^*M. Скобка Пуассона на T^*M, соответствующая форме ω, определяется фундаментальными скобками

$$\{x^a, x^b\} = \{p_a, p_b\} = 0, \quad \{p_a, x^b\} = \delta_a^b. \tag{6}$$

Введем локальные координаты в слое $T_{(x,p)}(T^*M)$: $(\delta x^1, \dots, \delta x^m, \delta p_1, \dots, \delta p_m)$. Тогда скобка $\{\cdot,\cdot\}_T$ на $T(T^*M)$ имеет ненулевые коммутационные соотношения

$$\{p_a, \delta x^b\} = \{\delta p_a, x^b\} = \delta_a^b. \tag{7}$$

Пример 2 (дуальное пространство алгебры Ли $\mathcal{G}^*$). Пусть $\mathcal{G}$ — n-мерная вещественная алгебра Ли с билинейной кососимметричной операцией $[\cdot,\cdot]$, $W = \mathcal{G}^*$ — дуальное пространство (коалгебра), элементы которого можно рассматривать как линейные функции из $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$. Выберем базис $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, в $\mathcal{G}$ и соответствующий базис в дуальном пространстве $\{e^i\} \subset \mathcal{G}^*$, $\langle e^i, e_j\rangle = \delta^i_j$. На коалгебре $\mathcal{G}^*$ определена вырожденная линейная скобка Пуассона–Ли

$$\{\varphi, \psi\}^{\mathrm{Lie}} = \langle z, [d\varphi(z), d\psi(z)]\,\rangle = C^k_{ij} z_k \frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i}\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_j}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*),$$

с базисными коммутационными соотношениями $\{z_i, z_j\}^{\mathrm{Lie}} = C^k_{ij} z_k$. Здесь C^k_{ij} — структурные константы алгебры $\mathcal{G}$ в выбранном базисе.

Рассмотрим касательное расслоение $T\mathcal{G}^*$ пространства $\mathcal{G}^*$ с координатами $(z_i, \delta z_i)$. Из определения $\{\cdot,\cdot\}_T$ следует, что ее фундаментальные скобки на $T\mathcal{G}^*$ задаются следующими равенствами:

$$\{z_i, z_j\}^{\mathrm{Lie}}_T = 0, \quad \{z_i, \delta z_j\}^{\mathrm{Lie}}_T = \{\delta z_i, z_j\}^{\mathrm{Lie}}_T = C^k_{ij}\, z_k, \quad \{\delta z_i, \delta z_j\}^{\mathrm{Lie}}_T = C^k_{ij}\, \delta z_k.$$

3. Геодезические потоки и уравнение Якоби на римановых многообразиях

Пусть M — гладкое m-мерное риманово многообразие с невырожденной римановой метрикой $g = (g_{ab})$, $\det g_{ab} \neq 0$, $(x^1, \dots, x^m)$, $(p_1, \dots, p_m)$ — локальные координаты на многообразии M и в слое $T^*_x M$ соответственно. С помощью пуассоновой структуры (6) на T^*M уравнение геодезических $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}(x)\dot{x}^b\dot{x}^c = 0$ можно представить в гамильтоновой форме

$$\dot{x}^a = \{H(x,p), x^a\}, \quad \dot{p}_a = \{H(x,p), p_a\}, \tag{8}$$

где $H(x,p) = \frac{1}{2}g^{ab}(x)p_a p_b$ (связность полагаем согласованной с метрикой). Гамильтонову систему (8) называют *геодезическим потоком.*

Пусть $x^a = x^a(t)$ — геодезическая на M, параметризованная натуральным параметром t. Векторное поле $\zeta^a(t) \subset T_{x(t)}M$ вдоль геодезической называется полем Якоби, если оно является решением дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Якоби) ([1], с. 65)

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \zeta^a + R^a_{bcd}\,\dot{x}^b \dot{x}^c \zeta^d = 0, \tag{9}$$

где $\nabla_{\dot{x}}$ — оператор ковариантного дифференцирования вдоль поля $\dot{x}^a$, R^a_{bcd} — компоненты тензора кривизны. Используя естественный изоморфизм пространств T^*M и TM, а также симплектическую структуру $\omega = dp_a \wedge dx^a$, можно показать, что уравнение Якоби (9) эквивалентно следующей гамильтоновой системе в вариациях:

$$\delta\dot{x}^a = \delta\{H(x,p), x^a\}, \quad \delta\dot{p}_a = \delta\{H(x,p), p_a\}, \tag{10}$$

где $\delta x^a \equiv \zeta^a$, $\delta p_a = g_{ab}\dot{\zeta}^b + g_{ab,c}\dot{x}^b\zeta^c$, а зависимость от времени переменных x и p определяется системой (8). Следуя предыдущему параграфу, зададим в пространстве $T(T^*M)$ структуру пуассонового многообразия с ненулевыми фундаментальными скобками Пуассона (7). Согласно теореме 1 геодезический поток (8) вместе с соответствующими уравнениями в вариациях (10) представляет собой расширенную гамильтонову систему

$$\dot{x}^a = \{\delta H(x,p), x^a\}_T, \qquad \dot{p}_a = \{\delta H(x,p), p_a\}_T, \tag{11}$$

$$\delta\dot{x}^a = \{\delta H(x,p), \delta x^a\}_T, \quad \delta\dot{p}_a = \{\delta H(x,p), \delta p_a\}_T, \tag{12}$$

с гамильтонианом $\delta H(x,p) = \frac{1}{2} g^{ab}_{\ ,c}\,\delta x^c p_a p_b + g^{ab} p_a \delta p_b$. Нетрудно видеть, что полученная система совпадает с каноническими уравнениями Гамильтона на кокасательном расслоении $T^*(TM)$ с естественной симплектической структурой $\delta\omega = dp_a \wedge d\delta x^a + d\delta p_a \wedge dx^a$ и описывает геодезический поток на TM относительно новой римановой метрики $\widetilde{g}(\cdot,\cdot)$, ассоциированной с гамильтонианом $\delta H(x,p)$.

Определение 2. Геодезический поток, описываемый гамильтоновой системой (11)–(12), будем называть расширенным геодезическим потоком.

Пусть $I(x,p)$ — первый интеграл геодезического потока (8). Очевидно, данная функция остается также и интегралом расширенного геодезического потока, т. к. по свойству 2) скобки $\{\cdot,\cdot\}_T$ имеем $\{\delta H, I\}_T = \{H, I\} = 0$. Кроме того, функция $I(x,p)$ доставляет системе (11)–(12) еще один интеграл движения: из свойства 3) следует, что вариация δI также коммутирует с δH. При этом легко видеть, что функции I и δI коммутируют и функционально независимы на $T(T^*M)$.

Известно, что в случае вполне интегрируемого геодезического потока имеется набор m функционально независимых интегралов движения $\{I_1, \ldots, I_m\}$, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона ([9], с. 163). Из вышесказанного следует, что в случае расширенного геодезического потока данный набор можно дополнить соответствующими вариациями $\{\delta I_1, \ldots, \delta I_m\}$, увеличивая тем самым число интегралов движения канонической гамильтоновой системы (11)–(12) до $2m$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Расширенный геодезический поток* (11)–(12) *на* TM *с гамильтонианом* δH *является вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда вполне интегрируем исходный геодезический поток* (8) *на* M *с гамильтонианом* H.

4. Расширенные геодезические потоки на однородных пространствах с инвариантными и центральными метриками

В данном параграфе рассмотрим геодезические потоки и уравнения Якоби на однородных G-пространствах с двумя классами римановых метрик, связанных с группой преобразований. Это G-инвариантные и так называемые *субмерсные* или *центральные* метрики.

Напомним схему построения инвариантных и центральных римановых метрик на однородных пространствах [7]. Пусть G — вещественная связная n-мерная группа Ли, $\mathcal{G}$ — ее алгебра

Ли, H — $(n-m)$-мерная замкнутая подгруппа группы G, $\mathcal{H}$ — алгебра Ли группы H, $M = G/H$ — однородное правое m-мерное G-пространство. Выберем на кокасательной плоскости $\mathcal{G}^* = T_e^*G$ в единице группы произвольную квадратичную невырожденную форму $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$ и разнесем ее с помощью левых и правых сдвигов на всю группу G. В результате этого в каждой точке $g \in G$ будут определены левоинвариантная ($\mathbf{G}_g^L = L_g^*\mathbf{G}$) и правоинвариантная ($\mathbf{G}_g^R = R_g^*\mathbf{G}$) метрики на группе Ли.

Пусть $\pi : G \to M$ — каноническая проекция группы G на пространство правых смежных классов G/H. Так как группа G действует на M правыми сдвигами и квадратичная форма $\mathbf{G}_g^R$ правоинвариантна, то проекция метрики $\mathbf{G}_g^R$ на пространство правых смежных классов определяет на однородном пространстве G-инвариантную риманову метрику $\mathbf{G}_x^R = \pi^*\mathbf{G}_g^R$, $x = \pi(g)$. Отметим, что подобное определение является корректным только при выполнении условия $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантности: $\mathbf{G}(\mathrm{Ad}_h^*\cdot, \mathrm{Ad}_h^*\cdot)|_{\mathcal{H}^\perp} = \mathbf{G}(\cdot,\cdot)|_{\mathcal{H}^\perp}$, $h \in H$.

Проектируя аналогичным образом левоинвариантную билинейную форму $\mathbf{G}_g^L$ на правое однородное G-пространство, получаем центральную риманову метрику $\mathbf{G}_x^L = \pi^*\mathbf{G}_g^L$, которая в общем случае не является инвариантной относительно действия группы G. Ввиду того, что для определения центральной метрики не требуется выполнения условия $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантности, данный класс метрик является более широким, чем класс G-инвариантных метрик на однородных пространствах.

Произвольный элемент группы можно представить в виде $g = hs(x)$, где $h \in H$, $s(x)$ — гладкое локальное сечение $s : G \to M$ главного расслоения (G, M, π, H), $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Пусть $\{z^i\}$ $(i = 1,\dots,n)$, $\{y^{\overline{a}}\}$ $(\overline{a} = 1,\dots,n-m)$, $\{x^a\}$ $(a = 1,\dots,m)$ — локальные координаты на группе G, в слое H и на базе M соответственно. В этих координатах левоинвариантные поля $\xi_A(g) \equiv (L_g)_*\, e_A$ на группе G можно представить в виде

$$\xi_A(g) = X_A^a(x)\partial_{x^a} + \xi_A^{\overline{a}}(y,x)\partial_{y^{\overline{a}}}, \quad A = 1,\dots,n.$$

Очевидно, векторные поля $\pi_*\xi_A(g) = X_A^a(x)\partial_{x^a}$ относительно обычного коммутатора образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathcal{G}$, и являются генераторами группы преобразований G, действующей на M. Компонентами левоинвариантной метрики на группе G и центральной метрики на M в локальных координатах являются

$$\begin{aligned} g^{ij}(z) &= \mathbf{G}^{AB}\xi_A^i(z)\xi_B^j(z), \\ g^{ab}(x) &= \mathbf{G}^{AB}X_A^a(x)X_B^b(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Введем на касательном расслоении TG группы G структуру группового многообразия ([10], p. 98). Для этого, обозначая через $\delta g \in T_gG$ касательный вектор в точке $g \in G$, рассмотрим на TG бинарную операцию

$$(g_1, \delta g_1) \circ (g_2, \delta g_2) = (g_1g_2,\, [R_{g_2}]_*\, \delta g_1 + [L_{g_1}]_*\, \delta g_2),$$

и, кроме того, каждому элементу $(g, \delta g)$ из TG сопоставим обратный ему по правилу $(g, \delta g)^{-1} = (g^{-1}, -[L_{g^{-1}}]_*\, [R_{g^{-1}}]_*\, \delta g)$. Введенные операции являются непрерывными по каждому аргументу и удовлетворяют всем аксиомам группы, поэтому многообразие TG относительно этих операций образует группу Ли. Как группа, TG представляет собой полупрямое произведение группы G на абелеву n-мерную группу $\mathbf{R}^n$: $TG = \mathbf{R}^n \rhd G$. Пусть закон композиции на группе G локально описывается с помощью функции $z^i = \psi^i(z_1, z_2)$. Тогда функция композиции в группе TG имеет вид

$$z^i = \psi^i(z_1, z_2), \quad \delta z^i = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_1^k}\delta z_1^k + \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_2^k}\delta z_2^k.$$

Найдем явный вид левоинвариантных векторных полей на группе TG. Для этого наложим на базисные векторы касательного пространства группы TG в единице $\{e_A = \partial_{\delta z^A}|_{\delta z=0},\ \delta e_A = \partial_{z^A}|_{z=0}\}$ следующие коммутационные соотношения:

$$[e_A, e_B] = 0, \quad [e_A, \delta e_B] = [\delta e_A, e_B] = C_{AB}^C\, e_C, \quad [\delta e_A, \delta e_B] = C_{AB}^C \delta e_C.$$

Очевидно, линейное пространство $\widetilde{\mathcal{G}} \equiv T_{(e,0)}(TG)$ в этом случае становится алгеброй Ли группы TG и представляет собой полупрямую сумму $\widetilde{\mathcal{G}} \equiv \mathcal{G} \dotplus \mathcal{R}^n$ алгебры $\mathcal{G}$ и n-мерного абелева идеала $\mathcal{R}^n$. Левоинвариантные поля на группе TG получаются в результате действия дифференциалов левого сдвига на соответствующие базисные векторы алгебры Ли $\widetilde{\mathcal{G}}$ и в координатах $(z^i, \delta z^i)$ имеют вид

$$\widetilde{\xi}_A(z,\delta z) = \xi_A^k(z)\frac{\partial}{\partial \delta z^k}, \quad \delta\widetilde{\xi}_A(z,\delta z) = \xi_A^k(z)\frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{\partial \xi_A^k(z)}{\partial z^l}\delta z^l \frac{\partial}{\partial \delta z^k}. \tag{14}$$

Рассмотрим гамильтониан геодезического потока на группе G с левоинвариантной метрикой

$$H(z,p) = \frac{1}{2}g^{ij}(z)p_i p_j = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{AB}\xi_A(z,p)\xi_B(z,p),$$

где $\xi(z,p) \equiv \theta(\xi_A) = \xi_A^i(z)p_i$, $\theta = p_i dx^i$, $\omega = d\theta$. Введем симплектическую структуру в $T^*(TG)$ с помощью 1-формы $\delta\theta = p_i\, d\delta z^i + \delta p_i\, dz^i$ и определим функции

$$\widetilde{\xi}_A(z,p) \equiv \delta\theta(\widetilde{\xi}_A) = \xi_A^i(z)p_i, \quad \delta\widetilde{\xi}_A(z,p) \equiv \delta\theta(\delta\widetilde{\xi}_A) = \xi_A^i(z)\delta p_i + \frac{\partial \xi_A^i(z)}{\partial z^k}\delta z^k p_i.$$

С помощью функций $\widetilde{\xi}_A(z,p)$ и $\delta\widetilde{\xi}_A(z,p)$ вариация гамильтониана $H(z,p)$ может быть записана в виде

$$\delta H(z,p) = \mathbf{G}^{AB}\widetilde{\xi}_A(z,p)\delta\widetilde{\xi}_B(z,p). \tag{15}$$

Из невырожденности формы $\mathbf{G}$ следует, что гамильтониан (15) определяет на TG индуцированную риманову метрику $\widetilde{\mathbf{G}}^L_{(g,\,\delta g)}$, являющуюся инвариантной относительно левых сдвигов группы TG. Действие данной метрики на базисных 1-формах задается соотношениями

$$\widetilde{\mathbf{G}}^L_{(g,\,\delta g)}(dz^i, dz^j) = \widetilde{\mathbf{G}}^L_{(g,\,\delta g)}(d\delta z^i, d\delta z^j) = 0, \quad \widetilde{\mathbf{G}}^L_{(g,\,\delta g)}(dz^i, d\delta z^j) = \mathbf{G}^L_g(dz^i, dz^j).$$

Очевидно, индуцированная метрика $\widetilde{\mathbf{G}}^L_{(g,\,\delta g)}$ на TG определяет расширенный геодезический поток с гамильтонианом $\delta H(z,p)$, который включает в себя исходный поток на группе G с гамильтонианом $H(z,p)$ и его гамильтонову систему в вариациях.

Рассмотрим теперь случай геодезического потока на однородном пространстве M с центральной метрикой (13). Касательное расслоение TH замкнутой подгруппы $H \subset G$ есть множество пар $(h,\, \delta h)$ таких, что $h \in H$, $\delta h \in T_h G$. Очевидно, TH является подгруппой в TG, поэтому можно рассматривать правое однородное пространство $\widetilde{M} \simeq TG/TH$. Пусть $\widetilde{\pi}$ — каноническая проекция TG на пространство правых смежных классов $\widetilde{M}$. Векторные поля $\widetilde{X} = \widetilde{\pi}_*(\widetilde{\xi})$ и $\delta\widetilde{X} = \widetilde{\pi}_*(\delta\widetilde{\xi})$, являющиеся проекциями на $\widetilde{M}$ левоинвариантных векторных полей (14), представляют собой генераторы группы TG, действующей на $\widetilde{M}$ правыми сдвигами. Без потери общности выберем базис в алгебре Ли $\widetilde{\mathcal{H}}$ группы TH следующим образом: $\{e_\alpha, \delta e_\alpha\}$, $\alpha = 1, \ldots, n-m$, тогда в локальных координатах поля $\widetilde{X}_A$ и $\delta\widetilde{X}_A$ имеют вид

$$\widetilde{X}_A(x,\delta x) = X_A^a(x)\frac{\partial}{\partial \delta x^a}, \quad \delta\widetilde{X}_A(x,\delta x) = X_A^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial X_A^a(x)}{\partial x^b}\delta x^b \frac{\partial}{\partial \delta x^b}, \tag{16}$$

где $\{\delta x^a,\ a = 1, \ldots, m\}$ — координаты вектора $\delta x = \widetilde{\pi}(\delta g) \in T_x M$. Легко проверяется, что относительно операции обычного коммутирования операторы (16) образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре $\widetilde{\mathcal{G}}$ группы TG.

Пусть $\delta\theta = \delta p_a dx^a + p_a d\delta x^a$, $\delta\omega = d\delta\theta$ – естественная симплектическая структура на $T^*\widetilde{M}$. Рассмотрим на $T^*\widetilde{M}$ гамильтониан

$$\delta H(x,p) = \mathbf{G}^{AB} X_A(x,p)\delta X_B(x,p), \tag{17}$$

который представляет собой вариацию гамильтониана геодезического потока на однородном пространстве M с центральной метрикой. Здесь $X_A(x,p) = \delta\theta(X_A)$, $\delta X_A(x,p) = \delta\theta(\delta X_A)$. Аналогично случаю геодезического потока на группе TG можно показать, что гамильтониан $\delta H(x,p)$

индуцирует в $\widetilde{M}$ риманову метрику $\widetilde{\mathbf{G}}^L_{(x,\,\delta x)}$, являющуюся центральной по отношению к группе преобразований TG. С другой стороны, каноническая гамильтонова система с гамильтонианом (17) представляет собой составную систему, включающую в себя геодезический поток на M относительно центральной метрики $\mathbf{G}^L_x$ и соответствующее уравнение в вариациях (уравнение Якоби). Отсюда вытекает, что расширенный геодезический поток на TM является геодезическим потоком на однородном пространстве $\widetilde{M}$ относительно индуцированной центральной метрики $\widetilde{\mathbf{G}}^L_{(x,\,\delta x)}$.

Отметим, что аналогичные построения на M можно провести для произвольной G-инвариантной метрики, сводя тем самым уравнение Якоби вместе с исходным геодезическим потоком к новому расширенному геодезическому потоку на TM относительно индуцированной TG-инвариантной метрики.

5. Построение канонического преобразования

Инволютивный набор $2m$ независимых первых интегралов геодезического потока позволяет установить лишь принципиальную возможность его точного интегрирования. Построение явного решения геодезического потока в квадратурах представляет собой самостоятельную задачу, зачастую весьма нетривиальную. В данном параграфе для нахождения в квадратурах решения геодезического потока и уравнения Якоби на изучаемых пространствах используем конструктивный алгоритм, основанный на построении канонических координат на орбитах коприсоединенного представления и на симплектических листах пуассоновой алгебры инвариантных функций.

Введем отображение момента $\mu : T^*M \to \mathcal{G}^*$, $\mu(x,p) = P_A e^A$, где $P_A = X_A(x,p)$. Отображение μ обладает свойством *эквивариантности*, т.е. гамильтоново действие группы G на T^*M при отображении μ переходит в коприсоединенное действие Ad^*_g группы G на дуальном пространстве $\mathcal{G}^*$. При этом любая траектория геодезического потока на T^*M после отображения момента будет принадлежать не всему $\mathcal{G}^*$, а поверхности $G\mathcal{H}^\perp = \{P \in \mathcal{G}^* \mid P = \mathrm{Ad}^*_g \lambda,\ g \in G,\ \lambda \in \mathcal{H}^\perp\}$ (доказательство этого факта см. в [7]).

Действие Ad^*_g группы Ли G расслаивает дуальное пространство $\mathcal{G}^*$ на орбиты коприсоединенного представления (K-орбиты). Максимальная размерность K-орбиты равна $n - r$, где число $r = \operatorname{ind}\mathcal{G}$ называется *индексом* алгебры $\mathcal{G}$. В общем случае инвариантное пространство $G\mathcal{H}^\perp$ состоит из сингулярных орбит. Пусть максимальная размерность K-орбиты, принадлежащей пространству $G\mathcal{H}^\perp$ равна $n - r - 2s_M$. Число s_M называется *степенью вырождения* однородного пространства M и определяется структурными константами алгебры $\mathcal{G}$ и подалгебры $\mathcal{H}$ по формуле [11]

$$s_M = \frac{1}{2}(\dim\mathcal{G}^\lambda - \operatorname{ind}\mathcal{G}), \tag{18}$$

где λ — элемент общего положения пространства $\mathcal{H}^\perp$, $\mathcal{G}^\lambda$ — аннулятор ковектора $\lambda \in \mathcal{H}^\perp$, $\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}^\lambda$.

Иногда функции $X_A(x,p)$ не являются функционально независимыми, между ними могут существовать функциональные соотношения $\Gamma(X(x,p)) = 0$, называемые *тождествами*. Число независимых тождеств i_M называется *индексом* однородного пространства. Как показано в [11], индекс однородного пространства равен $i_M = \operatorname{codim} GH^\perp$ и может быть посчитан по структурным константам алгебры $\mathcal{G}$ и ее подалгебры $\mathcal{H}$:

$$i_M = \dim\mathcal{H} - \operatorname{rank}\langle\lambda, [\mathcal{G},\mathcal{H}]\rangle = \dim\mathcal{H}^\lambda. \tag{19}$$

Алгебра Ли $\mathcal{G}$ функций $X_A(x,p) = X^a_A(x)p_a$ допускает в общем случае алгебру инвариантных функций $L(x,p)$: $\{L(x,p), X_A(x,p)\} = 0$. Выберем базис независимых инвариантных функций

$\{L_\mu(x,p)\}$. Очевидно, скобка Пуассона функций $L_\mu(x,p)$ функционально выражается через этот набор:

$$\{L_\mu, L_\nu\} = \Omega_{\mu\nu}(L). \tag{20}$$

Пространство $\mathcal{F}$ с базисом $\{L_\mu(x,p)\}$ и нелинейными коммутационными соотношениями (20) называют *функциональной алгеброй* или *$\mathcal{F}$-алгеброй.*

Введем дуальное к $\mathcal{F}$ пространство $\mathcal{F}^* = \{a_\mu\}$ с образующими a_μ и в пространстве гладких функций на $\mathcal{F}^*$ определим скобку Пуассона, превращая тем самым $C^\infty(\mathcal{F}^*)$ в пуассонову алгебру:

$$\{\varphi,\psi\}^{\mathcal{F}}(a) \equiv \Omega_{\mu\nu}(a)\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a_\mu}\frac{\psi(a)}{\partial a_\nu}.$$

Введем также отображение момента $\widetilde{\mu} : T^*M \to \mathcal{F}^*$ соотношением $L_\mu(x,p) = a_\mu$. Отображения моментов $\mu : T^*M \to G\mathcal{H}^\perp$ и $\widetilde{\mu} : T^*M \to \mathcal{F}^*$ определяют *бирасслоение.* Как показано в ([12], с. 39), симплектические листы $\Omega \subset G\mathcal{H}^\perp$ и $\widetilde{\Omega} \subset \mathcal{F}^*$ находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом: $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\mu}(\mu^{-1}(\Omega))$. Это означает, что количество нетривиальных функций Казимира $K_m(P)$ на $G\mathcal{H}^\perp$ совпадает с количеством функций Казимира $Z_m(a)$ на $\mathcal{F}^*$ и их можно выбрать согласованным образом: $Z_m(L(x,p)) = K_m(X(x,p))$, $m = 1,\dots,\operatorname{ind}\mathcal{F}$. Число нетривиальных функций Казимира на $\mathcal{F}^*$ по аналогии с алгебрами Ли называем *индексом* $(\operatorname{ind}\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-алгебры. Согласованные симплектические листы $\Omega_\varkappa$, $\widetilde{\Omega}_\varkappa$, нумерованные $(\operatorname{ind}\mathcal{F})$-мерным параметром $\varkappa$, определяются равенствами

$$\Omega_\varkappa = \{P \in G\mathcal{H}^\perp \mid K_m(P) = \varkappa_m\}, \quad \widetilde{\Omega}_\varkappa = \{a \in \mathcal{F}^* \mid Z_m(a) = \varkappa_m\}. \tag{21}$$

Как показано в [11], размерность и индекс $\mathcal{F}$-алгебры могут быть посчитаны по формулам

$$\dim\mathcal{F} = i_M + 2m - n, \quad \operatorname{ind}\mathcal{F} = r + 2s_M - i_M. \tag{22}$$

Размерность симплектического листа $\widetilde{\Omega}$ равна $\dim\widetilde{\Omega} = \dim\mathcal{F} - \operatorname{ind}\mathcal{F} = 2d(M)$. Целое неотрицательное число $d(M)$ называется *дефектом* однородного пространства M.

Пусть $(\operatorname{ind}\mathcal{F})$-мерный вещественный параметр j нумерует орбиты максимальной размерности в $G\mathcal{H}^\perp$, $\lambda(j)$ — представитель орбиты $\mathcal{O}_{\lambda(j)} \subset G\mathcal{H}^\perp$. Введем на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(j)}$ координаты Дарбу (π_α, q^α), в которых симплектическая форма Кириллова ([9], с. 136) имеет канонический вид $\omega|_{\mathcal{O}_{\lambda(j)}} = d\pi_\alpha \wedge dq^\alpha$, $\alpha = 1,\dots,(n-r)/2 - s_M$. В подавляющем большинстве случаев для функционала $\lambda \in \mathcal{G}^*$ существует нормальная поляризация $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}^c$ такая, что $\dim\mathcal{P} = \dim\mathcal{G} - \frac{1}{2}\dim\mathcal{O}_\lambda$, $\langle\lambda, [\mathcal{P},\mathcal{P}]\rangle = 0$, $\lambda + \mathcal{P}^\perp \subset \mathcal{O}_\lambda$. В этом случае переход к каноническим координатам задается выражением [13]

$$P_A = P_A(q,\pi,j) = P_A^\alpha(q)\pi_\alpha + \chi_A(q,\lambda(j)),$$

причем $K_m(P(q,\pi,j)) = \varkappa_m(j) = \overline{\varkappa_m(j)}$, $\det\|\frac{\partial\varkappa_m(j)}{\partial j^k}\| \neq 0$, $m,k = 1,\dots,\operatorname{ind}\mathcal{F}$.

Аналогично перейдем к каноническим координатам (u,v) на симплектическом листе $\widetilde{\Omega}_{\varkappa(j)}$ (21):

$$a_\mu = a_\mu(u,v,j), \quad Z_m(a(u,v,j)) = \varkappa_m(j).$$

Расширим симплектическое пространство $\Omega \times \widetilde{\Omega}$ с формой $d\pi \wedge dq + dv \wedge du$ до симплектического пространства K, гомеоморфного пространству T^*M, путем добавления $\operatorname{ind}\mathcal{F}$ пар канонически сопряженных величин (τ, j) и определения на K симплектической формы

$$\widetilde{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{(n-r)/2-s_M} d\pi_\alpha \wedge dq^\alpha + \sum_{\overline{\alpha}=1}^{d(M)} dv_{\overline{\alpha}} \wedge du^{\overline{\alpha}} + \sum_{m=1}^{\operatorname{ind}\mathcal{F}} dj_m \wedge d\tau^m.$$

Далее определим (локально) взаимно однозначный переход от координат (x,p) на T^*M к координатам (q,π,u,v,j,τ) на K так, что $\omega = dp \wedge dx = \widetilde{\omega}$.

Отображения моментов $\mu, \widetilde{\mu}$ являются пуассоновыми отображениями $T^*M \to K$:

$$\{\varphi \circ \mu, \psi \circ \mu\} = \{\varphi, \psi\}^{\mathrm{Lie}} \circ \mu, \quad \{f \circ \widetilde{\mu}, h \circ \widetilde{\mu}\} = \{f, h\}^{\mathcal{F}} \circ \widetilde{\mu}, \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathcal{G}^*), \quad f, h \in C^\infty(\mathcal{F}^*)$$

и в локальных координатах имеют вид

$$X_A(x,p) = P_A(q,\pi,j), \quad L_\mu(x,p) = a_\mu(u,v,j). \tag{23}$$

Соотношения (23) неявным образом определяют переменные (q,π,u,v,j) как функции от переменных (x,p), в частности, равенства $K_m(X(x,p)) = \varkappa_m(j)$ неявно определяют функции $j_m = j_m(x,p)$. Отображение $T : T^*M \to K$ определяется соотношением

$$T^m(x,p) = \tau^m. \tag{24}$$

Очевидно, отображение $\Lambda = (\mu, \widetilde{\mu}, T) : \ T^*M \to K$ будет симплектическим, т. е. переводит форму ω в форму $\widetilde{\omega}$ тогда и только тогда, когда функции $T^m(x,p)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\{T^m, j_k\} = \delta^m_k, \quad \{T^m, q^\alpha\} = \{T^m, \pi_\alpha\} = \{T^m, u^{\overline{\alpha}}\} = \{T^m, v_{\overline{\alpha}}\} = 0. \tag{25}$$

Здесь предполагается, что переменные q,π,u,v,j являются функциями от x и p, определяемыми из соотношений (25).

В силу того, что формы $\omega, \widetilde{\omega}$ невырождены и размерность пространства T^*M равна размерности пространства K, то Λ, определяемое соотношениями (23), (24), является локальным симплектическим биективным отображением и осуществляет тем самым нужное каноническое преобразование.

Пусть $H(x,p)$ — гамильтониан произвольного геодезического потока на T^*M. После канонического преобразования (23), (24) $H(x,p)$ преобразуется к новому гамильтониану $\widetilde{H}(q,\pi,u,v,j)$ и уравнения геодезического потока сводятся к редуцированной гамильтоновой системе

$$\frac{du^{\overline{\alpha}}}{dt} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v_{\overline{\alpha}}}, \quad \frac{dv_{\overline{\alpha}}}{dt} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial u^{\overline{\alpha}}}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \pi_\alpha}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q^\alpha}, \tag{26}$$

$$\frac{dj}{dt} = 0, \quad \frac{d\tau^m}{dt} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial j_m}. \tag{27}$$

Очевидно, данная система интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема подсистема (26), поэтому при достаточном числе переменных j_m (26)–(27) удается проинтегрировать в квадратурах. В частности, в [7] получены следующие необходимые и достаточные условия интегрируемости геодезического потока для случаев инвариантной и центральной метрик на M.

Теорема 3. *Произвольный G-инвариантный геодезический поток на однородном пространстве редуцируется к автономной $2d(M)$-мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда $d(M) < 2$.*

Теорема 4. *Геодезический поток на однородном пространстве с произвольной центральной метрикой редуцируется к автономной $\dim \mathcal{O}_\lambda$–мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda = \frac{n-r}{2} - s_M < 2. \tag{28}$$

Выше было показано, что когда M — однородное пространство с центральной метрикой (13), расширенный геодезический поток является геодезическим потоком на $\widetilde{M} = TG/TH$ относительно индуцированной центральной метрики. То же верно и в случае инвариантной метрики, поэтому интегрирование расширенного потока относительно указанных метрик может быть также произведено с помощью канонического преобразования (23), (24).

В качестве инвариантных функций расширенного геодезического потока можно выбрать набор $\{L_\mu(x,p),\, \delta L_\mu(x,p)\}$, где $\delta L_\mu(x,p)$ — вариации функций $L_\mu(x,p)$. Действительно, из свойств скобки $\{\cdot,\cdot\}_T$ следуют равенства $\{L_\mu, \delta X_A\}_T = \{L_\mu, X_A\} = 0$ и $\{\delta L_\mu, \delta X_A\}_T = \delta\{L_\mu, X_A\} = 0$.

Можно также показать, что индекс и размерность $\mathcal{F}$-алгебры пространства $\widetilde{M}$ увеличиваются вдвое по сравнению с соответствующими числами для M:

$$\dim \widetilde{\mathcal{F}} = 2 \dim \mathcal{F}, \quad \operatorname{ind} \widetilde{\mathcal{F}} = 2 \operatorname{ind} \mathcal{F}.$$

Дефект однородного пространства $\widetilde{M}$ равен $d(\widetilde{M}) = 2d(M)$, следовательно, число переменных u и v удваивается. Аналогичным образом удваиваются размерности K-орбит в $TG(\widetilde{\mathcal{H}}^{\perp})$, поэтому увеличивается в два раза число переменных q и π. Канонический переход к координатам на K-орбитах и симплектических листах $\mathcal{F}$-алгебры для однородного пространства $\widetilde{M}$ может быть выбран в виде

$$\begin{gathered}
X_A(x,p) = P_A(q,\pi,j), \quad \delta X_A(x,\delta x,p,\delta p) = \delta P_A(q,\delta q,\pi,\delta\pi,j,\delta j), \\
L_\mu(x,p) = a_\mu(u,v,j), \quad \delta L_\mu(x,\delta x,p,\delta p) = \delta a_\mu(u,\delta u,v,\delta v,j,\delta j), \\
T^m(x,p) = \tau^m, \quad \delta T^m(x,\delta x,p,\delta p) = \delta\tau^m.
\end{gathered}$$

Таким образом, используя теорему 2 и комбинируя изложенные выше факты, получаем следующий результат.

Теорема 5. 1) *Расширенный геодезический поток на касательном расслоении однородного пространства M с произвольной G-инвариантной метрикой редуцируется к $4d(M)$-мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда $d(M) < 2$.*

2) *Расширенный геодезический поток на касательном расслоении однородного пространства M с произвольной центральной метрикой редуцируется к $2\dim \mathcal{O}_\lambda$-мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}\dim \mathcal{O}_\lambda < 2$.*

6. Интегрирование уравнения Якоби на плоскости Лобачевского (пример)

В качестве простейшего примера проинтегрируем в квадратурах геодезический поток и уравнение Якоби на плоскости Лобачевского. Метрика плоскости Лобачевского L^2 может быть записана в конформном виде следующим образом (метрика модели Клейна):

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0. \tag{29}$$

Найдем алгебру векторов группы движения данной метрики. Для этого решим уравнения Киллинга $\mathcal{L}_X g_{ab} = 0$ относительно неизвестного векторного поля X (здесь $\mathcal{L}_X$ — производная Ли вдоль векторного поля X). Базис линейного пространства решений данного уравнения состоит из векторных полей вида

$$X_1 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{30}$$

которые образуют алгебру Ли $\mathcal{G}$ с коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_2] = -X_1, \quad [X_1, X_3] = -2X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_3.$$

Таким образом, плоскость Лобачевского является однородным пространством, на котором действует трехмерная группа движений G, ассоциированная с алгеброй Ли векторов Киллинга (30).

Зафиксируем точку ($x_0 = 0$, $y_0 = 1$) из L^2. Подалгеброй изотропии данной точки является одномерная подалгебра $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, натянутая на вектор $X_1 + X_3$. Следовательно, L^2 эквивалентно фактор-пространству правых смежных классов G/H, где H — подгруппа из G, соответствующая подалгебре $\mathcal{H}$. По формулам (18), (19), (22) находим $s_M = 0$, $i_M = 0$, $\dim \mathcal{F} = 1$, $\operatorname{ind} \mathcal{F} = 1$, $d(M) = 0$. Таким образом, алгебра инвариантных функций одномерна и принадлежит центру обертывающего поля $E(\mathcal{G})$.

Гамильтониан геодезического потока метрики Лобачевского (29) можно представить в виде $H = \frac{1}{2}K(X(x,p))$, где $K(P) = P_2^2 - P_1P_3$ — функция Казимира алгебры $\mathcal{G}$. Отсюда следует, что метрика (29) одновременно является инвариантной и центральной, а гамильтониан $H(x,p)$ коммутирует со всеми функциями $X_A(x,p)$. Геодезический поток данной метрики имеет вид

$$\dot{x} = y^2 p_x, \quad \dot{y} = y^2 p_y, \quad \dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = y(p_x^2 + p_y^2). \tag{31}$$

Выберем линейный функционал общего положения $\lambda = (0, j, 0)$ из $\mathcal{H}^\perp$, параметризованный вещественным параметром j. Переход к каноническим координатам на невырожденной K-орбите, проходящей через λ и соответствующей подалгебре изотропии $\mathcal{P} = \{X_1, X_2\}$, имеет вид

$$P_1 = q^2\pi + 2qj, \quad P_2 = q\pi + j, \quad P_3 = \pi. \tag{32}$$

Так как дефект L^2 равен нулю, переменных u и v нет. Достраивая функцию $T(x,p) = -\ln(2y) - \ln\left(p_x^2 + p_y^2 + p_y\sqrt{p_x^2 + p_y^2}\right)$, получаем искомое каноническое преобразование (неявно)

$$(x^2 - y^2)p_x + 2xyp_y = q^2\pi + 2qj, \quad xp_x + yp_y = q\pi + j, \quad p_x = \pi, \tag{33}$$

$$-\ln(2y) - \ln\left(p_x^2 + p_y^2 + p_y\sqrt{p_x^2 + p_y^2}\right) = \tau. \tag{34}$$

Гамильтониан после редукции имеет вид $\widetilde{H} = H(P(q,\pi,j)) = j^2/2$ и редуцированная гамильтонова система тривиально интегрируется, q, π, j — const, $\tau(t) = jt + \tau_0$.

Рассмотрим расширенный геодезический поток на TL^2 с гамильтонианом $\delta H = y\delta y(p_x^2 + p_y^2) + y^2(p_x\delta p_x + p_y\delta p_y)$, который состоит из системы (31) и дополнительных уравнений

$$\delta\dot{x} = 2y\delta y\, p_x + y^2\delta p_x, \quad \delta\dot{y} = 2y\delta y\, p_y + y^2\delta p_y,$$
$$\delta\dot{p}_x = 0, \quad \delta\dot{p}_y = \delta y(p_x^2 + p_y^2) + 2y(p_x\delta p_x + p_y\delta p_y).$$

Проинтегрируем данную систему аналогично интегрированию исходной системы (31).

Алгебра $\widetilde{\mathcal{G}}$ интегралов движения расширенного геодезического потока состоит из функций $X_A(x,p)$ и вариаций $\delta X_A(x,p)$ и имеет две функции Казимира

$$K(P) = P_2^2 - P_1P_3, \quad \delta K(P, \delta P) = 2P_2\,\delta P_2 - P_1\,\delta P_3 - \delta P_1 P_3,$$

поэтому гамильтониан $\delta H(x,p)$ можно представить в виде $\delta H = \frac{1}{2}\delta K(X(x,p), \delta X(x,p))$. Зафиксируем точку $(x = 0,\ y = 1,\ \delta x = 0,\ \delta y = 0)$ из TL^2. Подалгеброй изотропии данной точки является двумерное линейное пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$, натянутое на векторы $\{X_1 + X_3, \delta X_1 + \delta X_3\}$. Выберем ковектор общего положения $\widetilde{\lambda} = (0, j, 0, 0, \delta j, 0)$ из $\widetilde{\mathcal{G}}^*$, параметризованный двумя вещественными параметрами j и δj. Переход к каноническим координатам на невырожденной K-орбите в $\widetilde{\mathcal{G}}^*$, соответствующий поляризации $\widetilde{\mathcal{P}} = \{X_1, X_2, \delta X_1, \delta X_2\}$, включает в себя равенства (32) и дополнительные соотношения

$$\delta P_1 = 2\,\delta q(q\pi + j) + q(q\delta\pi + 2\delta j), \quad \delta P_2 = \delta q\pi + q\delta\pi + \delta j, \quad \delta P_3 = \delta\pi.$$

Достраивая функции $T(x,p)$ и $\delta T(x, \delta x, p, \delta p)$, получаем искомое каноническое преобразование, состоящее из (33)–(34) и уравнений

$$(xp_x + yp_y)\delta x + (xp_y - yp_x)\delta y + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\delta p_x + xy\delta p_y = (q\pi + j)\delta q + \frac{1}{2}q^2\delta\pi + q\delta j, \tag{35}$$

$$p_x\delta x + p_y\delta y + x\delta p_x + y\delta p_y = q\delta\pi + \pi\delta q + \delta j, \quad \delta p_x = \delta\pi, \tag{36}$$

$$-\frac{\delta y}{y} - \frac{\left(2p_x\sqrt{p_x^2 + p_y^2} + p_xp_y\right)\delta p_x + \left(2p_y\sqrt{p_x^2 + p_y^2} + p_x^2 + 2p_y^2\right)\delta p_y}{(p_x^2 + p_y^2)\left(\sqrt{p_x^2 + p_y^2} + p_y\right)} = \delta\tau. \tag{37}$$

Гамильтониан после редукции имеет вид $\delta\widetilde{H} = \delta j^2/2$, и после интегрирования редуцированной системы имеем q, δq, π, $\delta\pi$, j, δj — const, $\tau(t) = jt + \tau_0$, $\delta\tau(t) = \delta j\, t + \delta\tau_0$. Зависимость от времени переменных $(x, \delta x, p, \delta p)$ неявно определяется соотношениями (33)–(34) и (35)–(37).

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. II. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
2. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* – М.: Наука, 1989. – 472 с.
3. Vaisman I. *Second order Hamiltonian vector fields on tangent bundles* // Diff. Geom. and Appl. – 1995. – V. 5. – P. 153–170.
4. Mitric G., Vaisman I. *Poisson structures on tangent bundles* // Diff. Geom. and Appl. – 2003. – V. 18. – P. 207–228.
5. Воробьев Ю.М. *Гамильтоновы структуры систем в вариациях и симплектические связности* // Матем. сб. – 2000. – Т. 191. – № 4. – С. 3–28.
6. Болсинов А.В., Йованович Б. *Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 7. – С. 21–40.
7. Магазев А.А., Широков И.В. *Интегрирование геодезических потоков на однородных пространствах. Случай дикой группы Ли* // Теор. и матем. физ. – 2003. – Т. 136. – № 3. – С. 365–379.
8. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 264 с.
9. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений.* – М. : Факториал, 1995. – 439 с.
10. Kolar I., Michor P.W., Slovak J. *Natural operations in differential geometry.* – Springer-Verlag, 1993. – 434 p.
11. Широков И.В. *Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах* // Теор. и матем. физ. – 2001. – Т. 126. – № 3. – С. 393–408.
12. Карасев М.В., Маслов В.П. *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование.* – М.: Наука, 1991. – 368 с.
13. Широков И.В. *Координаты Дарбу на K-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли* // Теор. и матем. физ. – 2000. – Т. 123. – № 3. – С. 407–423.

Омский государственный университет

Поступила 10.08.2004