ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 513.88

А.П. ГУРЕВИЧ, А.П. ХРОМОВ

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В пространстве $L[0,1]$ рассмотрим оператор

$$Af = A_0 f + \sum_{k=1}^{m} g_k(x)(f, v_k), \tag{1}$$

где $A_0 f = \alpha_1 \int\limits_0^x f(t)dt + \alpha_2 \int\limits_0^{1-x} f(t)dt$, $(f, v_k) = \int\limits_0^1 f(t) v_k(t)\, dt$, $g_k(x), v_k(x) \in C^1[0,1]$, $x \in [0,1]$. Предположим, что системы $\{g_k'(x)\}_1^m$, $\{v_k(x)\}_1^m$ линейно независимы и $\delta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$.

Обозначим через $R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} A f = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda) f(t)\, dt$ (E — единичный оператор) резольвенту Фредгольма оператора A. В статье при некоторых предположениях относительно оператора вида (1) найдены необходимые и достаточные условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней на всем отрезке $[0,1]$ средних вида

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f\, d\lambda,$$

где $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

б) существует $C > 0$ такая, что $|g(\lambda, r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

в) существуют положительные β_1, β_2 такие, что

$$g(re^{i\varphi}, r) = O\Big(\Big|\varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}\Big|^{\beta_1} \Big|\varphi + \alpha + \frac{\pi}{2}\Big|^{\beta_2}\Big),$$

где $\alpha = \arg\sqrt{\delta}$ (оценки равномерны по r);

г) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Примерами таких функций могут служить функции вида

$$g(\lambda, r) = g_1(\lambda, r) g_2(\lambda, r),$$

где

$$g_1(\lambda, r) = \Big(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha - \pi/2)}\Big)^{\beta_1} \Big(1 - \frac{\lambda}{r} e^{i(\alpha + \pi/2)}\Big)^{\beta_2}, \quad g_2(\lambda, r) = \Big(1 - \frac{f(\lambda)}{M_r(f)}\Big)^{\beta_3},$$
$$M_r(f) = \max_{|\lambda|=r} |f(\lambda)|, \quad \beta_1, \beta_2 > 0,\ \beta_3 \ge 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00075) и программы “Ведущие научные школы” (проект № 00-15-96123).

Отметим, что для случая дифференциального оператора n-го порядка с регулярными по Биркгофу краевыми условиями ([1], с. 66) М. Стоун [2] исследовал средние по Риссу спектральных разложений, представимых в виде

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\left(1-\frac{\lambda^4}{r^4}\right)^l \widetilde{R}_\lambda f\,d\lambda, \quad l>0,$$

где $\widetilde{R}_\lambda$ — резольвента дифференциального оператора, и показал, что на каждом $[a,b]\subset(0,1)$ имеет место равносуммируемость их с такими же средними обычных тригонометрических разложений в ряды Фурье. Далее, в [3] показано, что данный результат имеет место при достаточно больших l и в том случае, когда условия регулярности не выполняются, но ядро резольвенты при больших $|\lambda|$ имеет рост не выше некоторой степени $|\lambda|$. Наконец, в [4], [5] данный результат был перенесен на случай дифференциальных операторов, для которых основные требования не связаны с краевыми условиями, а формулируются в терминах ограничений на спектр и систему собственных и присоединенных функций такого же вида, что и в известных исследованиях Ильина В.А. по равносходимости спектральных разложений (в [5] рассматривается и случай полиномиального пучка).

1. В дальнейшем важную роль будет играть вид оператора A^{-1}. Поэтому выясним сначала условия существования обратного оператора, а затем найдем для него явное представление. Обозначим через $M=(m_{ij})$, $i=1,\ldots,m+1$; $j=1,\ldots,m$, матрицу с элементами $m_{1j}=U(g_j)$, $j=1,\ldots,m$, $m_{ij}=\delta_{ij+1}+(Lg_j,v_{i-1})$, $i=2,\ldots,m+1$; $j=1,\ldots,m$. Здесь $U(f)=\alpha_1 f(0)-\alpha_2 f(1)$, $Lf=\delta^{-1}\{\alpha_1 f'(x)+\alpha_2 f'(1-x)\}$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Теорема 1. *Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} M=m.$$

Доказательство. Пусть $Af=0$, т. е.

$$\alpha_1\int_0^x f(t)\,dt+\alpha_2\int_0^{1-x} f(t)\,dt+\sum_{k=1}^m g_k(x)(f,v_k)=0. \tag{2}$$

Положим в (2) сначала $x=0$, затем $x=1$ и вычтем из первого соотношения, предварительно умноженного на α_1, второе, умноженное на α_2. Получим

$$\sum_{k=1}^m U(g_k)(f,v_k)=0. \tag{3}$$

Далее, дифференцируя (2) по x, имеем

$$\alpha_1 f(x)-\alpha_2 f(1-x)+\sum_{k=1}^m g_k'(x)(f,v_k)=0 \tag{4}$$

(считаем, что $f'(1-x)=\dfrac{d}{d\xi}f(\xi)|_{\xi=1-x}$). Заменим в (4) x на $1-x$

$$\alpha_1 f(1-x)-\alpha_2 f(x)+\sum_{k=1}^m g_k'(1-x)(f,v_k)=0. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получим

$$f(x)+\sum_{k=1}^m (f,v_k)Lg_k(x)=0, \tag{6}$$

откуда

$$(f, v_s) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k)(Lg_k, v_s) = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Система (3), (7) относительно (f, v_k) эквивалентна (2). $\square$

Теперь и в дальнейшем будем предполагать, что $\operatorname{rang} M = m$. Рассмотрим случай, когда $\Delta \neq 0$, где Δ — минор порядка m, состоящий из последних m строк.

Теорема 2. *Если $\Delta \neq 0$, то оператор A^{-1} определяется интегро-дифференциальным выражением*

$$A^{-1}y = Ly(x) - \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{m} Lg_k(x) \sum_{j=1}^{m} (Ly, v_j)\Delta_{j,k} \tag{8}$$

с граничным условием

$$V(y) = \delta_1 y(0) - \delta_2 y(1) - (y, g) = 0, \tag{9}$$

где $\Delta_{j,k}$ — алгебраические дополнения определителя Δ,

$$\delta_1 = \alpha_1 + \frac{1}{\delta}(\alpha_1 w(0) + \alpha_2 w(1)), \qquad \delta_2 = \alpha_2 + \frac{1}{\delta}(\alpha_1 w(1) + \alpha_2 w(0)),$$

$$g(x) = \frac{1}{\delta}(-\alpha_1 w'(x) + \alpha_2 w'(1-x)), \quad w(x) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^{m} U(g_j)\Delta_{k,j} v_k(x).$$

Доказательство. Положим $y = Af$. Тогда так же, как и (6), получим

$$f(x) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) Lg_k(x) = Ly(x). \tag{10}$$

Отсюда имеем

$$(f, v_j) + \sum_{k=1}^{m} (Lg_k, v_j)(f, v_k) = (Ly, v_j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

Из (11) получим

$$(f, v_j) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{m} (Ly, v_k)\Delta_{k,j}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

и тем самым из (10) следует (8).

Далее, так же, как и (3), имеем

$$\sum_{k=1}^{m} U(g_k)(f, v_k) = U(y).$$

Отсюда в силу (12)

$$U(y) = (Ly, w). \tag{13}$$

Проводя в (Ly, w) интегрирование по частям, из (13) придем к (9). Обратно, пусть $y(x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет (9). Положим $f(x) = A^{-1}y$, где $A^{-1}y$ есть правая часть (8). Положим

$$x_s = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{m} (Ly, v_k)\Delta_{k,s}, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Тогда

$$Ly(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} x_k Lg_k(x). \tag{15}$$

Из (9) получим

$$\sum_{k=1}^{m} U(g_k)x_k = U(y). \tag{16}$$

Из (14) заключаем, что x_s удовлетворяет системе

$$\sum_{k=1}^{m} (\delta_{k,s} + (Lg_k, v_s))x_k = (Ly, v_s), \quad s = 1, \dots, m. \tag{17}$$

Теперь, интегрируя (15) от 0 до x и используя (16), получим

$$y(x) = A_0 f(x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x)x_k. \tag{18}$$

С другой стороны, из (15) имеем

$$(Ly, v_s) = (f, v_s) + \sum_{k=1}^{m} (Lg_k, v_s)x_k, \quad s = 1, \dots, m. \tag{19}$$

Сравнивая (17) и (19), заключаем, что $x_s = (f, v_s)$. Поэтому из (18) следует $y = Af$. $\square$

Замечание. Пусть $\operatorname{rang} M = m$, но отличен от нуля другой минор ранга m. Предположим для определенности, что это минор $\widetilde{\Delta}$, составленный из m первых строк матрицы M, тогда

$$A^{-1}y = Ly(x) - \frac{1}{\widetilde{\Delta}} \sum_{k=1}^{m} Lg_k(x)(U(y)\widetilde{\Delta}_{1,k} + \sum_{j=1}^{m-1} (Ly, v_j)\widetilde{\Delta}_{j+1,k}),$$
$$\widetilde{V}(y) = \widetilde{\delta}_1 y(0) - \widetilde{\delta}_2 y(1) - (y, \widetilde{g}) = 0,$$

где

$$\widetilde{\delta}_1 = \alpha\Big(\alpha_1 + \frac{1}{\delta}(\alpha_1 \widetilde{w}(0) + \alpha_2 \widetilde{w}(1))\Big), \quad \widetilde{\delta}_2 = \alpha\Big(\alpha_2 + \frac{1}{\delta}(\alpha_1 \widetilde{w}(1) + \alpha_2 \widetilde{w}(0))\Big),$$
$$\widetilde{w}(x) = v_m(x) - \frac{1}{\widetilde{\Delta}} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-1} (\delta_{k,m} + (Lg_k, v_m))\widetilde{\Delta}_{j+1,k} v_j(x),$$
$$\alpha = \frac{1}{\widetilde{\Delta}} \sum_{k=1}^{m} (\delta_{k,m} + (Lg_k, v_m))\widetilde{\Delta}_{1,k}, \quad \widetilde{g}(x) = \frac{\alpha}{\delta}(-\alpha_1 \widetilde{w}'(x) + \alpha_2 \widetilde{w}'(1 - x)).$$

2. Введем оператор $L_1 : L_1 y = Ly$, $V(y) = 0$.

Теорема 3. *Резольвента Фредгольма $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A и резольвента $R_{1,\lambda} = (L_1 - \lambda E)^{-1}$ оператора L_1, где E — единичный оператор, связаны соотношением*

$$R_\lambda f = R_{1,\lambda} f + \frac{1}{\Delta} \sum_{k,j=1}^{m} \Delta_{j,k}(R_\lambda f, v_j) R_{1,\lambda} Lg_k(x). \tag{20}$$

Доказательство. Так как $y = Af$ удовлетворяет $V(y) = 0$, то

$$R_\lambda - R_{1,\lambda} = (A^{-1} - \lambda E)^{-1} - (L_1 - \lambda E)^{-1} = (L_1 - \lambda E)^{-1}(L_1 - A^{-1})(A^{-1} - \lambda E)^{-1}.$$

Отсюда в силу (8) получим (20).

Рассмотрим далее оператор L_0:

$$L_0 y = Ly, \quad \delta_1 y(0) - \delta_2 y(1) = 0.$$

Лемма 1. *Если $y(x) = R_{0,\lambda} f(x) = (L_0 - \lambda E)^{-1} f(x)$, то*

$$z'(x) - \lambda B z(x) = BF(x), \tag{21}$$

$$Pz(0) + Qz(1) = 0, \tag{22}$$

где $z(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}^T$, $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$, $F(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}^T$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$, $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\delta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta_2 & -\delta_1 \end{pmatrix}$, T — транспонирование.

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{\delta}\{\alpha_1 y'(x) + \alpha_2 y'(1-x)\} - \lambda y(x) = f(x). \tag{23}$$

Заменим x на $1 - x$

$$\frac{1}{\delta}\{\alpha_1 y'(1-x) + \alpha_2 y'(x)\} - \lambda y(1-x) = f(1-x). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует

$$y'(x) - \lambda\{\alpha_1 y(x) - \alpha_2 y(1-x)\} = \alpha_1 f(x) - \alpha_2 f(1-x). \tag{25}$$

Также меняя x на $1 - x$, получим

$$y'(1-x) - \lambda\{\alpha_1 y(1-x) - \alpha_2 y(x)\} = \alpha_1 f(1-x) - \alpha_2 f(x). \tag{26}$$

Из (25) и (26) вытекает (21). Далее, $\delta_1 y(0) - \delta_2 y(1) = 0$ можно записать двумя способами:

$$\delta_1 y_1(0) - \delta_2 y_2(0) = 0 \quad \text{и} \quad \delta_1 y_2(1) - \delta_2 y_1(1) = 0.$$

Отсюда следует (22). $\square$

Лемма 2. *Если в (21) $f_2(x) = f_1(1-x)$, то и $y_2(x) = y_1(1-x)$.*

Доказательство. Положим $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}^T = \{y_1(1-x), y_2(1-x)\}^T$; $w(x) = Iu(x) = \{u_2(x), u_1(x)\}^T$. Тогда $u'(x) = -\{y_1'(1-x), y_2'(1-x)\}^T = -\lambda Bz(1-x) - BF(1-x) = -\lambda Bu(x) - BF(1-x)$; $w'(x) + \lambda IBu(x) = -IBF(1-x)$. Положим $W(x) = Iu(x) = \{u_2(x), u_1(x)\}^T$. Тогда $W'(x) + \lambda IBu(x) = -IBF(1-x)$. Далее, $Bu(x) = \{\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2, \alpha_2 u_1 - \alpha_1 u_2\}^T = -\{\alpha_2 w_1 - \alpha_1 w_2, \alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2\}^T$. Значит, $IBu(x) = -Bw(x)$. Теперь $BF(1-x) = \{\alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_1, \alpha_2 f_2 - \alpha_1 f_1\}$. Поэтому $IBF(1-x) = -BF(x)$. Таким образом, получено

$$w'(x) - \lambda Bw(x) = BF(x). \tag{27}$$

Найдем граничные условия для $w(x)$. Имеем $Pz(0) = Pu(1) = \{\delta_1 w_2(1) - \delta_2 w_1(1), 0\}^T$. Отсюда $IPz(0) = -Qw(1)$. Далее, $Qz(1) = Qu(0) = \{0, \delta_2 w_2(0) - \delta_1 w_1(0)\}^T$. Отсюда $IQz(1) = -Pw(0)$. Значит,

$$Pw(0) + Qw(1) = 0. \tag{28}$$

Из (27) и (28) получим $z(x) = w(x)$. Поэтому $y_1(x) = w_1(x) = u_2(x) = y_2(1-x)$. $\square$

Следствие. Первая компонента вектора $z(x)$, где $z(x)$ удовлетворяет (21)–(22), когда $f_1(x) = f_2(1-x) = f(x)$, есть $R_{0,\lambda} f = (L_0 - \lambda E)^{-1} f$.

Лемма 3. *Если* $z(x)$ *удовлетворяет* (21)–(22), *то*

$$z(x)=(\exp\lambda Bx)\Delta^{-1}(\lambda)\Big\{P\int_0^x(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt-Q(\exp\lambda B)\int_x^1(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt\Big\}, \quad (29)$$

где $\Delta(\lambda)=P+Q\exp\lambda B$.

Доказательство. Общее решение системы (21) имеет вид

$$z(x)=(\exp\lambda Bx)\Big\{c+\int_0^x(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt\Big\}, \quad (30)$$

где c — произвольный постоянный вектор размерности 2. Находим c из граничного условия (22), т. е. имеем

$$Pc+Q(\exp\lambda B)\Big\{c+\int_0^1(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt\Big\}=0.$$

Отсюда

$$c=-\Delta^{-1}(\lambda)Q(\exp\lambda B)\int_0^1(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt.$$

Подставив c в (30), получим

$$\begin{aligned}z(x)&=(\exp\lambda Bx)\Big\{-\Delta^{-1}(\lambda)Q(\exp\lambda B)\int_0^1(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt+\\&\quad+\int_0^x(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt\Big\}=(\exp\lambda Bx)\Delta^{-1}(\lambda)\Big\{-Q(\exp\lambda B)\times\\&\quad\times\int_0^1(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt+(P+Q\exp\lambda B)\int_0^x(\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt\Big\}.\end{aligned}$$

Отсюда легко следует (29). $\square$

Найдем теперь нужное представление для $R_{0,\lambda}$. Собственными значениями матрицы B будут $\pm\sqrt{\delta}$. Обозначим через $\Gamma=(\gamma_{ij})_1^2$ неособую матрицу размера 2×2 такую, что $\Gamma^{-1}B\Gamma=D$, где $D=\begin{pmatrix}\sqrt{\delta}&0\\0&-\sqrt{\delta}\end{pmatrix}$. Далее будем обозначать одной и той же буквой γ различные постоянные, не зависящие от λ.

Лемма 4. *Имеет место формула*

$$R_{0,\lambda}f=\frac{1}{\beta(\lambda)}\{r(\lambda(1-x))q_1(x,\lambda;f)+r(\lambda x)q_2(x,\lambda;f)\}, \quad (31)$$

где

$$\begin{gathered}r(\lambda x)=\gamma\exp\mu x+\gamma\exp(-\mu x),\qquad \mu=\lambda\sqrt{\delta},\\ q_1(x,\lambda;f)=\int_0^x r(\lambda t)f(t)\,dt+\int_{1-x}^1 r(\lambda(1-t))f(t)\,dt,\\ q_2(x,\lambda;f)=\int_x^1 r(\lambda(1-t))f(t)\,dt+\int_0^{1-x} r(\lambda t)f(t)\,dt,\\ \beta(\lambda)=\det(P\Gamma+Q\Gamma\exp\lambda D)\end{gathered}$$

(*произведение* $r(\lambda x)r(\lambda t)$ *понимается так*: $r(\lambda x)r(\lambda t)=\sum\gamma\exp\mu(\pm x\pm t)$).

Доказательство. Имеем

$$P\Gamma = \begin{pmatrix} \delta_1\gamma_{11} - \delta_2\gamma_{21} & \delta_1\gamma_{12} - \delta_2\gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q\Gamma \exp \lambda D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\delta_2\gamma_{11} - \delta_1\gamma_{21}) \exp \mu & (\delta_2\gamma_{12} - \delta_1\gamma_{22}) \exp(-\mu) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$P\Gamma + Q\Gamma \exp \lambda D = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} \exp \mu & \beta_{22} \exp(-\mu) \end{pmatrix},$$

где $\beta_{11} = \delta_1\gamma_{11} - \delta_2\gamma_{21}$, $\beta_{12} = \delta_1\gamma_{12} - \delta_2\gamma_{22}$, $\beta_{21} = \delta_2\gamma_{11} - \delta_1\gamma_{21}$, $\beta_{22} = \delta_2\gamma_{12} - \delta_1\gamma_{22}$. При этом $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$, $\gamma_{21} = \gamma_{12} = \alpha_2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{\delta})$. Тогда $\beta(\lambda) = \beta_1 \exp \mu + \beta_2 \exp(-\mu)$, где $\beta_1 = -\beta_{21}\beta_{12}$, $\beta_2 = \beta_{11}\beta_{22}$. Пусть λ таково, что $\beta(\lambda) \neq 0$. Обозначим через $T = (t_{i,j})_1^2$ матрицу, обратную к $P\Gamma + Q\Gamma \exp \lambda D$. Из соотношения $E = (P\Gamma + Q\Gamma \exp \lambda D)T$, где E — единичная матрица, получим следующие системы уравнений для t_{ij}:

$$\begin{cases} \beta_{11}t_{11} + \beta_{12}t_{21} = 1, \\ \beta_{21}t_{11} \exp \mu + \beta_{22}t_{21} \exp(-\mu) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_{11}t_{12} + \beta_{12}t_{22} = 0, \\ \beta_{21}t_{12} \exp \mu + \beta_{22}t_{22} \exp(-\mu) = 1. \end{cases}$$

Определитель обеих систем один и тот же, равный $\beta(\lambda)$. Поэтому получим

$$t_{11} = \frac{\gamma \exp(-\mu)}{\beta(\lambda)}, \quad t_{21} = \frac{\gamma \exp \mu}{\beta(\lambda)}, \quad t_{12} = \frac{\gamma}{\beta(\lambda)}, \quad t_{22} = \frac{\gamma}{\beta(\lambda)},$$

и

$$T = \frac{1}{\beta(\lambda)} \begin{pmatrix} \gamma \exp(-\mu) & \gamma \\ \gamma \exp \mu & \gamma \end{pmatrix}.$$

Обозначим $V = V_1 - V_2$, где

$$V_1 = P \int_0^x (\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt, \qquad V_2 = Q(\exp \lambda B) \int_x^1 (\exp(-\lambda Bt))BF(t)\,dt,$$
$$\Phi(t) = \Gamma^{-1}F(t), \qquad \Phi(t) = \{\Phi_1(t), \Phi_2(t)\}^T.$$

Тогда $\Phi_i(t) = \gamma f(t) + \gamma f(1-t)$. Далее, имеем

$$V_1 = P\Gamma \int_0^x (\exp(-\lambda Dt))D\Phi(t)\,dt.$$

Но

$$P\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\exp(-\lambda Dt))D = \begin{pmatrix} \gamma \exp(-\mu t) & 0 \\ 0 & \gamma \exp \mu t \end{pmatrix},$$
$$P\Gamma(\exp(-\lambda Dt))D = \begin{pmatrix} \gamma \exp(-\mu t) & \gamma \exp \mu t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$V_1 = \int_0^x \begin{pmatrix} \gamma \exp(-\mu t) & \gamma \exp \mu t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} dt =$$
$$= \int_0^x \{(\exp(-\mu t))(\gamma f(t) + \gamma f(1-t)) + (\exp \mu t)(\gamma f(t) + \gamma f(1-t)), 0\}^T dt =$$
$$= \left\{ \int_0^x r(\lambda t) f(t)\,dt + \int_{1-x}^1 r(\lambda(1-t)) f(t)\,dt, 0 \right\}^T = \{q_1(x,\lambda; f), 0\}^T.$$

Аналогично получим $V_2 = \{0, q_2(x,\lambda; f)\}^T$. Имеем теперь

$$(\exp \lambda Bx)\Delta^{-1}(\lambda) = \Gamma(\exp \lambda Dx)\Gamma^{-1}\Delta^{-1}(\lambda) = \Gamma(\exp \lambda Dx)T.$$

Но
$$(\exp \lambda D x)T = \frac{1}{\beta(\lambda)} \begin{pmatrix} \gamma \exp(-\mu(1-x)) & \gamma \exp \mu x \\ \gamma \exp \mu(1-x) & \gamma \exp(-\mu x) \end{pmatrix}.$$
Поэтому
$$(\exp \lambda D x)TV = \frac{1}{\beta(\lambda)} \begin{pmatrix} (\exp(-\mu(1-x)))q_1 + (\exp \mu x)q_2 \\ (\exp \mu(1-x))q_1 + (\exp(-\mu x))q_2 \end{pmatrix}.$$
Значит,
$$z(x) = \Gamma(\exp \lambda D x)TV = \frac{1}{\beta(\lambda)}\{r(\lambda(1-x))q_1 + r(\lambda x)q_2, r(\lambda(1-x))q_1 + r(\lambda x)q_2\}^T.$$
Отсюда получим (31), ибо по следствию леммы 2 первая компонента $z(x)$ есть $R_{0,\lambda}f$. $\square$

Лемма 5. *Общее решение уравнения $Ly - \lambda y = 0$ имеет вид*
$$y(x,\lambda) = c\varphi(x,\mu),$$
где $\varphi(x,\mu) = \exp \mu x + \alpha_2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{\delta}) \exp \mu(1-x)$.

Доказательство. Если $Ly = \lambda y$, то $L^2 y = \lambda L y = \lambda^2 y$. Но
$$L^2 y = L(Ly) = \frac{1}{\delta}\{\alpha_1 (Ly)'_x(x) + \alpha_2 (Ly)'_x(1-x)\} =$$
$$= \frac{1}{\delta}\left\{\frac{\alpha_1}{\delta}(\alpha_1 y''(x) - \alpha_2 y''(1-x)) + \frac{\alpha_2}{\delta}(\alpha_1 y''(1-x) - \alpha_2 y''(x))\right\} = \frac{1}{\delta} y''(x),$$
т. е. получили $y''(x,\lambda) = \lambda^2 \delta y(x,\lambda)$. Отсюда
$$y(x,\lambda) = c_1 \exp \mu x + c_2 \exp(-\mu x). \tag{32}$$
Подставим эту формулу в $Ly - \lambda y = 0$. Тогда имеем
$$\frac{1}{\delta}\{\alpha_1[c_1\mu \exp \mu x - c_2 \mu \exp(-\mu x)] + \alpha_2[c_1 \mu \exp \mu(1-x) - c_2 \mu \exp(-\mu(1-x))]\} =$$
$$= \lambda c_1 \exp \mu x + \lambda c_2 \exp(-\mu x).$$
Отсюда
$$\left(\frac{1}{\delta}\alpha_1 c_1 \mu - \frac{1}{\delta}\alpha_2 c_2 \mu \exp(-\mu) - \lambda c_1\right) \exp \mu x + \left(-\frac{\alpha_1}{\delta} c_2 \mu + \frac{\alpha_2}{\delta} c_1 \mu \exp \mu - \lambda c_2\right) \exp(-\mu x) = 0.$$
Значит,
$$\begin{aligned} c_1\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}} - 1\right) + c_2\left(-\frac{\alpha_2}{\sqrt{\delta}}\exp(-\mu)\right) &= 0, \\ c_1 \frac{\alpha_2}{\sqrt{\delta}} \exp \mu + c_2\left(-\frac{\alpha_1}{\sqrt{\delta}} - 1\right) &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$
Определитель этой системы относительно c_1 и c_2 равен нулю. Из первого уравнения (33) находим c_2 через c_1 и подставляем в (32). Получаем $y(x,\lambda) = c_1\varphi(x,\mu)$. $\square$

Лемма 6. *Имеет место формула*
$$R_{1,\lambda} f = R_{0,\lambda} f + \frac{(R_{0,\lambda} f, g)}{V(\varphi(x,\mu))}\varphi(x,\mu). \tag{34}$$

Доказательство. Положим $y = R_{1,\lambda} f$. Тогда $Ly - \lambda y = f$. Отсюда по лемме 5

$$y = R_{0,\lambda} f + c\varphi(x,\mu). \tag{35}$$

Так как $V(y) = 0$, то получим

$$0 = V(R_{0,\lambda} f) + cV(\varphi(x,\mu)) = -(R_{0,\lambda} f, g) + cV(\varphi(x,\mu)).$$

Найдем отсюда c и, подставив в (35), придем к (34). $\square$

3. В дальнейшем будем предполагать, что $\beta_1\beta_2 \neq 0$. Это условие назовем условием регулярности. Для определенности считаем, что $\operatorname{Re}\mu \geq 0$. Противоположный случай рассматривается аналогично. Через S_ε обозначим область, получающуюся из всей λ-плоскости удалением всех нулей $\beta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$. Тогда в S_ε очевидны оценки

$$\beta^{-1}(\lambda) = O(\exp(-\mu)), \qquad r(\lambda x) = O(\exp \mu x). \tag{36}$$

Лемма 7. *В S_ε имеет место оценка*

$$\frac{\varphi(x,\mu)}{V(\varphi(x,\mu))} = O(|\exp(-\mu x)| + |\exp(-\mu(1-x))|).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} V(\varphi(x,\mu)) &= \delta_1\varphi(0,\mu) - \delta_2\varphi(1,\mu) - (\varphi(x,\mu), g) = \\ &= \delta_1(1 + \alpha_2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{\delta})\exp\mu) - \delta_2(\exp\mu + \alpha_2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{\delta})) - (\varphi(x,\mu), g). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{gathered} \delta_1 - \delta_2\alpha_2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{\delta}) = \delta_1 - \delta_2\gamma_{12} = \delta_1\gamma_{22} - \delta_2\gamma_{12} = -\beta_{22}, \\ \delta_1\alpha_2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{\delta}) - \delta_2 = \delta_1\gamma_{21} - \delta_2\gamma_{11} = -\beta_{21}, \\ (\varphi(x,\mu), g) = o(\exp\mu). \end{gathered}$$

Поэтому

$$V(\varphi(x,\mu)) = -\beta_{22} - \beta_{21}\exp\mu + o(\exp\mu).$$

Отсюда получим оценку

$$V^{-1}(\varphi(x,\mu)) = O(\exp(-\mu)).$$

Теперь утверждение леммы становится очевидным.

Определим $R^*_{0,\lambda}$ из соотношения $(R_{0,\lambda} f, g) = (f, R^*_{0,\lambda} g)$.

Лемма 8. *Если $f(x) \in C^1[0,1]$, то $R^*_{0,\lambda} f = O(1/\lambda)$.*

Доказательство. По лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} (R_{0,\lambda} f, g) = \frac{1}{\beta(\lambda)} \int_0^1 \Big\{ r(\lambda(1-x)) \int_0^x r(\lambda t) f(t)\,dt + r(\lambda(1-x)) \int_{1-x}^1 r(\lambda(1-t)) f(t)\,dt + \\ + r(\lambda x) \int_x^1 r(\lambda(1-t)) f(t)\,dt + r(\lambda x) \int_0^{1-x} r(\lambda t) f(t)\,dt \Big\} g(x)\,dx. \end{aligned} \tag{37}$$

Так как

$$\begin{gathered} \int_0^1 dx \int_0^x dt = \int_0^1 dt \int_t^1 dx, \qquad \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 dt = \int_0^1 dt \int_{1-t}^1 dx, \\ \int_0^1 dx \int_x^1 dt = \int_0^1 dt \int_0^t dx, \qquad \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dt = \int_0^1 dt \int_0^{1-t} dx, \end{gathered}$$

то из (37) получим

$$R^*_{0,\lambda}f=\frac{1}{\beta(\lambda)}\Big\{\int_t^1 r(\lambda(1-x))r(\lambda t)f(x)\,dx+\int_{1-t}^1 r(\lambda(1-x))r(\lambda(1-t))f(x)\,dx+$$
$$+\int_0^t r(\lambda x)r(\lambda(1-t))f(x)\,dx+\int_0^{1-t} r(\lambda x)r(\lambda t)f(t)\,dx\Big\}.$$

Так как $f(x)\in C^1[0,1]$, то, интегрируя по частям и используя оценки (36), получим утверждение леммы.

Лемма 9. *Если* $f(x)\in C[0,1]$, *то в* S_ε

$$\|R_{0,\lambda}f\|_{C[0,1]}=o(1).$$

Доказательство. Задаем $\varepsilon_1>0$. Пусть $p(x)$ — многочлен такой, что $\|f(x)-p(x)\|_{C[0,1]}\le\varepsilon_1$. Тогда имеем

$$R_{0,\lambda}f=R_{0,\lambda}(f-p)+R_{0,\lambda}p.$$

Так же, как в лемме 8, получим $R_{0,\lambda}p=O\Big(\dfrac{1}{\lambda}\Big)$. Далее, по лемме 4 в силу (36) легко получим оценку

$$\|R_{0,\lambda}(f-p)\|_{C[0,1]}=O(\|f-p\|_{C[0,1]}).\quad\square$$

Лемма 10. *Если* $f_i(x)\in C[0,1]$ $(i=1,2)$, *то в* S_ε

$$(R_{1,\lambda}f_1,f_2)=o(1).$$

Доказательство. По лемме 6 имеем

$$(R_{1,\lambda}f_1,f_2)=(R_{0,\lambda}f_1,f_2)+\frac{(R_{0,\lambda}f_1,g)}{V(\varphi(x,\mu))}(\varphi(x,\mu),f_2).$$

Отсюда по леммам 7 и 9 получим требуемое. $\square$

Лемма 11. *Если* $f(x)\in L_\infty[0,1]$, *то при* $\lambda\in S_\varepsilon$ *справедлива оценка*

$$\|R_{0,\lambda}f\|=O\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\|f\|\Big).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^x r(\lambda t)f(t)\,dt=O\Big(\int_0^x|f(t)||\exp\mu t|\,dt\Big)=O\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}(|\exp\mu x|-1)\|f\|\Big),$$
$$\int_{1-x}^1 r(\lambda(1-t))f(t)\,dt=O\Big(\int_{1-x}^1|f(t)||\exp\mu(1-t)|\,dt\Big)=O\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}(|\exp\mu x|-1)\|f\|\Big).$$

Значит, эту же оценку имеет и $q_1(x,\lambda;f)$. Аналогично,

$$q_2(x,\lambda;f)=O\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}(\exp\mu(1-x)-1)\|f\|\Big).$$

Поэтому по лемме 4

$$R_{0,\lambda}f=O\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\{2-|\exp(-\mu x)|-|\exp(-\mu(1-x))|\}\|f\|\Big)=O\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\|f\|\Big).\quad\square$$

Лемма 12. *Если* $f(x)\in C[0,1]$, *то в* S_ε *справедлива оценка*

$$\|R_{1,\lambda}f\|=O\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\|f\|\Big).$$

Доказательство. Из (34), учитывая леммы 7 и 11, имеем

$$\|R_{1,\lambda}f\| = O(\|R_{0,\lambda}f\|) + O((R_{0,\lambda}f, g)) = O\left(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\|f\|\right). \quad \square$$

Лемма 13. *Если* $f(x) \in C[0,1]$ *и* $\lambda \in S_\varepsilon$, *то*

$$\|R_\lambda f\| = O\left(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\|f\|\right).$$

Доказательство. Положим $y = R_\lambda f$, тогда по теореме 3

$$R_\lambda f = R_{1,\lambda}f + \frac{1}{\Delta}\sum_{k,j=1}^{m} \Delta_{jk}(y, v_j)R_{1,\lambda}Lg_k. \tag{38}$$

Отсюда

$$(y, v_s) = (R_{1,\lambda}f, v_s) + \frac{1}{\Delta}\sum_{k,j=1}^{m} \Delta_{jk}(y, v_j)(R_{1,\lambda}Lg_k, v_s), \quad s = 1, \dots, m. \tag{39}$$

По лемме 10 $(R_{1,\lambda}Lg_k, v_s) = o(1)$. Поэтому из (39) получим оценки

$$(y, v_s) = O(\|R_{1,\lambda}f\|) = O\left(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\|f\|\right).$$

С помощью этих оценок из (38) с учетом леммы 12 следует требуемое. $\square$

Лемма 14. *Предположим, что* $g(\lambda, r)$ *удовлетворяет условиям* а)–г), *а* $p(\lambda)$ *допускает оценку* $p(\lambda) = O\left(\frac{1}{\operatorname{Re}\mu}\right)$, *тогда*

$$I = \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)|\,|p(\lambda)|\,|d\lambda| = O(1).$$

Доказательство. Обозначим $\sqrt{\delta} = \delta_0 e^{i\alpha}$. После замены $\lambda = re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} - \alpha \le \varphi \le \pi - \alpha$, $\varphi + \alpha = \Theta$ получим

$$I = r\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i(\Theta-\alpha)}, r)p(re^{i(\Theta-\alpha)})|d\Theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} O\left(\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right)^{\beta_2}\frac{1}{\cos\Theta}\right)d\Theta + \int_{0}^{\pi} O\left(\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right)^{\beta_1}\frac{1}{\cos\Theta}\right)d\Theta = I_1 + I_2.$$

Оценим I_2 (оценка I_1 аналогична). Пусть $t = \Theta - \frac{\pi}{2}$, тогда

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} O\left(|t|^{\beta_1}\frac{1}{\sin t}\right)dt,$$

но $|\sin t| \ge \frac{2}{\pi}|t|$, поэтому $I_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} O(|t|^{\beta_1 - 1})\,dt = O(1)$. $\square$

Теорема 4 (формула остаточного члена). *Пусть* $f(x), g_0(x) \in C[0,1]$. *Если на окружности* $|\lambda| = r$ *нет характеристических чисел оператора* A, *то*

$$f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)R_\lambda f(x)\,d\lambda = f(x)(1 - g(\mu_0, r)) + g(\mu_0, r)[f(x) - f_0(x)] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} \frac{g(\lambda, r)}{\lambda - \mu_0}R_\lambda g_0\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)R_\lambda[f(x) - f_0(x)]\,d\lambda,$$

где μ_0 – произвольное комплексное число ($|\mu_0| < r$), не являющееся характеристическим значением оператора A, и $f_0 = R_{\mu_0} g_0$.

Доказательство. Имеем

$$f_0 - \lambda A f_0 + (\lambda - \mu_0) A f_0 = A g_0.$$

Отсюда $f_0 + (\lambda - \mu_0) R_\lambda f_0 = R_\lambda g_0$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f_0 \, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda (f - f_0) \, d\lambda =$$
$$= -g(\mu_0, r) f_0(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{g(\lambda, r)}{\lambda - \mu} R_\lambda g_0 \, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda (f - f_0) \, d\lambda.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Лемма 15. *Пусть $y_0(x) \in C[0,1]$ и удовлетворяет граничному условию (9), тогда существует последовательность $\{y_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset C^1[0,1]$, которая удовлетворяет (9) и сходится к $y_0(x)$ в метрике $C[0,1]$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{p_k(x)\}_{k=1}^\infty$ алгебраических многочленов, сходящуюся к $y_0(x)$ в $C[0,1]$. Очевидно, $V(p_k(x)) = \beta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Выберем n_0 настолько большим, чтобы

$$\left| \int_0^1 x^{n_0} g(x) \, dx \right| \le \frac{|\alpha_2|}{2}.$$

Искомую последовательность возьмем в виде $y_k(x) = p_k(x) - \gamma_k x^{n_0}$, где γ_k — некоторые константы, определяемые из условия $V(y_k) = 0$, или, подробнее,

$$V(p_k) - \gamma_k V(x^{n_0}) = \beta_k - \gamma_k \left(-\alpha_2 - \int_0^1 x^{n_0} g(x) \, dx \right) = 0.$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, по модулю не меньше $\frac{|\alpha_2|}{2}$. Поэтому $\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $y_k(x)$ сходится к $y_0(x)$. $\square$

Следствие. Замыкание D^0 области значений оператора A в метрике $C[0,1]$ совпадает с множеством непрерывных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих (9).

Теорема 5. *Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \Omega_r(f) = \lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x) \, d\lambda \right\| = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in D^0$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $f(x) \in D^0$. Для $\varepsilon > 0$ возьмем $f_0(x)$ из области значений оператора A так, чтобы $\|f - f_0\| < \varepsilon$. По лемме 15 такой выбор возможен. Используя формулу остаточного члена, получим

$$\Omega_r(f) = O(1 - g(\mu, r)) + \varepsilon O(1) + O\left(\frac{1}{r} \int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| O\left(\frac{1}{\operatorname{Re} \mu} \right) |d\lambda| \right) +$$
$$+ \varepsilon O\left(\int_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| O\left(\frac{1}{\operatorname{Re} \mu} \right) |d\lambda| \right).$$

С учетом леммы 14 получим требуемое. $\square$

Литература

1. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
2. Stone M.H. *A comparison of the series of Fourier and Birkhoff* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – V. 28. – P. 695–761.
3. Хромов А.П. *Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов на конечном интервале* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 6. – С. 1294–1297.
4. Тихомиров В.В. *О риссовских средних разложений в тригонометрический ряд Фурье по собственным функциям пучка М.В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 5. – С. 1015–1017.
5. Тихомиров В.В. *О средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора* // Матем. сб. – 1977. – Т. 102. – № 1. – С. 33–55.

Саратовский государственный университет

Поступила
17.06.1999